



Eksamensoppgaver

27.05.2010

REA3022 Matematikk R1

Om vedlegg og opphavsrettigheter

Utdanningsdirektoratet har ikke adgang til å publisere opphavrettslig materiale på Internett. Tekster og bilder som er vedlagt oppgavene kan i noen tilfeller finnes på Internett. Oppgavene med vedlegg er også sendt fylkeskommunene og kan skaffes herfra. Mange av tekstene vil du også kunne finne på biblioteket.

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leverast inn etter 2 timer. Del 2 skal leverast inn etter 5 timer.
Hjelpemiddel på del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar er tillatne.
Hjelpemiddel på del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, bortsett frå Internett og andre verktøy som kan brukast til kommunikasjon.
Vedlegg:	Det er ingen vedlegg.
Framgangsmåte:	Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du velje framgangsmåte sjølv. Dersom oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil du òg kunne få noko utteljing ved å bruke ein alternativ metode.
Rettleiing om vurderinga:	Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det vil seie at sensor vurderer i kva grad du <ul style="list-style-type: none">– viser reknedugleik og matematisk forståing– gjennomfører logiske resonnement– ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan bruke fagkunnskap i nye situasjonar– kan bruke formålstenlege hjelpemiddel– vurderer om svar er rimelege– forklarer framgangsmåtar og grunngir svar– skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar

Del 1

Oppgave 1

a) Deriver funksjonane

1) $f(x) = x^3 \cdot \ln x$

2) $g(x) = 4e^{x^2 - 3x}$

b) Vi har polynomfunksjonen $P(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$.

- 1) Rekn ut $P(2)$. Bruk polynomdivisjon til å faktorisere uttrykket $P(x)$ i førstegradsfaktorar.
- 2) Løs ulikskapen $P(x) \leq 0$.

c) Nedanfor er det gitt to utsegner. Skriv av utsegnene i svaret. I boksen mellom utsegnene skal du setje inn eitt av symbola \Rightarrow , \Leftarrow eller \Leftrightarrow .

Per er frå Bergen. Per er frå Noreg.

Forklar korleis du har tenkt.

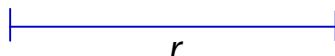
d) Vi har vektoren $\vec{a} = [3, 5]$.

- 1) Ein vektor \vec{b} er dobbelt så lang som \vec{a} og har motsett retning av \vec{a} . Skriv \vec{b} på koordinatform.
- 2) Finn koordinatane til ein vektor \vec{c} som står normalt på \vec{a} .

e) Løys likninga $4 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^4 = 64$.

f) I ein sirkel med radius r er det innskriven ein trekant ABC . Lengda til radien er gitt til høgre.

Sida AB i trekanten er $\frac{3}{2}r$, og $\angle ABC = 45^\circ$. Konstruer trekanten. Forklar konstruksjonen.



Oppgåve 2

Den deriverte til ein polynomfunksjon f er gitt ved

$$f'(x) = 2(x+1)(x-3)$$

- Bruk uttrykket over til å finne ut kvar funksjonen f veks, og kvar han minkar. Bestem også førstekoordinatane til topp- og botnpunktet på grafen til f .
- Bestem $f''(x)$. Bruk $f''(x)$ til å finne førstekoordinaten til vendepunktet på grafen til f .

Den deriverte til ein polynomfunksjon g er gitt ved

$$g'(x) = a \cdot (x-b) \cdot (x-c)$$

der konstantane a , b og c alle er positive. Vi går ut frå at $b < c$. Førstekoordinatane til topp- og botnpunktet på grafen til g er x_{maks} og x_{min} .

- Forklar kvifor grafen til g berre kan ha eitt vendepunkt. Vis at førstekoordinaten til dette vendepunktet ligg midt mellom x_{maks} og x_{min} .

Del 2

Oppgave 3

På ein tippekupong er det 12 fotballkampar. Når vi tippar ei einskildrekke, skal vi tippe resultatet i kvar av dei 12 fotballkampane. Utfallet i ein kamp er anten heimesiger (H), uavgjort (U) eller bortesiger (B). Nedanfor ser du eit eksempel på ei utfylt tipperekke.

