



Eksempeloppgåve / Eksempeloppgave

Matematikk R1

April 2007

Programfag i studiespesialiserende utdanningsprogram /
Programfag i studiespesialiserende utdanningsprogram

Elevar/Elever
Privatistar/Privatister

Oppgåva ligg føre på begge målformer, først nynorsk, deretter bokmål. /
Oppgaven foreligger på begge målformer, først nynorsk, deretter bokmål.

Nynorsk

Eksamensinformasjon

Eksamensstid:	5 timer: Delprøve 1 skal leverast etter 2 timer. Delprøve 2 skal leverast etter 5 timer.
Hjelpemiddel, delprøve 1:	Ingen hjelpemiddel er tillatne, bortsett frå vanlege skrivesaker, passar, linjal, cm-mål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel, delprøve 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, bortsett frå verktøy som tillet elevane å kommunisere med andre.
Vedlegg:	Ingen
Vedlegg som skal leverast inn:	Ingen
Framgangsmåte og forklaring:	Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing. Det skal gå tydeleg fram av svaret på oppgåva korleis du er kommen fram til svara. Før inn nødvendige mellomrekningar. Ved grafisk løysing må du markere avlesingane dine på figuren.
Rettleiing om vurderinga:	Karakteren blir fastsett etter ei heilskapleg vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du <ul style="list-style-type: none">– viser grunnleggjande dugleikar– kan bruke hjelpemiddel– gjennomfører logiske resonnement– ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan bruke fagkunnskap i nye situasjonar– vurderer om svar er rimelege– forklarer framgangsmåtar og grunngir svar– skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar

Delprøve 1

OPPGÅVE 1

a) Deriver funksjonen

$$f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$$

b) Gitt funksjonen

$$g(x) = x^4 - 4x^3$$

- 1) Finn eventuelle topp-, botn- og terrassepunkt på grafen til g .
- 2) Finn eventuelle vendepunkt på grafen til g . Teikn grafen.

c) Skriv så enkelt som mogleg

$$\frac{x^2 + x}{x^2 - 4} - \frac{2}{4 - 2x}$$

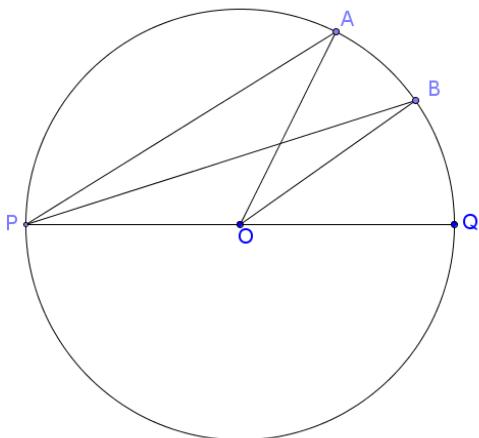
d) Vis at $x = 1$ er ei løysing på likninga $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
Bruk dette til å løyse ulikskapen $x^3 + 2x^2 - x - 2 \leq 0$

e) Posisjonen til ein partikkel er gitt ved vektorfunksjonen

$$\vec{r}(t) = \left[t^2 + 2t, \frac{1}{2}t^2 \right]$$

- 1) Finn eit uttrykk for farts- og akselerasjonsvektoren.
- 2) Undersøk om det finst t -verdiar som gjer at fartsvektoren står vinkelrett på akselerasjonsvektoren.

OPPGÅVE 2



$\angle APB$, som spenner over bogen AB , kallar vi ein periferivinkel.

$\angle AOB$, som spenner over bogen AB , kallar vi ein sentralvinkel.

- a) Teikn inn ein annan periferivinkel som spenner over bogen AB .

Ei setning i geometrien seier:

Ein periferivinkel er alltid halvparten så stor som den sentralvinkelen som spenner over same boge.

For å prove denne setninga teiknar vi diametern PQ .

- b) Forklar at $\triangle POA$ og $\triangle POB$ er likebeinte.

- c) Bruk b) til å forklare at

$$\angle BOQ = 2 \cdot \angle BPO$$

$$\angle AOQ = 2 \cdot \angle APO$$

- d) Bruk c) til å prove setninga ovanfor.

EUKLID AV ALEXANDRIA
ca. 325 f.Kr. – ca. 265 f.Kr.



Euklid av Alexandria er den mest prominente matematikaren frå antikken, og er mest kjend for si framstilling av matematikken i "Elementa". Desse bøkene er blitt brukt som lærebøker i geometri heilt fram til 1800-talet.

Kjelde: www.matematikk.org

Delprøve 2

OPPGÅVE 3

På ei volleyballtrening er det 23 elevar, 9 gutter og 14 jenter. Det skal veljast eit lag på 6 elevar.

- a) Kva er sannsynet for at det blir like mange gutter som jenter på laget, dersom elevane blir trekte ut tilfeldig?

I idrettslaget er det 736 medlemmer, 348 gutter og 388 jenter. Av desse er det 63 gutter og 47 jenter som spelar volleyball.

Ein person blir trekt ut tilfeldig. La A og B vere dei to hendingane

A : Personen er ein gutt

B : Personen spelar volleyball

- b) Forklar med ord kva vi meiner med $P(A \cap B)$. Finn dette sannsynet.
- c) Finn sannsyna $P(B)$ og $P(B|A)$. Er dei to hendingane A og B uavhengige?

Ei avis ønskjer å intervju to personar i idrettslaget, éin som spelar og éin som ikkje spelar volleyball. Dei trekkjer tilfeldig ut éin volleyballspelar og éin som ikkje spelar volleyball.

- d) Kva er sannsynet for at dei to personane er jenter?



OPPGÅVE 4

Du skal svare på anten alternativ I eller alternativ II.
Dei to alternativa er likeverdige ved vurderinga.

(Dersom svaret inneholder delar av begge,
vil berre det du har skrive på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

Ein funksjon f er definert ved $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$, $x \neq -1$ og $x \neq 1$

- a) Undersøk ved rekning om grenseverdiane $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ og $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ eksisterer.
Forklar kvifor grafen til f berre har éin vertikal asymptote. Finn likninga for den vertikale asymptoten til grafen.
- b) Vis ved rekning at $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$
Bruk den deriverte til å finne koordinatane til eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f .
- c) Bestem $f''(x)$ ved rekning. Bruk den andrederiverte til å avgjere kvar grafen til f vender den hole sida opp og kvar grafen vender den hole sida ned.
- d) Teikn grafen til f .

Funksjonen g er gitt ved $g(x) = f(e^x) = \frac{e^{3x} + 1}{e^{2x} - 1}$, $x \neq 0$

- e) Finn koordinatane til eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til g .

Alternativ II

Alle andregradsfunksjonar kan skrivast på forma $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. I denne oppgåva skal vi sjå på korleis parameterane a , b , og c endrar grafen til f .

Vi startar med å studere betydninga av parameteren c .

- a) Skisser grafane til $f(x) = x^2 + 2x + c$ for c -verdiane $c \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ i same koordinatsystem. Samanlikn grafane og kommenter.

Så studerer vi betydninga av parameteren a .

- b) Skisser grafane til $f(x) = a \cdot x^2 + 2x + 1$ for a -verdiane $a \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ i same koordinatsystem. Samanlikn grafane og kommenter.

Til slutt studerer vi betydninga av parameteren b .

- c) Skisser grafane til $f(x) = x^2 + b \cdot x + 1$ for b -verdiane $b \in \{-8, -4, -2, 0, 2, 4, 8\}$ i same koordinatsystem. Samanlikn grafane og kommenter.
- d) Finn koordinatane til botnpunktet på kvar av grafane i c). Kva for ei kurve ser det ut til at botnpunkta ligg på?
- e) Finn formelen for den kurva som botnpunkta ligg på.
- f) Gjenta det du gjorde i c), d) og e) for funksjonen $f(x) = -2x^2 + b \cdot x - 8$ for b -verdiane $b \in \{-8, -4, -2, 0, 2, 4, 8\}$. Gi eit forslag til kva for ei kurve botn- eller toppunkta til grafen til $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ligg på.



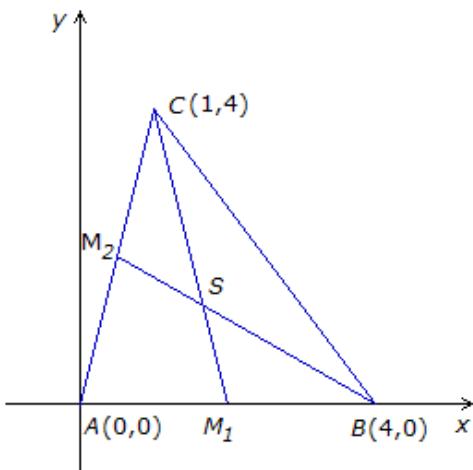
Ei parabolantenne er ein del av den flata som kjem fram ved at ein parabel blir rotert 180° om symmetriaksen.

OPPGÅVE 5

Ein median er eit linjestykke som går frå eit hjørne i ein trekant til midtpunktet på motståande side.

Ei setning i geometrien seier at dei tre medianane i ein trekant skjer kvarandre i eitt punkt. Denne setninga heiter mediansetninga.

Ein trekant ABC er plassert i eit koordinatsystem som vist på figuren. Ved å bruke vektorrekning skal vi vise at mediansetninga gjeld for denne trekanten.



- a) Skriv opp koordinatane til \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} og \overrightarrow{BC} .

M_1 er midtpunktet på sida AB , og M_2 er midtpunktet på sida AC .

- b) Vis ved rekning at koordinatane til punktet M_1 er $(2, 0)$, og punktet M_2 er $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Vi kallar skjeringspunktet mellom CM_1 og BM_2 for S . Ein metode for å finne koordinatane til S består i å skrive \overrightarrow{CS} på to måtar. To ulike vegar frå C til S gir

$$\overrightarrow{CS} = k \cdot \overrightarrow{CM_1} \text{ og } \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{CB} + t \cdot \overrightarrow{BM_2}$$

Dette gir oss følgjande vektorlikning:

$$k \cdot \overrightarrow{CM_1} = \overrightarrow{CB} + t \cdot \overrightarrow{BM_2}$$

- c) Set inn koordinatane til $\overrightarrow{CM_1}$, \overrightarrow{CB} og $\overrightarrow{BM_2}$, og vis at vektorlikninga kan skrivast som

$$\left[k, -4k \right] = \left[3 - \frac{7t}{2}, -4 + 2t \right]$$

- d) Løys vektorlikninga i c).

- e) Bestem \overrightarrow{CS} og koordinatane til punktet S .

- f) Vis at den tredje medianen går gjennom punktet S

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamensstid:	5 timer: Delprøve 1 skal leveres etter 2 timer. Delprøve 2 skal leveres etter 5 timer.
Hjelpebidrifter, delprøve 1:	Ingen hjelpebidrifter er tillatt, bortsett fra vanlige skrivesaker, passer, linjal, cm-mål og vinkelmåler.
Hjelpebidrifter, delprøve 2:	Alle hjelpebidrifter er tillatte, bortsett fra verktøy som tillater elevene å kommunisere med andre
Vedlegg:	Ingen
Vedlegg som skal leveres inn:	Ingen
Framgangsmåte og forklaring:	Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling. Det skal gå tydelig fram av besvarelsen hvordan du har kommet fram til svarene. Før inn nødvendige mellomregninger. Ved grafisk løsning må du markere avlesningene dine på figuren.
Veiledning om vurderingen:	Karakteren fastsettes etter en helhetlig vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du <ul style="list-style-type: none">– viser grunnleggende ferdigheter– kan bruke hjelpebidrifter– gjennomfører logiske resonnementer– ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan anvende fagkunnskap i nye situasjoner– vurderer om svar er rimelige– forklarer framgangsmåter og begrunner svar– skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Delprøve 1

OPPGAVE 1

a) Deriver funksjonen

$$f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$$

b) Gitt funksjonen

$$g(x) = x^4 - 4x^3$$

- 1) Finn eventuelle topp-, bunn- og terrassepunkter på grafen til g .
- 2) Finn eventuelle vendepunkter på grafen til g . Tegn grafen.

c) Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{x^2 + x}{x^2 - 4} - \frac{2}{4 - 2x}$$

d) Vis at $x = 1$ er en løsning på ligningen $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

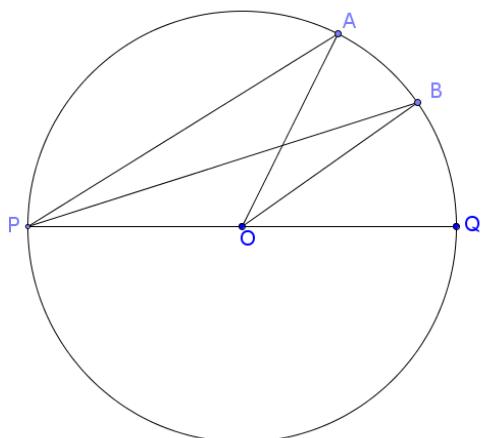
Bruk dette til å løse ulikheten $x^3 + 2x^2 - x - 2 \leq 0$

e) Posisjonen til en partikkelen gitt ved vektorfunksjonen

$$\vec{r}(t) = \left[t^2 + 2t, \frac{1}{2}t^2 \right]$$

- 1) Finn et uttrykk for farts- og akselerasjonsvektoren.
- 2) Undersøk om det finnes t -verdier som gjør at fartsvektoren står vinkelrett på akselerasjonsvektoren.

OPPGAVE 2



$\angle APB$, som spenner over buen AB , kaller vi en periferivinkel.

$\angle AOB$, som spenner over buen AB , kaller vi en sentralvinkel.

- a) Tegn inn en annen periferivinkel som spenner over buen AB .

En setning i geometrien sier:

En periferivinkel er alltid halvparten så stor som den sentralvinkelen som spenner over samme bue.

For å bevise denne setningen tegner vi diametern PQ .

- b) Forklar at $\triangle POA$ og $\triangle POB$ er likebeinte.

- c) Bruk b) til å forklare at

$$\angle BOQ = 2 \cdot \angle BPO$$

$$\angle AOQ = 2 \cdot \angle APO$$

- d) Bruk c) til å bevise setningen ovenfor.

EUKLID AV ALEXANDRIA
ca. 325 f.Kr. – ca. 265 f.Kr.



Euklid av Alexandria er den mest prominente matematikaren fra antikken, og er mest kjent for sin framstilling av matematikken i "Elementene". Disse bøkene er blitt brukt som lærebøker i geometri helt fram til 1800-tallet.

Kilde: www.matematikk.org

Delprøve 2

OPPGAVE 3

På en volleyballtrening er det 23 elever, 9 gutter og 14 jenter. Det skal velges et lag på 6 elever.

- a) Hva er sannsynligheten for at det blir like mange gutter som jenter på laget, dersom elevene trekkes ut tilfeldig?

I idrettslaget er det 736 medlemmer, 348 gutter og 388 jenter. Av disse er det 63 gutter og 47 jenter som spiller volleyball.

En person trekkes ut tilfeldig. La A og B være de to hendelsene

A : Personen er en gutt

B : Personen spiller volleyball

- b) Forklar med ord hva vi mener med $P(A \cap B)$. Finn denne sannsynligheten.
- c) Finn sannsynlighetene $P(B)$ og $P(B|A)$. Er de to hendelsene A og B uavhengige?

En avis ønsker å intervju to personer i idrettslaget, én som spiller og én som ikke spiller volleyball. De trekker tilfeldig ut én volleyballspiller og én som ikke spiller volleyball.

- d) Hva er sannsynligheten for at de to personene er jenter?



OPPGAVE 4

**Du skal besvare enten alternativ I eller alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.**

(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge,
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

En funksjon f er definert ved $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$, $x \neq -1$ og $x \neq 1$

- a) Undersøk ved regning om grenseverdiene $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ og $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ eksisterer.

Forklar hvorfor grafen til f bare har én vertikal asymptote. Finn ligningen for den vertikale asymptoten til grafen.

- b) Vis ved regning at $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$

Bruk den deriverte til å finne koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f .

- c) Bestem $f''(x)$ ved regning. Bruk den andrederiverte til å avgjøre hvor grafen til f vender den hule siden opp og hvor grafen vender den hule siden ned.

- d) Tegn grafen til f .

Funksjonen g er gitt ved $g(x) = f(e^x) = \frac{e^{3x} + 1}{e^{2x} - 1}$, $x \neq 0$

- e) Finn koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til g .

Alternativ II

Alle andregradsfunksjoner kan skrives på formen $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. I denne oppgaven skal vi se på hvordan parameterne a , b , og c endrer grafen til f .

Vi starter med å studere betydningen av parameteren c .

- a) Skisser grafene til $f(x) = x^2 + 2x + c$ for c -verdiene $c \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ i samme koordinatsystem. Sammenlign grafene og kommenter.

Så studerer vi betydningen av parameteren a .

- b) Skisser grafene til $f(x) = a \cdot x^2 + 2x + 1$ for a -verdiene $a \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ i samme koordinatsystem. Sammenlign grafene og kommenter.

Til slutt studerer vi betydningen av parameteren b .

- c) Skisser grafene til $f(x) = x^2 + b \cdot x + 1$ for b -verdiene $b \in \{-8, -4, -2, 0, 2, 4, 8\}$ i samme koordinatsystem. Sammenlign grafene og kommenter.
- d) Finn koordinatene til bunnpunktet på hver av grafene i c). Hvilken kurve ser det ut til at bunnpunktene ligger på?
- e) Finn formelen for den kurven som bunnpunktene ligger på.
- f) Gjenta det du gjorde i c), d) og e) for funksjonen $f(x) = -2x^2 + b \cdot x - 8$ for b -verdiene $b \in \{-8, -4, -2, 0, 2, 4, 8\}$. Gi et forslag til hvilken kurve bunn- eller toppunktene til grafen til $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ligger på.



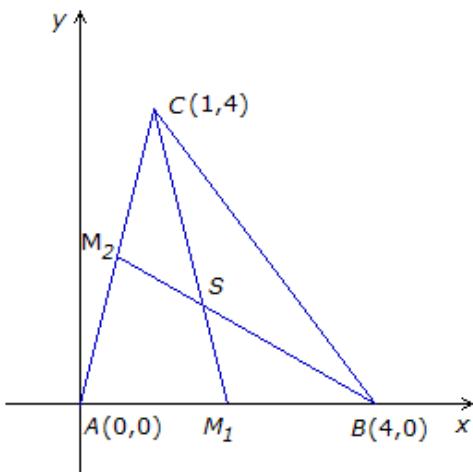
En parabolantenne er en del av den flaten som framkommer ved at en parabel roteres 180° om symmetriaksen.

OPPGAVE 5

En median er et linjestykke som går fra et hjørne i en trekant til midtpunktet på motstående side.

En setning i geometrien sier at de tre medianene i en trekant skjærer hverandre i ett punkt. Denne setningen heter mediansetningen.

En trekant ABC er plassert i et koordinatsystem som vist på figuren. Ved å bruke vektorregning skal vi vise at mediansetningen gjelder for denne trekanten.



- a) Skriv opp koordinatene til \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} og \overrightarrow{BC} .

M_1 er midtpunktet på siden AB , og M_2 er midtpunktet på siden AC .

- b) Vis ved regning at koordinatene til punktet M_1 er $(2, 0)$, og punktet M_2 er $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Vi kaller skjæringspunktet mellom CM_1 og BM_2 for S . En metode for å finne koordinatene til S består i å skrive \overrightarrow{CS} på to måter. To ulike veier fra C til S gir

$$\overrightarrow{CS} = k \cdot \overrightarrow{CM_1} \text{ og } \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{CB} + t \cdot \overrightarrow{BM_2}$$

Dette gir oss følgende vektorligning:

$$k \cdot \overrightarrow{CM_1} = \overrightarrow{CB} + t \cdot \overrightarrow{BM_2}$$

- c) Sett inn koordinatene til $\overrightarrow{CM_1}$, \overrightarrow{CB} og $\overrightarrow{BM_2}$, og vis at vektorligningen kan skrives som

$$\left[k, -4k \right] = \left[3 - \frac{7t}{2}, -4 + 2t \right]$$

- d) Løs vektorligningen i c).
- e) Bestem \overrightarrow{CS} og koordinatene til punktet S .
- f) Vis at den tredje medianen går gjennom punktet S .