Utdanningsdirektoratet

Eksamen

22.05.2009

REA3022 Matematikk R1

Om vedlegg og opphavsrettigheter
Utdanningsdirektoratet har ikke adgang til å publisere opphavrettslig materiale på Internett. Tekster som er vedlagt oppgavene kan i noen tilfeller finnes på Internett. Oppgavene med vedlegg er også sendt fylkeskommunene og kan skaffes herfra. Mange av tekstene vil du også kunne finne på biblioteket.

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med cm-mål og vinkelmålar
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Bruk av kjelder:	Alle kjelder som blir brukte til eksamen, skal oppgivast på ein slik måte at lesaren kan finne fram til dei. Du må oppgi forfattar og heile tittelen på både lærebøker og annan litteratur. Dersom du har med deg utskrift eller sitat frå nettsider, skal heile adressa og nedlastingsdato oppgivast. Det er t.d. ikkje tilstrekkeleg med www.wikipedia.no
Vedlegg:	Ingen
Framgangsmåte:	Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser reknedugleik og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan bruke fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar

Illustrasjonen på framsida er henta frå www.abelprisen.no. Niels Henrik Abel sette Norge på verdskartet i matematikk.

Del 1

Oppgåve 1

a) Deriver funksjonane:

1) $f(x)=\left(x^2+1\right)^4$

2) $g(x)=x\cdot e^{2x}$

b) Rekn ut grenseverdien dersom han eksisterer

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}$$

c) Trekk saman

$$\frac{x-2}{x^2+2x}-\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{4x}{x^2-4}$$

d) Gitt punkta $A(-2,-1)$, $B(5,4)$ og $C(4,7)$.

1) Bestem $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{BC}$.

2) Undersøk om nokon av vektorane står vinkelrett på kvarandre.

e) Gitt polynomfunksjonen $f(x)=2x^3+8x^2+2x-12$.

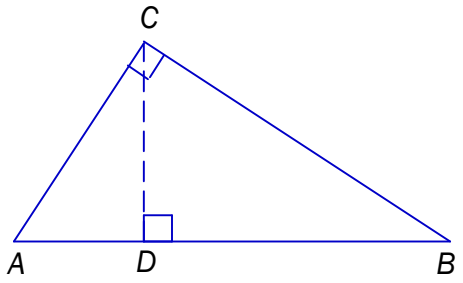
1) Rekn ut $f(1)$. Faktoriser $f(x)$.

2) Løys ulikskapen $f(x)\le 0$.

f) Skriv så enkelt som mogleg

$$\lg\left(\frac{1}{a^2}\right)+3\cdot\lg a$$

Oppgåve 2



I denne oppgåva skal du bevise Pytagoras' setning. På figuren ovanfor har vi teikna ein trekant ABC der $\angle C = 90^\circ$. Fotpunktet for høgda frå hjørnet C til sida AB er kalla D.

a) Forklar at ΔABC, ΔACD og ΔCBD er formlike.

b) Bruk a) til å vise at $AC^2 = AB \cdot AD$ og at $BC^2 = AB \cdot DB$.

c) Bruk b) til å bevise Pytagoras' setning.

Del 2

Oppgåve 3

a) I ein trekant ABC er $AB = 10$ cm, $AC = 7$ cm og $\angle C = 90^\circ$.

1) Bruk passar og linjal eller dynamisk programvare til å konstruere trekanten ABC.

2) Konstruer den innskrivne sirkelen i trekanten.

b) Finn den eksakte løysinga til likninga ved rekning

$$(\ln x)^2 + \ln x^2 = 3$$

c) Ei bedrift produserer mobiltelefonar. Avdeling A står for 70 % av produksjonen, og avdeling B står for dei resterande 30 %. Det har vist seg at 5 % av produksjonen frå avdeling A har feil, medan 10 % av produksjonen frå B har feil.

1) Finn sannsynet for at ein tilfeldig vald telefon har feil.

2) Kva er sannsynet for at ein telefon som har feil, er produsert i avdeling A?

Oppgåve 4

Du skal svare på <u>anten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.
Dei to alternativa er likeverdige ved vurderinga.

(Dersom svaret inneheld delar av begge,
vil berre det du har skrive på alternativ I, bli vurdert.)

<u>Alternativ I</u>

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx - 11$.