Ein ivrig tippar la merke til at det i ein viss periode ofte var 5 heimesigrar (H) blant dei 12 kampane på tippekupongen.

- Kor mange ulike utval på 5 kampar kan veljast ut blant 12 kampar?
- Vi har fylt ut 5 kampar som vi trur endar med heimesiger. På kor mange måtar kan vi fylle ut dei 7 resterande kampane når kvar av dei skal fyllast ut med anten uavgjort (U) eller bortesiger (B)?
- Kort stort er sannsynet for at ei tilfeldig utfylt tipperekke skal innehalde nøyaktig 5 heimesigrar?

Oppgåve 4

Posisjonsvektoren til ein partikkel er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [t^3 + 3, t + 1] \quad \text{det vil seie} \quad \begin{cases} x = t^3 + 3 \\ y = t + 1 \end{cases}$$

- Teikn grafen til \vec{r} når $t \in [-2, 2]$.
- Bestem fartsvektoren $\vec{v}(t)$ og akselerasjonsvektoren $\vec{a}(t)$. Marker $\vec{v}(1)$ og $\vec{a}(1)$ på kurva til \vec{r} .
- Finn ved rekning det punktet på kurva der $\vec{v}(t)$ er parallel med y -aksen.

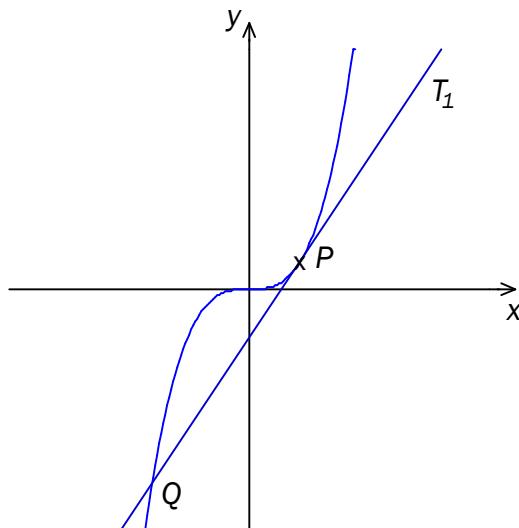
Oppgåve 5

Du skal svare på anten alternativ I eller alternativ II.
Dei to alternativa tel like mykje ved vurderinga.

(Dersom svaret ditt inneholder delar av begge alternativa,
vil berre det du har skrive på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

På figuren ser du ei skisse av grafen til funksjonen $f(x) = x^3$ og tangenten T_1 til grafen i punktet $P(1, 1)$. På skissa har aksane ulik målestokk.



- a) Vis ved rekning at likninga til tangenten T_1 er

$$y = 3x - 2$$

Punktet Q på figuren er eit anna fellespunkt mellom grafen til f og T_1 .

- b) Forklar at førstekoordinaten til Q må vere ei løysing av likninga

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

Bruk polynomdivisjon og løys denne likninga ved rekning. Finn koordinatane til Q .

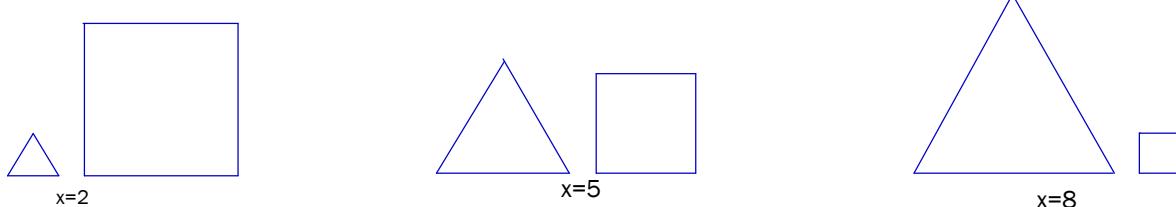
Ein annan tangent T_2 til grafen er parallel med tangenten T_1 .

- c) Finn tangeringspunktet R mellom grafen til f og T_2 ved rekning.

Alternativ II

Ein leidning er 10 meter lang. Leidningen skal kuttast i to delar. Den eine delen skal formast til sidene i eit kvadrat. Den andre delen skal formast til sidene i ein likesida trekant.

