

**Eksamen**

**28.05.2008**

**REA3022 Matematikk R1**

# Nynorsk

Eksamensinformasjon	
<b>Eksamenstid:</b>	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn etter 5 timar.
<b>Hjelpemiddel på Del 1:</b>	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med cm-mål og vinkelmålar
<b>Hjelpemiddel på Del 2:</b>	Alle hjelpemiddel er tillatne, bortsett frå Internett eller andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
<b>Vedlegg:</b>	Ingen
<b>Framgangsmåte</b>	Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte.  Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
<b>Rettleiing om vurderinga:</b>	Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du <ul style="list-style-type: none"><li>– viser reknedugleik og matematisk forståing</li><li>– gjennomfører logiske resonnement</li><li>– ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan bruke fagkunnskap i nye situasjonar</li><li>– kan bruke formålstenlege hjelpemiddel</li><li>– vurderer om svar er rimelege</li><li>– forklarar framgangsmåtar og grunngir svar</li><li>– skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar</li></ul>

(korrigert juni 2008)

## Del 1

### Oppgave 1

- a) Deriver funksjonen

$$f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

- b) Utfør polynomdivisjonen

$$(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2)$$

- c) Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 64}{2x - 16}$$

- d) Skriv så enkelt som mulig

$$\lg(x \cdot y^2) - 2 \lg y + \lg\left(\frac{x}{y^2}\right)$$

- e) Vi har funksjonen  $f(x) = x \cdot e^{-x}$

1) Vis at  $f'(x) = (1 - x) \cdot e^{-x}$ . Bruk dette til å finne eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til  $f$ .

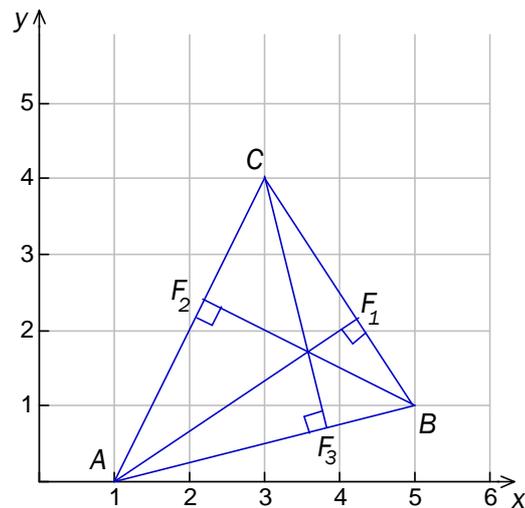
2) Bruk  $f''(x)$  til å finne eventuelle vendepunkt på grafen til  $f$ .

(I denne oppgava kan du få bruk for  $e^{-1} \approx 0,37$ ,  $e^{-2} \approx 0,14$  og  $e^{-3} \approx 0,05$ )

## Oppgave 2

- a) Vi har gitt vektorane  $\vec{u} = [a, b]$  og  $\vec{v} = [-b, a]$ . Vis at vektorane står vinkelrett på kvarandre.

Punkta  $A(1, 0)$ ,  $B(5, 1)$  og  $C(3, 4)$  er hjørne i ein trekant. Fotpunktta til høgdene frå hjørna  $A$ ,  $B$  og  $C$  er  $F_1$ ,  $F_2$  og  $F_3$ . Sjå skissa nedanfor.



- b) Forklar at

$$l: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + 4t \end{cases}$$

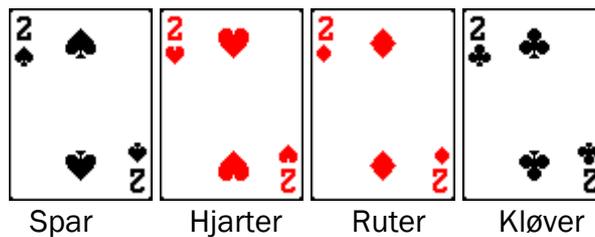
er ei parameterframstilling for linja gjennom  $C$  og  $F_3$ .

- c) Finn ei parameterframstilling for linja gjennom  $A$  og  $F_1$ .
- d) Rekn ut koordinatane til skjæringspunktet mellom linjene  $CF_3$  og  $AF_1$ .
- e) Vis at skjæringspunktet du fann i d), også ligg på linja gjennom  $B$  og  $F_2$ .  
Kva for ei setning frå geometrien er dette eit eksempel på?

## Del 2

### Oppgave 3

Ein kortstokk består av 52 kort: 13 spar, 13 hjarter, 13 ruter og 13 kløver. Spar og kløver er svarte kort. Hjarter og ruter er raude kort.