Grafen til funksjonen f har eit botnpunkt i $(-1,\ -16)$.

a) Vis at $a = 3$ og $b = 9$.

b) Finn $f'(x)$, og bruk denne til å teikne forteiknslinja for $f'(x)$. Bruk forteiknslinja til å finne ut kvar grafen stig og kvar han fell. Kva blir koordinatane til eventuelle toppunkt på grafen til f ?

c) Finn $f''(x)$, og bruk denne til å teikne forteiknslinja for $f''(x)$. Bruk forteiknslinja til å finne eventuelle vendepunkt på grafen til *f*.

d) Finn likningane for tangentane med stigningstal 9.

e) Teikn grafen til f . Bruk grafen og resultata i d) til å avgjere for kva verdiar av b likninga $f(x) = 9x + b$ har tre forskjellige løysingar.

Alternativ II

I deler av denne oppgåva er det ein fordel å bruke digitalt verktøy.

I denne oppgåva skal du studere fjerdegradsfunksjonar som har to vendepunkt.

Funksjonen f er gitt ved $f(x)=\frac{1}{12}\left(x^4-2x^3-12x^2\right)$.
La S og T vere dei to vendepunkta, med S lengst til venstre på grafen.

a) Teikn grafen til f .

b) Finn $f''(x)$ og teikn forteiknslinja for denne. Bestem koordinatane til vendepunkta S og T .

c) Finn likninga for den rette linja gjennom punkta S og T . Bestem koordinatane til dei to andre skjeringspunkta mellom grafen til f og linja. Bruk gjerne digitalt verktøy.

d) Vi lèt Q vere skjeringspunktet lengst til høgre. Rekn ut $\frac{ST}{TQ}$.

Ein annan fjerdegradsfunksjon g er gitt ved $g(x)=x^4-6x^2$.
La S_1 og T_1 vere dei to vendepunkta, med S_1 lengst til venstre på grafen.

Du skal gjennomføre tilsvarande oppgåver som i a), b), c) og d):

e)

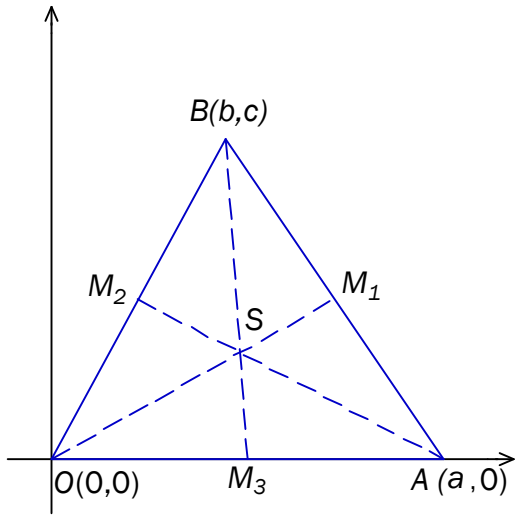
1) Teikn grafen til g.

2) Finn $g''(x)$ og teikn forteiknslinja for denne. Bestem koordinatane til vendepunkta S_1 og T_1 .

3) Finn likninga for den rette linja gjennom punkta S_1 og T_1 . Bestem koordinatane til dei to andre skjeringspunkta mellom grafen til g og linja. Bruk gjerne digitalt verktøy.

4) Vi lèt Q_1 vere skjeringspunktet lengst til høgre. Rekn ut $\frac{S_1T_1}{T_1Q_1}$.
Kommenter resultatet.

Oppgåve 5



Ein vilkårleg trekant OAB blir sett inn i eit koordinatsystem med sida OA langs x-aksen. Koordinatane til hjørna er $O(0,0)$, $A(a,0)$ og $B(b,c)$.

Medianane OM_1, AM_2 og BM_3 skjer kvarandre i S. Sjå figuren.

a) Vis at koordinatane til midtpunkta er

$$M_1\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)\ ,\ M_2\left(\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)\ \text{og}\ M_3\left(\frac{a}{2},0\right)$$

b) Forklar at det finst tal x og y slik at

$$\overrightarrow{OS}=x\cdot\overrightarrow{OM_1}\quad\text{og}\quad\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{AM_2}$$

c) Vis at spørsmål b) gir oss likningssettet

$$x\cdot\frac{a+b}{2}=a+y\cdot\left(\frac{b}{2}-a\right)\quad\text{og}\quad x\cdot\frac{c}{2}=y\cdot\frac{c}{2}$$

Finn x og y.

d) Forklar at koordinatane til skjeringspunktet mellom medianane er $S\left(\frac{a+b}{3},\frac{c}{3}\right)$

e) Bestem forholda

$$\frac{\left|\overrightarrow{OS}\right|}{\left|\overrightarrow{OM_1}\right|}\ ,\ \frac{\left|\overrightarrow{AS}\right|}{\left|\overrightarrow{AM_2}\right|}\ \text{og}\ \frac{\left|\overrightarrow{BS}\right|}{\left|\overrightarrow{BM_3}\right|}$$