Den delen som blir brukt til å forme trekanten, er x meter lang.



- a) Forklar at arealet av kvadratet målt i kvadratmeter kan skrivast som

$$F_1(x) = \frac{1}{16}(10-x)^2$$

- b) Forklar at arealet av den likesida trekanten målt i kvadratmeter kan skrivast som

$$F_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot x^2$$

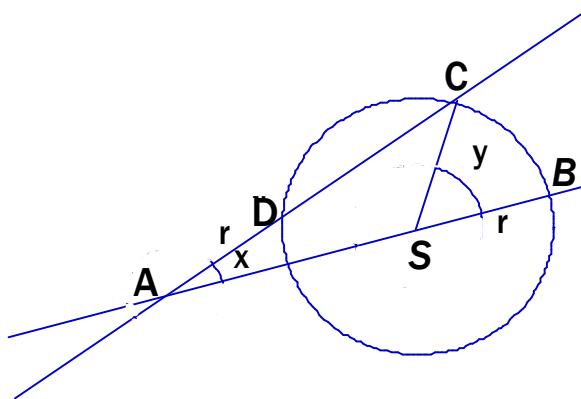
- c) Undersøk korleis leidningen må kuttast for at summen

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

skal få den minste verdien sin.

Oppgåve 6

Du skal studere ein sirkel med sentrum i S og radius r .



På figuren over set vi $x = \angle SAD$ og $y = \angle BSC$. Du skal vise at det er ein samanheng mellom x og y når $AD = r$.

- Forklar at $\angle ASD = x$.
- Vis at $\angle SDC = \angle SCD = 2x$.
- Vis at $y = 3x$.

Oppgåve 7

Vi vil undersøkje om talet $(4^n - 1)$ er deleleg med 3 når n er eit naturleg tal.

- Kontroller at $(4^n - 1)$ er deleleg med 3 når $n = 1, n = 2, n = 3$ og $n = 4$.
- Vis at $(4^n - 1) = (2^n - 1) \cdot (2^n + 1)$.
- Forklar at $(2^n - 1), 2^n$ og $(2^n + 1)$ er tre heile tal som ligg etter kvarandre på tallinja.
Forklar at eitt av desse tala er deleleg med 3. Kva for eit av tala kan ikkje vere deleleg med 3?
- Bruk b) og c) over til å bevise at $(4^n - 1)$ er deleleg med 3 for alle naturlege tal n .

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn etter 5 timer.
Hjelpebidler på del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler er tillatt.
Hjelpebidler på del 2:	Alle hjelpebidler er tillatt, bortsett fra Internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon.
Vedlegg:	Det er ingen vedlegg.
Framgangsmåte:	Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du velge framgangsmåte selv. Hvis oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil du også kunne få noe uttelling for å bruke en alternativ metode.
Veiledning om vurderingen:	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du <ul style="list-style-type: none">– viser regneferdigheter og matematisk forståelse– gjennomfører logiske resonneringer– ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan bruke fagkunnskap i nye situasjoner– kan bruke hensiktsmessige hjelpebidler– vurderer om svar er rimelige– forklarer framgangsmåter og begrunner svar– skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Del 1

Oppgave 1

a) Deriver funksjonene

1) $f(x) = x^3 \cdot \ln x$

2) $g(x) = 4e^{x^2 - 3x}$

b) Vi har polynomfunksjonen $P(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$.

- 1) Regn ut $P(2)$. Bruk polynomdivisjon til å faktorisere uttrykket $P(x)$ i førstegradsfaktorer.
- 2) Løs ulikheten $P(x) \leq 0$.

c) Nedenfor er det gitt to utsagn. Skriv av utsagnene i besvarelsen. I boksen mellom utsagnene skal du sette inn ett av symbolene \Rightarrow , \Leftarrow eller \Leftrightarrow .

Per er fra Bergen. Per er fra Norge.

Forklar hvordan du har tenkt.

d) Vi har vektoren $\vec{a} = [3, 5]$.

- 1) En vektor \vec{b} er dobbelt så lang som \vec{a} og har motsatt retning av \vec{a} .
Skriv \vec{b} på koordinatform.