Frå ein kortstokk trekkjer vi tilfeldig ut 5 kort. I fleire kortspel er desse 5 korta kalla ei hand.

a) Kor mange moglege korthender er det?

Vi definerer følgjande hendingar:

*A: Korthanda består av 5 spar.*

*B: Korthanda består av 5 svarte kort.*

b) Bestem  $P(A)$  og  $P(B)$ .

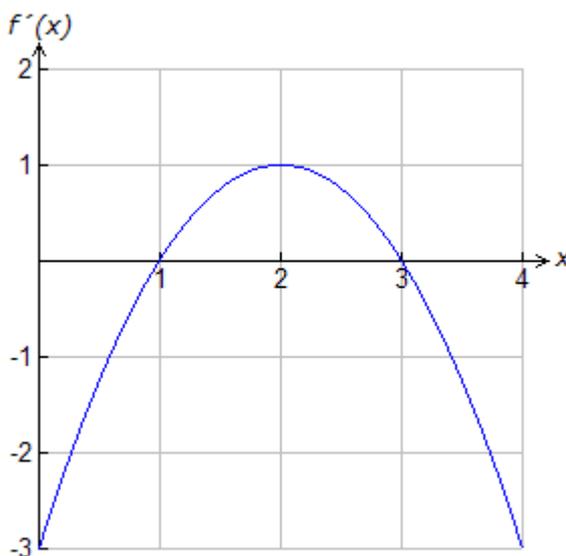
c) Finn  $P(A|B)$ . Er hendingane  $A$  og  $B$  uavhengige?

## Oppgave 4

Du skal svare på enten alternativ I eller alternativ II.  
Dei to alternativene er likeverdige ved vurderinga.

(Dersom svaret inneheld delar av begge,  
vil berre det du har skrive på alternativ I, bli vurdert.)

### Alternativ I

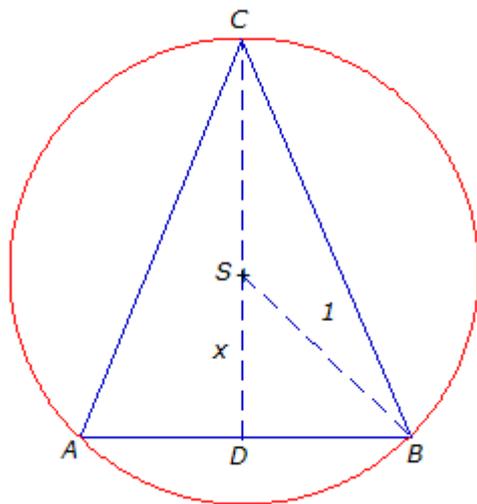


I denne oppgåva skal du drøfte ein polynomfunksjon  $f$  av tredje grad.  
På figuren har vi teikna grafen til den *deriverte* av funksjonen.

- Bruk grafen til  $f'$  til å avgjere kvar funksjonen  $f$  veks og kvar han minkar.
- Bruk grafen til  $f'$  til å finne førstekoordinaten til eventuelle topp-, botn- og vendepunkt på grafen til  $f$ .
- Bruk grafen til  $f'$  til å finne eit funksjonsuttrykk for  $f'$ .
- Grafen til  $f$  går gjennom origo. Forklar at  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$ .  
Teikn grafen til  $f$  når  $x \in \langle 0, 4 \rangle$ .

## Alternativ II

Figuren nedanfor viser ein likebeint trekant  $ABC$  innskrevet i ein sirkel med sentrum  $S$  og radius  $1$ . Linjestykket  $CD$  er ei høgd i trekanten. Vi set  $SD = x$ .



- a) Forklar at arealet  $F$  av trekanten  $ABC$  er gitt ved

$$F(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$$

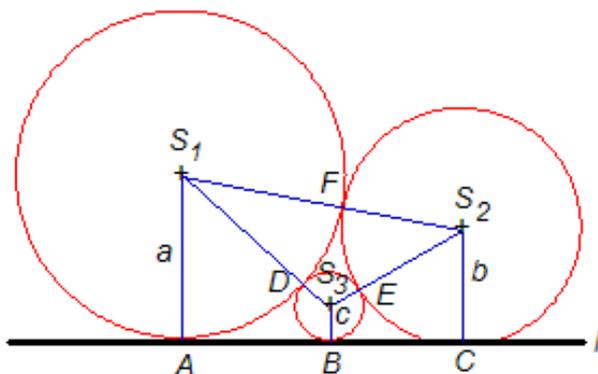
- b) Teikn grafen til  $F$ . Bruk grafen til å finne det største arealet av trekanten  $ABC$ .

- c) Vis at  $x = \frac{1}{2}$  er ei løysing av likninga  $F'(x) = 0$ . Kommenter svaret.

- d) Rekn ut lengda av sidene i trekanten  $ABC$  når  $x = \frac{1}{2}$ . Kommenter svaret.

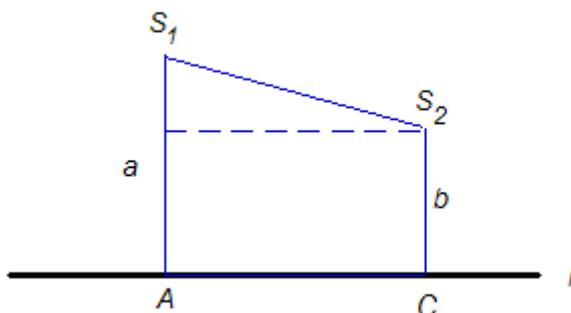
## Oppgave 5

Tre sirkler med sentrum i  $S_1$ ,  $S_2$  og  $S_3$  har radiane  $a$ ,  $b$  og  $c$ . Alle sirklane tangerer linja  $l$ . Tangeringspunktene er  $A$ ,  $B$  og  $C$ . Sirklane tangerer kvarandre parvis i punkta  $D$ ,  $E$  og  $F$ , slik figur 1 viser.



Figur 1

- Forklar at  $S_1S_2 = a+b$ . Finn også  $S_1S_3$  og  $S_2S_3$  uttrykte ved radiane.
- Bruk Pytagoras og vis at  $AC=2\sqrt{ab}$ . Sjå figur 2.



Figur 2

- Vis på tilsvarende måte at  $AB = 2\sqrt{ac}$  og  $BC = 2\sqrt{bc}$ .
- Bruk resultatene frå b) og c) til å vise følgjande samanheng mellom radiane i sirklane:

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$

- Vi set  $a = b = r$ . Finn  $c$  uttrykt ved  $r$ .
- Konstruer figuren når  $r = 4$  cm, enten med passar og linjal eller med dynamisk programvare. Forklar korleis du har utført konstruksjonen.

# Bokmål

<b>Eksamensinformasjon</b>	
<b>Eksamenstid:</b>	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn etter 5 timer.
<b>Hjelpemidler på Del 1:</b>	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med cm-mål og vinkelmåler
<b>Hjelpemidler på Del 2:</b>	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett eller andre verktøy som tillater kommunikasjon.
<b>Vedlegg:</b>	Ingen
<b>Framgangsmåte</b>	Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.  Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
<b>Veiledning om vurderingen:</b>	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du <ul style="list-style-type: none"><li>– viser regneferdigheter og matematisk forståelse</li><li>– gjennomfører logiske resonnementer</li><li>– ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan anvende fagkunnskap i nye situasjoner</li><li>– kan bruke hensiktmessige hjelpemidler</li><li>– vurderer om svar er rimelige</li><li>– forklarer framgangsmåter og begrunner svar</li><li>– skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger</li></ul>

(korrigert juni 2008)

## Del 1

### Oppgave 1

- a) Deriver funksjonen

$$f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

- b) Utfør polynomdivisjonen

$$(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2)$$

- c) Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 64}{2x - 16}$$

- d) Skriv så enkelt som mulig

$$\lg(x \cdot y^2) - 2 \lg y + \lg\left(\frac{x}{y^2}\right)$$

- e) Vi har funksjonen  $f(x) = x \cdot e^{-x}$

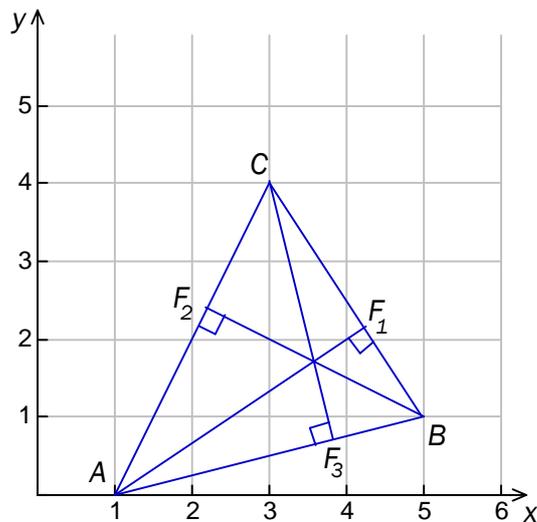
- 1) Vis at  $f'(x) = (1 - x) \cdot e^{-x}$ . Bruk dette til å finne eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til  $f$ .
- 2) Bruk  $f''(x)$  til å finne eventuelle vendepunkter på grafen til  $f$ .

(I denne oppgaven kan du få bruk for  $e^{-1} \approx 0,37$ ,  $e^{-2} \approx 0,14$  og  $e^{-3} \approx 0,05$ )

## Oppgave 2

- a) Vi har gitt vektorene  $\vec{u} = [a, b]$  og  $\vec{v} = [-b, a]$ . Vis at vektorene står vinkelrett på hverandre.

Punktene  $A(1, 0)$ ,  $B(5, 1)$  og  $C(3, 4)$  er hjørner i en trekant. Fotpunktene til høydene fra hjørnene  $A$ ,  $B$  og  $C$  er  $F_1$ ,  $F_2$  og  $F_3$ . Se skissen nedenfor.



- b) Forklar at

$$l: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + 4t \end{cases}$$

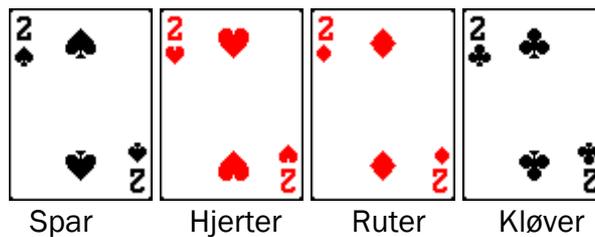
er en parameterframstilling for linja gjennom  $C$  og  $F_3$ .

- c) Finn en parameterframstilling for linja gjennom  $A$  og  $F_1$ .
- d) Regn ut koordinatene til skjæringspunktet mellom linjene  $CF_3$  og  $AF_1$ .
- e) Vis at skjæringspunktet du fant i d), også ligger på linja gjennom  $B$  og  $F_2$ .  
Hvilken setning fra geometrien er dette et eksempel på?

## Del 2

### Oppgave 3

En kortstokk består av 52 kort: 13 spar, 13 hjerter, 13 ruter og 13 kløver. Spar og kløver er svarte kort. Hjerter og ruter er røde kort.



Fra en kortstokk trekker vi tilfeldig ut 5 kort. I flere kortspill kalles disse 5 kortene en hånd.

a) Hvor mange mulige korthender er det?

Vi definerer følgende hendelser:

*A: Korthånden består av 5 spar.*

*B: Korthånden består av 5 svarte kort.*

b) Bestem  $P(A)$  og  $P(B)$ .

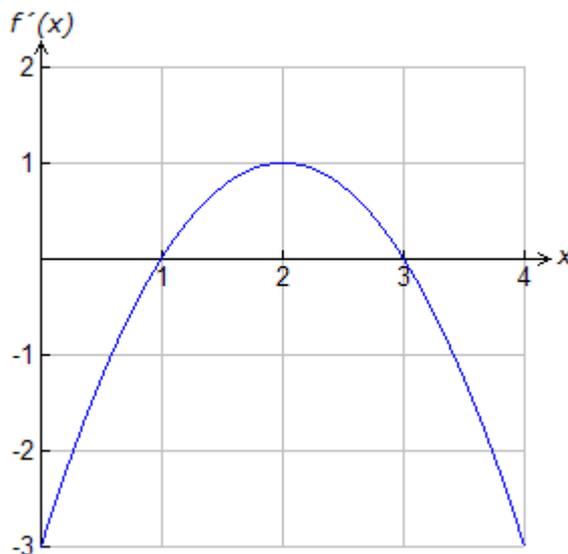
c) Finn  $P(A|B)$ . Er hendelsene  $A$  og  $B$  uavhengige?

## Oppgave 4

Du skal besvare enten alternativ I eller alternativ II.  
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge,  
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

### Alternativ I

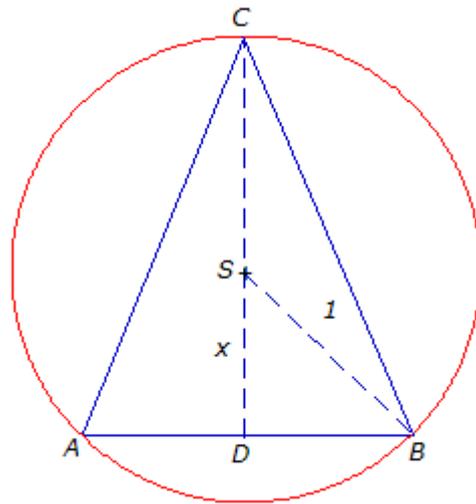


I denne oppgaven skal du drøfte en polynomfunksjon  $f$  av tredje grad.  
På figuren har vi tegnet grafen til den *deriverte* av funksjonen.

- Bruk grafen til  $f'$  til å avgjøre hvor funksjonen  $f$  vokser og hvor den avtar.
- Bruk grafen til  $f'$  til å finne førstekoordinaten til eventuelle topp-, bunn- og vendepunkter på grafen til  $f$ .
- Bruk grafen til  $f'$  til å finne et funksjonsuttrykk for  $f'$ .
- Grafen til  $f$  går gjennom origo. Forklar at  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$ .  
Tegn grafen til  $f$  når  $x \in \langle 0, 4 \rangle$ .

## Alternativ II

Figuren nedenfor viser en likebeint trekant  $ABC$  innskrevet i en sirkel med sentrum  $S$  og radius  $1$ . Linjestykket  $CD$  er en høyde i trekanten. Vi setter  $SD = x$ .



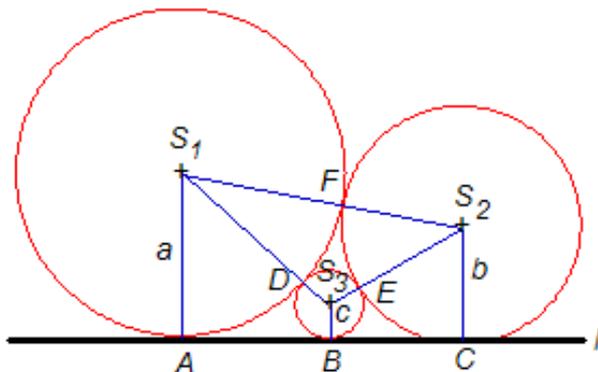
- a) Forklar at arealet  $F$  av trekanten  $ABC$  er gitt ved

$$F(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$$

- b) Tegn grafen til  $F$ . Bruk grafen til å finne det største arealet av trekanten  $ABC$ .
- c) Vis at  $x = \frac{1}{2}$  er en løsning av likningen  $F'(x) = 0$ . Kommenter svaret.
- d) Regn ut lengden av sidene i trekanten  $ABC$  når  $x = \frac{1}{2}$ . Kommenter svaret.

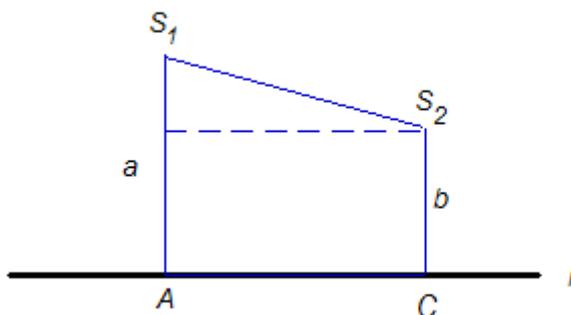
## Oppgave 5

Tre sirkler med sentre i  $S_1$ ,  $S_2$  og  $S_3$  har radiene  $a$ ,  $b$  og  $c$ . Alle sirklene tangerer linja  $l$ . Tangeringspunktene er  $A$ ,  $B$  og  $C$ . Sirklene tangerer hverandre parvis i punktene  $D$ ,  $E$  og  $F$ , slik figur 1 viser.



Figur 1

- Forklar at  $S_1S_2 = a+b$ . Finn også  $S_1S_3$  og  $S_2S_3$  uttrykt ved radiene.
- Bruk Pytagoras og vis at  $AC=2\sqrt{ab}$ . Se figur 2.



Figur 2

- Vis på tilsvarende måte at  $AB = 2\sqrt{ac}$  og  $BC = 2\sqrt{bc}$ .
- Bruk resultatene fra b) og c) til å vise følgende sammenheng mellom radiene i sirklene:

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$

- Vi setter  $a = b = r$ . Finn  $c$  uttrykt ved  $r$ .
- Konstruer figuren når  $r = 4$  cm, enten med passer og linjal eller med dynamisk programvare. Forklar hvordan du har utført konstruksjonen.

Kolstadgata 1  
Postboks 2924 Tøyen  
0608 OSLO  
Telefon 23 30 12 00  
Telefaks 23 30 12 99  
[www.utdanningsdirektoratet.no](http://www.utdanningsdirektoratet.no)