Kommenter.

f) Bestem koordinatane til punktet B i det tilfellet at $O(0,0)$, $A(6,0)$ og $S(1,4)$.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med cm-mål og vinkelmåler
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Bruk av kilder:	Alle kilder som blir brukt til eksamen, skal oppgis på en slik måte at leseren kan finne fram til dem. Du må oppgi forfatter og hele tittelen på både lærebøker og annen litteratur. Dersom du har med deg utskrift eller sitat fra nettsider, skal hele adressen og nedlastingsdato oppgis. Det er f.eks. ikke tilstrekkelig med www.wikipedia.no
Vedlegg:	Ingen
Framgangsmåte:	Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan anvende fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Illustrasjonen på forsiden er hentet fra www.abelprisen.no. Niels Henrik Abel satte Norge på verdenskartet i matematikk.

Del 1

Oppgave 1

a) Deriver funksjonene:

1) $f(x) = \left(x^2 + 1\right)^4$

2) $g(x) = x \cdot e^{2x}$

b) Regn ut grenseverdien hvis den eksisterer

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$$

c) Trekk sammen

$$\frac{x-2}{x^2+2x} - \frac{x+2}{x^2-2x} - \frac{4x}{x^2-4}$$

d) Gitt punktene $A(-2, -1)$, $B(5, 4)$ og $C(4, 7)$.

1) Bestem $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{BC}$.

2) Undersøk om noen av vektorene står vinkelrett på hverandre.

e) Gitt polynomfunksjonen $f(x) = 2x^3 + 8x^2 + 2x - 12$.

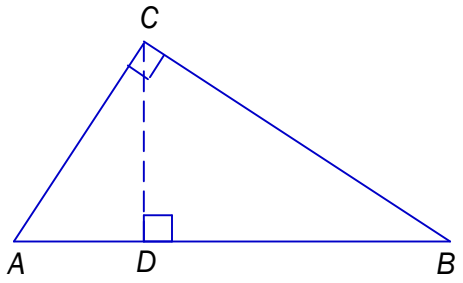
1) Regn ut $f(1)$. Faktoriser $f(x)$.

2) Løs ulikheten $f(x) \leq 0$.

f) Skriv så enkelt som mulig

$$\lg\left(\frac{1}{a^2}\right) + 3 \cdot \lg a$$

Oppgave 2



I denne oppgaven skal du bevise Pytagoras' setning. På figuren ovenfor har vi tegnet en trekant ABC der $\angle C = 90^\circ$. Fotpunktet for høyden fra hjørnet C til siden AB kalles D.

a) Forklar at ΔABC, ΔACD og ΔCBD er formlike.

b) Bruk a) til å vise at $AC^2 = AB \cdot AD$ og at $BC^2 = AB \cdot DB$.

c) Bruk b) til å bevise Pytagoras' setning.

Del 2

Oppgave 3

a) I en trekant ABC er $AB = 10$ cm, $AC = 7$ cm og $\angle C = 90^\circ$.

1) Bruk passer og linjal eller dynamisk programvare til å konstruere trekanten ABC.

2) Konstruer den innskrevne sirkelen i trekanten.

b) Finn den eksakte løsningen til likningen ved regning

$$(\ln x)^2 + \ln x^2 = 3$$

c) En bedrift produserer mobiltelefoner. Avdeling A står for 70 % av produksjonen, og avdeling B står for de resterende 30 %. Det har vist seg at 5 % av produksjonen fra avdeling A har feil, mens 10 % av produksjonen fra B har feil.

1) Finn sannsynligheten for at en tilfeldig valgt telefon har feil.

2) Hva er sannsynligheten for at en telefon som har feil, er produsert i avdeling A?

Oppgave 4

Du skal besvare <u>enten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge,
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

<u>Alternativ I</u>

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx - 11$.

Grafen til funksjonen f har et bunnpunkt i $(-1,\ -16)$.

a) Vis at $a = 3$ og $b = 9$.

b) Finn $f'(x)$, og bruk denne til å tegne fortegnslinja for $f'(x)$. Bruk fortegnslinja til å finne ut hvor grafen stiger og hvor den synker. Hva blir koordinatene til eventuelle toppunkter på grafen til f?

c) Finn $f''(x)$, og bruk denne til å tegne fortegnslinja for $f''(x)$. Bruk fortegnslinja til å finne eventuelle vendepunkter på grafen til *f*.

d) Finn likningene for tangentene med stigningstall 9.

e) Tegn grafen til f. Bruk grafen og resultatene i d) til å avgjøre for hvilke verdier av b likningen $f(x) = 9x + b$ har tre forskjellige løsninger.

