



Utdanningsdirektoratet

Eksamensoppgaver

31.05.2011

REA3022 Matematikk R1

Nynorsk

Eksamensinformasjon

Eksamensstid:	5 timer: Del 1 skal leverast inn etter 2 timer. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timer.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillåt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgåvene i Del 1 og Del 2. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du <ul style="list-style-type: none">– viser rekneferdigheiter og matematisk forståing– gjennomfører logiske resonnement– ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar– kan bruke formålstenlege hjelpemiddel– vurderer om svar er rimelege– forklarer framgangsmåtar og grunngir svar– skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar

DEL 1

Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (18 poeng)

- a) Vis at den deriverte til funksjonen $O(x) = \frac{500}{x} + 8x^2$ er

$$O'(x) = \frac{-500 + 16x^3}{x^2}$$

- b) Deriver funksjonane

1) $f(x) = 3\ln(2x)$

2) $g(x) = 3x \cdot e^{x^2}$

- c) Vi har gitt polynomfunksjonen $f(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$

1) Vis at $f(1) = 0$. Bruk polynomdivisjon til å faktorisere $f(x)$ i førstegradsfaktorar.

2) Løys ulikskapen $f(x) \leq 0$

- d) Mengda av lava som sprutar ut per time ved eit vulkanutbrot, kan tilnærma beskrivast ved eit funksjonsuttrykk $f(t)$. Funksjonsverdiane er målte i tonn, og t er talet på timer etter byrjinga av utbrotet.

Du får vite at: $f(0) = 300$, $f'(10) = 0$ og $f''(10) = -10$

Kva kan du seie om vulkanutbrotet på grunnlag av desse opplysningane?

- e) Skriv så enkelt som mogleg

$$\lg(a^2 \cdot b) + \lg(a \cdot b^2) + \lg\left(\frac{a}{b^3}\right)$$

f) Skriv så enkelt som mogleg

$$\frac{2x+10}{x^2-25} + \frac{x}{x+5} - \frac{2}{x-5}$$

g) Ei linje l har parameterframstillinga

$$l: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$$

Eit punkt $P(4, 1)$ ligg utanfor linja.

Rekne ut avstanden frå P til linja l .

h) Eit linjestykke AB har lengd 10 cm. Konstruer ein ΔABC der $\angle C = 90^\circ$ og $AC = 7$ cm

Oppgåve 2 (6 poeng)

I ein ΔABC er $\angle A = 90^\circ$. Ein sirkel med sentrum i S er skriven inn i trekanten. Sidene AC og BC tangerer sirkelen i punkta D og E . Linja gjennom B og S skjer DE i F .

Sjå skissa til høgre.

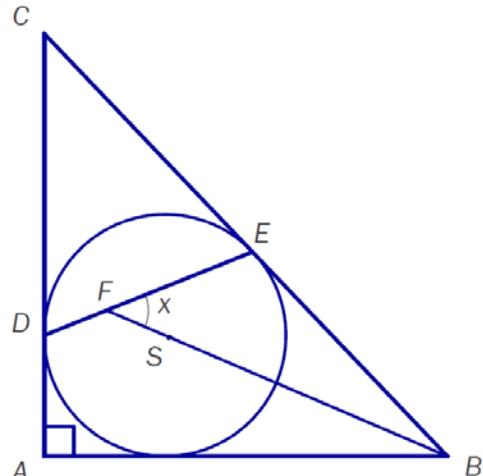
Du får oppgitt at $DC = EC$.

Vi set $\angle ABC = v$, $\angle BCA = u$ og $\angle BFE = x$

a) Forklar at $u+v=90^\circ$ og at $\angle DEC = 90^\circ - \frac{u}{2}$

b) Forklar at $\angle FBE = \frac{v}{2}$ og at $\angle BEF = 90^\circ + \frac{u}{2}$

c) Vis at $x = 45^\circ$

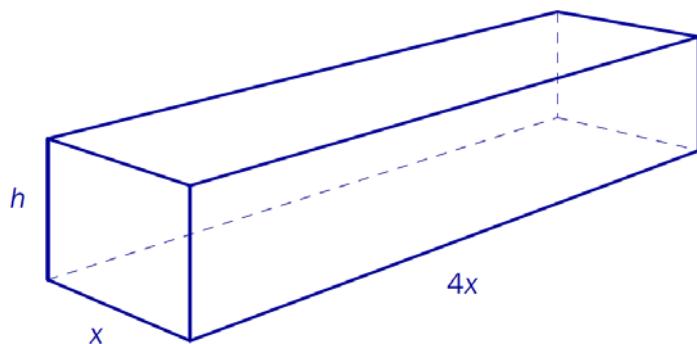


DEL 2

Med hjelpemiddel

Oppgåve 3 (7 poeng)

Vi har eit rett prisme der lengda av grunnflata er fire gonger så stor som breidda. Volumet er 200 cm^3 . Vi set breidda lik $x \text{ cm}$. Sjå skissa.



a) Vis at $h = \frac{50}{x^2}$

b) Vis at overflata O av prismet kan skrivast

$$O(x) = \frac{500}{x} + 8x^2$$

c) I oppgåve 1 a) i Del 1 viste du at $O'(x) = \frac{-500 + 16x^3}{x^2}$.

Bruk den deriverte til å finne den minste overflata O som prismet kan ha.

Kva er lengda, breidda og høgda no?

Vi har eit anna rett prisme der lengda av grunnflata er *tre* gonger så stor som breidda. Volumet er 200 cm^3 .

d) Finn den minste overflata som dette prismet kan ha.

Oppgåve 4 (4 poeng)

På ein skole er det 350 elevar. 150 av dei er gutter. Ei undersøking viser at 100 gutter og 180 jenter har med seg matpakke kvar dag.

Ein elev blir trekt ut tilfeldig. La A og B vere dei to hendingane

A : Eleven er ein gutt.

B : Eleven har med seg matpakke kvar dag.

a) Forklar med ord kva vi meiner med $P(A \cap B)$. Finn dette sannsynet.

b) Finn sannsyna $P(B)$ og $P(B|A)$.

Er dei to hendingane A og B uavhengige?

Oppgåve 5 (9 poeng)

Punktene $A(2, -1)$ og $B(5, 3)$ er gitt.

a) Finn \overrightarrow{AB} og rekne ut $|\overrightarrow{AB}|$.

Vektoren $\overrightarrow{AC} = [-1, 2]$ er gitt.

b) Bestem koordinatane til punktet C .

c) Rekne ut $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ og kommenter svaret.

Ei rett linje l går gjennom punktet $P(3, -4)$ og er parallel med \overrightarrow{AC} .

d) Finn ei parameterframstilling for linja l .

e) Finn koordinatane til punktet der l skjer y -aksen.

Punktet $Q(8, 6)$ er gitt. Ein vektor \overrightarrow{QR} har lengda 10, og R er eit punkt på linja l .

f) Bestem koordinatane til R .

Oppgåve 6 (2 poeng)

Du får oppgitt at ein funksjon f er definert for $x \in \langle 0, 10 \rangle$. Funksjonen er kontinuerleg, men ikkje deriverbar i $x = 2$, og ikkje kontinuerleg i $x = 5$. Teikne ei skisse som viser korleis grafen til f kan sjå ut.

Oppgåve 7 (6 poeng)

I denne oppgåva skal vi undersøkje påstanden:

Alle primtal som er større enn 2, kan skrivast som differansen mellom to kvadrattal.

- a) Skriv av og fyll ut tabellen

Primtal	Naturlege tal	Kvadrattal	Differanse
p	n_1	n_2	$n_1^2 - n_2^2$
3	2	1	$2^2 - 1^2$
5	3	2	$3^2 - 2^2$
7	4	3	$4^2 - 3^2$
11	6	5	$6^2 - 5^2$
13			
17			
19			

I tabellen er p primtal, og n_1 og n_2 er naturlege tal, slik at:

$$n_1 + n_2 = p$$

$$n_1 - n_2 = 1$$

b) Vis at vi kan skrive: $n_1 = \frac{p+1}{2}$ og $n_2 = \frac{p-1}{2}$

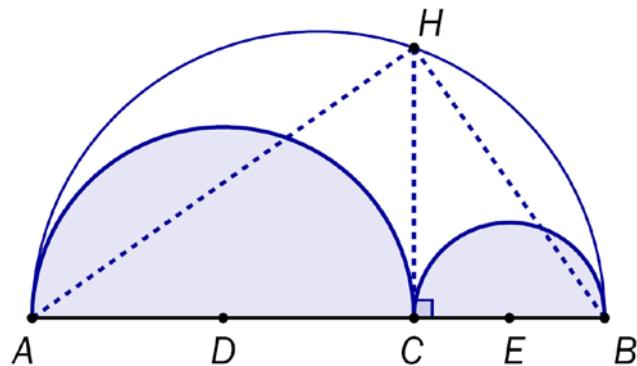
- c) Bevis at påstanden i ruta ovanfor er riktig.

Oppgåve 8 (8 poeng)

Matematikaren Arkimedes (ca. 287–212 f.Kr.) studerte figuren du ser nedanfor. Det kvite området på figuren kallar vi *skomakarkniven*.

Området er avgrensa av ein ytre halvsirkel og to indre halvsirklar. Dei to indre halvsirklane, som er fargelagde på figuren, har sentrum i D og E .

Dei indre halvsirklane har radius R og r . Punkta D , C og E ligg på linjestykket AB .



- a) Vis at lengda av sirkelbogen AB er lik summen av lengdene av dei to sirkelbogane AC og CB .

På figuren er $CH \perp AB$.

- b) Forklar at $\triangle ACH$ er formlik med $\triangle HCB$.
- c) Bruk dette til å vise at $CH = 2\sqrt{R \cdot r}$
- d) Vis at arealet av ein sirkel med diameter CH er lik arealet av *skomakarkniven*.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpebidrifter på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpebidrifter på Del 2:	Alle hjelpebidrifter er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veilegende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du <ul style="list-style-type: none">– viser regneferdigheter og matematisk forståelse– gjennomfører logiske resonnementer– ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner– kan bruke hensiktsmessige hjelpebidrifter– vurderer om svar er rimelige– forklarer framgangsmåter og begrunner svar– skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

DEL 1

Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (18 poeng)

- a) Vis at den deriverte til funksjonen $O(x) = \frac{500}{x} + 8x^2$ er

$$O'(x) = \frac{-500 + 16x^3}{x^2}$$

- b) Deriver funksjonene

1) $f(x) = 3\ln(2x)$

2) $g(x) = 3x \cdot e^{x^2}$

- c) Vi har gitt polynomfunksjonen $f(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$

1) Vis at $f(1) = 0$. Bruk polynomdivisjon til å faktorisere $f(x)$ i førstegradsfaktorer.

2) Løs ulikheten $f(x) \leq 0$

- d) Mengden av lava som spruter ut per time ved et vulkanutbrudd, kan tilnærmet beskrives ved et funksjonsuttrykk $f(t)$. Funksjonsverdiene er målt i tonn, og t er antall timer etter begynnelsen av utbruddet.

Du får vite at: $f(0) = 300$, $f'(10) = 0$ og $f''(10) = -10$

Hva kan du si om vulkanutbruddet på grunnlag av disse opplysningene?

- e) Skriv så enkelt som mulig

$$\lg(a^2 \cdot b) + \lg(a \cdot b^2) + \lg\left(\frac{a}{b^3}\right)$$

f) Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{2x+10}{x^2-25} + \frac{x}{x+5} - \frac{2}{x-5}$$

g) En linje l har parameterframstillingen

$$l: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$$

Et punkt $P(4, 1)$ ligger utenfor linjen.

Regn ut avstanden fra P til linjen l .

h) Et linjestykke AB har lengde 10 cm. Konstruer en $\triangle ABC$ der $\angle C = 90^\circ$ og $AC = 7$ cm

Oppgave 2 (6 poeng)

I en $\triangle ABC$ er $\angle A = 90^\circ$. En sirkel med sentrum i S er innskrevet i trekanten. Sidene AC og BC tangerer sirkelen i punktene D og E . Linjen gjennom B og S skjærer DE i F .

Se skissen til høyre.

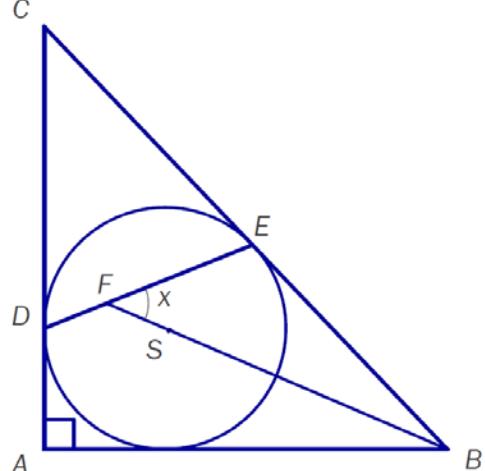
Du får oppgitt at $DC = EC$.

Vi setter $\angle ABC = v$, $\angle BCA = u$ og $\angle BFE = x$

a) Forklar at $u + v = 90^\circ$ og at $\angle DEC = 90^\circ - \frac{u}{2}$

b) Forklar at $\angle FBE = \frac{v}{2}$ og at $\angle BEF = 90^\circ + \frac{u}{2}$

c) Vis at $x = 45^\circ$

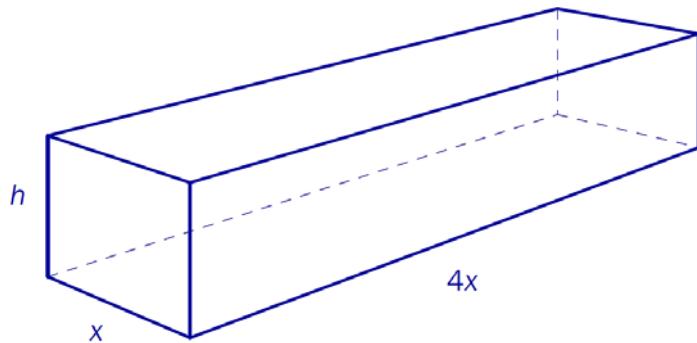


DEL 2

Med hjelpemidler

Oppgave 3 (7 poeng)

Vi har et rett prisme der lengden av grunnflaten er fire ganger så stor som bredden. Volumet er 200 cm^3 . Vi setter bredden lik $x \text{ cm}$. Se skissen.



a) Vis at $h = \frac{50}{x^2}$

b) Vis at overflatene O av prismet kan skrives

$$O(x) = \frac{500}{x} + 8x^2$$

c) I oppgave 1 a) i Del 1 viste du at $O'(x) = \frac{-500 + 16x^3}{x^2}$.

Bruk den deriverte til å finne den minste overflatene O som prismet kan ha.

Hva er lengden, bredden og høyden nå?

Vi har et annet rett prisme der lengden av grunnflaten er *tre* ganger så stor som bredden. Volumet er 200 cm^3 .

d) Finn den minste overflatene som dette prismet kan ha.

Oppgave 4 (4 poeng)

På en skole er det 350 elever. 150 av disse er gutter. En undersøkelse viser at 100 gutter og 180 jenter har med seg matpakke hver dag.

Én elev trekkes ut tilfeldig. La A og B være de to hendelsene

- A: Eleven er en gutt.
B: Eleven har med matpakke hver dag.

- a) Forklar med ord hva vi mener med $P(A \cap B)$. Finn denne sannsynligheten.
b) Finn sannsynlighetene $P(B)$ og $P(B|A)$.

Er de to hendelsene A og B uavhengige?

Oppgave 5 (9 poeng)

Punktene $A(2, -1)$ og $B(5, 3)$ er gitt.

- a) Finn \overrightarrow{AB} og regn ut $|\overrightarrow{AB}|$.

Vektoren $\overrightarrow{AC} = [-1, 2]$ er gitt.

- b) Bestem koordinatene til punktet C .
c) Regn ut $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ og kommenter svaret.

En rett linje l går gjennom punktet $P(3, -4)$ og er parallel med \overrightarrow{AC} .

- d) Finn en parameterframstilling for linjen l .
e) Finn koordinatene til punktet der l skjærer y -aksen.

Punktet $Q(8, 6)$ er gitt. En vektor \overrightarrow{QR} har lengden 10, og R er et punkt på linjen l .

- f) Bestem koordinatene til R .

Oppgave 6 (2 poeng)

Du får oppgitt at en funksjon f er definert for $x \in \langle 0, 10 \rangle$. Funksjonen er kontinuerlig, men ikke deriverbar i $x = 2$, og ikke kontinuerlig i $x = 5$. Tegn en skisse som viser hvordan grafen til f kan se ut.

Oppgave 7 (6 poeng)

I denne oppgaven skal vi undersøke påstanden:

Alle primtall som er større enn 2, kan skrives som differansen mellom to kvadrattall.

a) Skriv av og fyll ut tabellen

Primtall	Naturlige tall		Kvadrattall		Differanse
p	n_1	n_2	n_1^2	n_2^2	$n_1^2 - n_2^2$
3	2	1	2^2	1^2	3
5	3	2	3^2	2^2	5
7	4	3	4^2	3^2	7
11	6	5	6^2	5^2	11
13					
17					
19					

I tabellen er p primtall, og n_1 og n_2 er naturlige tall, slik at:

$$n_1 + n_2 = p$$

$$n_1 - n_2 = 1$$

b) Vis at vi kan skrive: $n_1 = \frac{p+1}{2}$ og $n_2 = \frac{p-1}{2}$

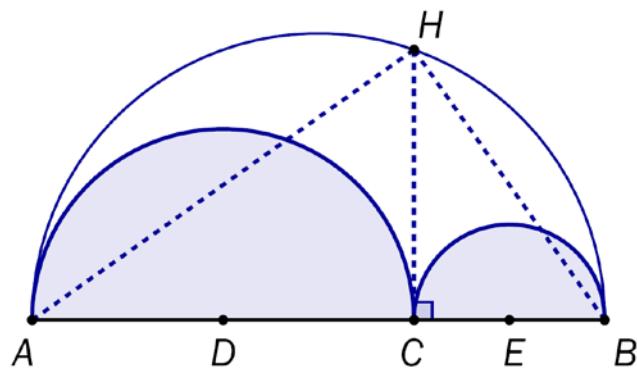
c) Bevis at påstanden i ruten ovenfor er riktig.

Oppgave 8 (8 poeng)

Matematikeren Arkimedes (ca. 287–212 f.Kr.) studerte figuren du ser nedenfor. Det hvite området på figuren kalles *skomakerkniven*.

Området er avgrenset av en ytre halvsirkel og to indre halvsirkler. De to indre halvsirklene, som er fargelagt på figuren, har sentrum i D og E .

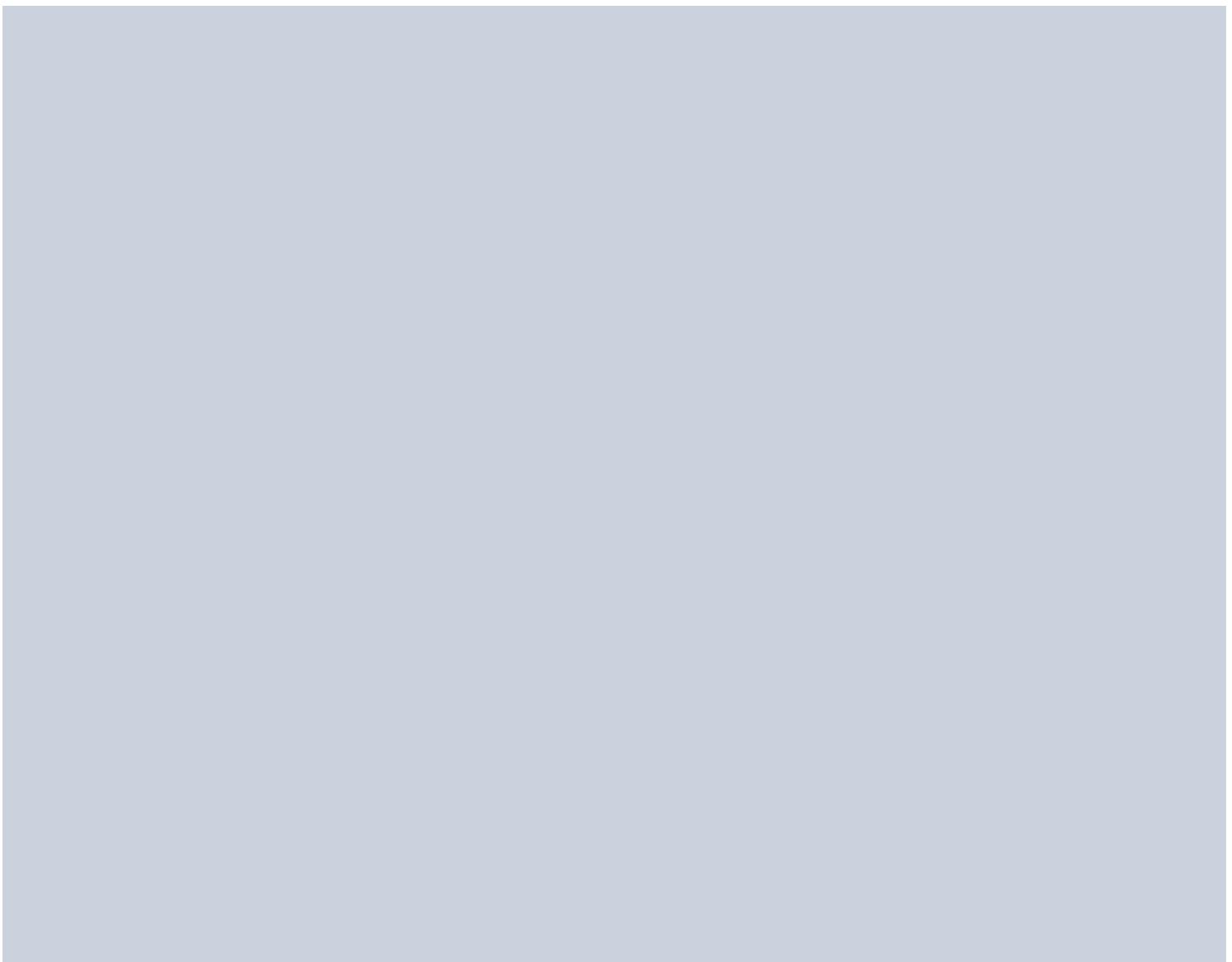
De indre halvsirklene har radius R og r . Punktene D , C og E ligger på linjestykket AB .



- a) Vis at lengden av sirkelbuen AB er lik summen av lengdene av de to sirkelbuene AC og CB .

På figuren er $CH \perp AB$.

- b) Forklar at $\triangle ACH$ er formlik med $\triangle HCB$.
- c) Bruk dette til å vise at $CH = 2\sqrt{R \cdot r}$
- d) Vis at arealet av en sirkel med diameter CH er lik arealet av *skomakerkniven*.



Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no