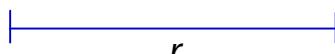
- 2) Finn koordinatene til en vektor \vec{c} som står normalt på \vec{a} .

e) Løs likningen $4 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^4 = 64$.

f) I en sirkel med radius r er det innskrevet en trekant ABC . Lengden til radien er gitt til høyre.

Siden AB i trekanten er $\frac{3}{2}r$, og $\angle ABC = 45^\circ$.

Konstruer trekanten. Forklar konstruksjonen.



Oppgave 2

Den deriverte til en polynomfunksjon f er gitt ved

$$f'(x) = 2(x+1)(x-3)$$

- Bruk uttrykket over til å finne ut hvor funksjonen f vokser, og hvor den avtar. Bestem også førstekoordinatene til topp- og bunnpunktet på grafen til f .
- Bestem $f''(x)$. Bruk $f''(x)$ til å finne førstekoordinaten til vendepunktet på grafen til f .

Den deriverte til en polynomfunksjon g er gitt ved

$$g'(x) = a \cdot (x-b) \cdot (x-c)$$

der konstantene a , b og c alle er positive. Vi antar at $b < c$. Førstekoordinatene til topp- og bunnpunktet på grafen til g er x_{maks} og x_{min} .

- Forklar hvorfor grafen til g bare kan ha ett vendepunkt. Vis at førstekoordinaten til dette vendepunktet ligger midt mellom x_{maks} og x_{min} .

Del 2

Oppgave 3

På en tippekupong er det 12 fotballkamper. Når man tipper en enkelttrekk, skal man tippe resultatet i hver av de 12 fotballkampene. Utfallet i en kamp er enten hjemmeseier (H), uavgjort (U) eller borteseier (B). Nedenfor ser du et eksempel på en utfylt tipperekke.

En ivrig tipper la merke til at det i en viss periode ofte var 5 hjemmeseire (H) blant de 12 kampene på tippekupongen.

- Hvor mange ulike utvalg på 5 kamper kan velges ut blant 12 kamper?
- Vi har fylt ut 5 kamper som vi tror ender med hjemmeseier. På hvor mange måter kan vi fylle ut de 7 resterende kampene når hver av dem skal fylles ut med enten uavgjort (U) eller borteseier (B)?
- Hvor stor er sannsynligheten for at en tilfeldig utfylt tipperekke skal inneholde nøyaktig 5 hjemmeseire?

Oppgave 4

Posisjonsvektoren til en partikkel er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [t^3 + 3, t + 1] \quad \text{det vil si} \quad \begin{cases} x = t^3 + 3 \\ y = t + 1 \end{cases}$$

- Tegn grafen til \vec{r} når $t \in [-2, 2]$.
- Bestem fartsvektoren $\vec{v}(t)$ og akselerasjonsvektoren $\vec{a}(t)$. Marker $\vec{v}(1)$ og $\vec{a}(1)$ på kurven til \vec{r} .
- Finn ved regning det punktet på kurven der $\vec{v}(t)$ er parallel med y -aksen.

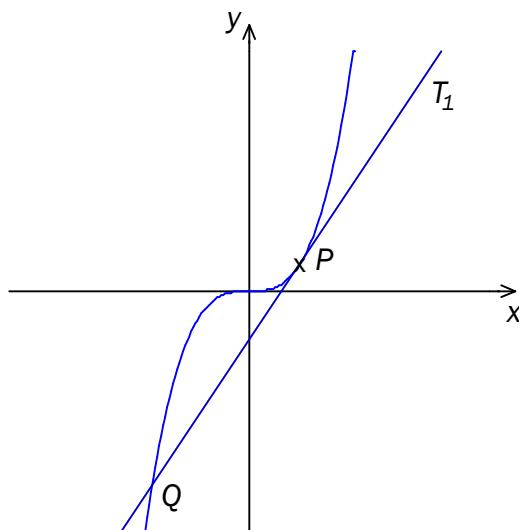
Oppgave 5

Du skal svare på enten alternativ I eller alternativ II.
De to alternativene teller like mye ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen din inneholder deler av begge alternativene,
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

På figuren ser du en skisse av grafen til funksjonen $f(x) = x^3$ og tangenten T_1 til grafen i punktet $P(1, 1)$. På skissen har aksene ulik målestokk.



- a) Vis ved regning at likningen til tangenten T_1 er

$$y = 3x - 2$$

Punktet Q på figuren er et annet fellespunkt mellom grafen til f og T_1 .

- b) Forklar at førstekoordinaten til Q må være en løsning av likningen

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

Bruk polynomdivisjon og løs denne likningen ved regning. Finn koordinatene til Q .

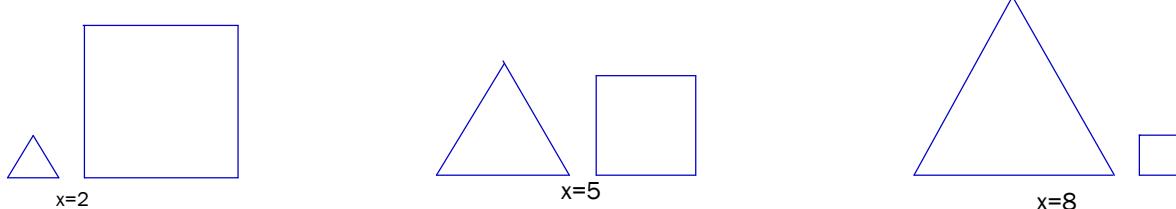
En annen tangent T_2 til grafen er parallel med tangenten T_1 .

- c) Finn tangeringspunktet R mellom grafen til f og T_2 ved regning.

Alternativ II

En ledning er 10 meter lang. Ledningen skal kuttes i to deler. Den ene delen skal formes til sidene i et kvadrat. Den andre delen skal formes til sidene i en likesidet trekant.

Den delen som brukes til å forme trekanten, er x meter lang.



- a) Forklar at arealet av kvadratet målt i kvadratmeter kan skrives som

$$F_1(x) = \frac{1}{16}(10-x)^2$$

- b) Forklar at arealet av den likesidete trekanten målt i kvadratmeter kan skrives som

$$F_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot x^2$$

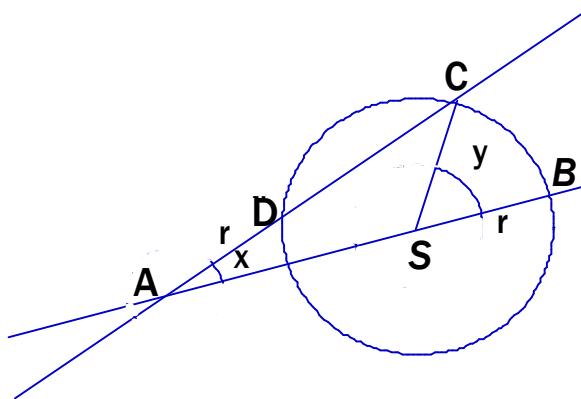
- c) Undersøk hvordan ledningen må kuttes for at summen

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

skal få sin minste verdi.

Oppgave 6

Du skal studere en sirkel med sentrum i S og radius r .



På figuren over setter vi $x = \angle SAD$ og $y = \angle BSC$. Du skal vise at det er en sammenheng mellom x og y når $AD = r$.

- Forklar at $\angle ASD = x$.
- Vis at $\angle SDC = \angle SCD = 2x$.
- Vis at $y = 3x$.

Oppgave 7

Vi vil undersøke om tallet $(4^n - 1)$ er delelig med 3 når n er et naturlig tall.

- Kontroller at $(4^n - 1)$ er delelig med 3 når $n = 1, n = 2, n = 3$ og $n = 4$.
- Vis at $(4^n - 1) = (2^n - 1) \cdot (2^n + 1)$.
- Forklar at $(2^n - 1), 2^n$ og $(2^n + 1)$ er tre hele tall som ligger etter hverandre på tallinjen.
Forklar at ett av disse tallene er delelig med 3. Hvilket av tallene kan ikke være delelig med 3?
- Bruk b) og c) over til å bevise at $(4^n - 1)$ er delelig med 3 for alle naturlige tall n .

(Blank side)

(Blank side)

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no