Alternativ II

I deler av denne oppgaven er det en fordel å bruke digitalt verktøy.

I denne oppgaven skal du studere fjerdegradsfunksjoner som har to vendepunkter.

Funksjonen f er gitt ved $f(x)=\frac{1}{12}\left(x^4-2x^3-12x^2\right)$.
La S og T være de to vendepunktene, med S lengst til venstre på grafen.

a) Tegn grafen til f .

b) Finn $f''(x)$ og tegn fortegnslinja for denne. Bestem koordinatene til vendepunktene S og T .

c) Finn likningen for den rette linja gjennom punktene S og T . Bestem koordinatene til de to andre skjæringspunktene mellom grafen til f og linja. Bruk gjerne digitalt verktøy.

d) Vi lar Q være skjæringspunktet lengst til høyre. Regn ut $\frac{ST}{TQ}$.

En annen fjerdegradsfunksjon g er gitt ved $g(x)=x^4-6x^2$.
La S_1 og T_1 være de to vendepunktene, med S_1 lengst til venstre på grafen.

Du skal gjennomføre tilsvarende oppgaver som i a), b), c) og d):

e)

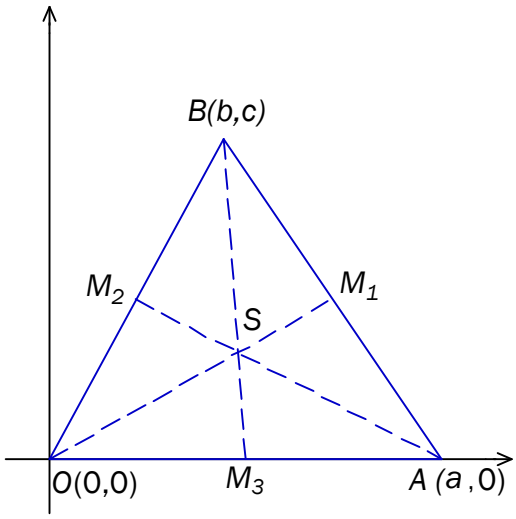
1) Tegn grafen til g.

2) Finn $g''(x)$ og tegn fortegnslinja for denne. Bestem koordinatene til vendepunktene S_1 og T_1 .

3) Finn likningen for den rette linja gjennom punktene S_1 og T_1 . Bestem koordinatene til de to andre skjæringspunktene mellom grafen til g og linja. Bruk gjerne digitalt verktøy.

4) Vi lar Q_1 være skjæringspunktet lengst til høyre. Regn ut $\frac{S_1T_1}{T_1Q_1}$.
Kommenter resultatet.

Oppgave 5



En vilkårlig trekant OAB settes inn i et koordinatsystem med siden OA langs x-aksen. Koordinatene til hjørnene er $O(0,0)$, $A(a,0)$ og $B(b,c)$.

Medianene OM_1, AM_2 og BM_3 skjærer hverandre i S. Se figuren.

a) Vis at koordinatene til midtpunktene er

$$M_1\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)\ ,\ M_2\left(\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)\ \text{og}\ M_3\left(\frac{a}{2},0\right)$$

b) Forklar at det finnes tall x og y slik at

$$\overrightarrow{OS}=x\cdot\overrightarrow{OM_1}\quad\text{og}\quad\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{AM_2}$$

c) Vis at spørsmål b) gir oss likningssettet

$$x\cdot\frac{a+b}{2}=a+y\cdot\left(\frac{b}{2}-a\right)\quad\text{og}\quad x\cdot\frac{c}{2}=y\cdot\frac{c}{2}$$

Finn x og y.

d) Forklar at koordinatene til skjæringspunktet mellom medianene er $S\left(\frac{a+b}{3},\frac{c}{3}\right)$

e) Bestem forholdene

$$\frac{\left|\overrightarrow{OS}\right|}{\left|\overrightarrow{OM_1}\right|}\ ,\ \frac{\left|\overrightarrow{AS}\right|}{\left|\overrightarrow{AM_2}\right|}\ \text{og}\ \frac{\left|\overrightarrow{BS}\right|}{\left|\overrightarrow{BM_3}\right|}$$

Kommenter.

f) Bestem koordinatene til punktet B i det tilfellet at $O(0,0)$, $A(6,0)$ og $S(1,4)$.

Kolstadgata 1
Postboks 2924 Tøyen
0608 OSLO
Telefon 23 30 12 00
Telefaks 23 30 12 99
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet