Utdanningsdirektoratet

Eksamen

19.05.2014

REA3024 Matematikk R2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

<table>
<tr><th colspan="2">Eksamensinformasjon</th></tr>
<tr><td>Eksamenstid:</td><td>5 timar:
Del 1 skal leverast inn etter 2 timar.
Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.</td></tr>
<tr><td>Hjelpemiddel på Del 1:</td><td>Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar</td></tr>
<tr><td>Hjelpemiddel på Del 2:</td><td>Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.</td></tr>
<tr><td>Framgangsmåte:</td><td>Du skal svare på alle oppgåvene i Del 1 og Del 2.

Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte.

Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.</td></tr>
<tr><td>Rettleiing om vurderinga:</td><td>Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du

– viser rekneferdigheiter og matematisk forståing
– gjennomfører logiske resonnement
– ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar
– kan bruke formålstenlege hjelpemiddel
– vurderer om svar er rimelege
– forklarer framgangsmåtar og grunngir svar
– skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar</td></tr>
<tr><td>Andre opplysningar:</td><td>Kjelder for bilete, teikningar osv.
• Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet
• CSI, sodahead.com (28.02.2014)</td></tr>
</table>

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (3 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = \sin(3x)$

b) $g(x) = e^{2x} \cdot \cos x$

Oppgåve 2 (4 poeng)

Rekn ut integrala

a) $\int 2x \cdot \sin(x^2)\ dx$

b) $\int_1^e x \cdot \ln x\ dx$

Oppgåve 3 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = e^{2x} - 4e^x \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

Bestem koordinatane til eventuelle vendepunkt på grafen til f.

Oppgåve 4 (4 poeng)

Ei uendeleg geometrisk rekkje er gitt ved

$$s(x) = 1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \ldots$$

a) Bestem konvergensområdet til rekkja.

b) Løys likningane

$$s(x) = 3 \text{ og } s(x) = \frac{1}{3}$$

Oppgåve 5 (5 poeng)

Planet α er gitt ved

$$\alpha:\ 2x + y - 2z + 3 = 0$$

a) Vis at punktet $P(3, 4, 2)$ *ikkje* ligg i planet α.

Ei linje ℓ går gjennom P slik at $\ell \perp \alpha$.

b) Bestem ei parameterframstilling for ℓ.

c) Bestem koordinatane til skjeringspunktet mellom ℓ og α.

d) Bestem avstanden frå P til α.

Oppgåve 6 (4 poeng)

Ein funksjon f er gitt ved

$$f(x) = a\sin(cx + \varphi) + d$$

Grafen til funksjonen har eit toppunkt i $(0, 7)$. Det nærmaste botnpunktet til høgre for dette toppunktet er $(2, 3)$.

a) Forklar at funksjonsuttrykket kan skrivast

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) + 5$$

b) Lag ei skisse av grafen til f for $x \in [0,\ 12]$.

Oppgåve 7 (2 poeng)

Løys differensiallikninga

$$y' - 3y = 2 \qquad \text{når} \quad y(0) = \frac{1}{3}$$

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (6 poeng)

Punkta $A(4,3,1)$, $B(2,2,0)$ og $C(1,2,-2)$ er gitt.

Ei setning i geometrien seier:

> Eit plan er eintydig bestemt av tre punkt dersom desse punkta ikkje ligg på ei rett linje.

a) Bruk denne setninga til å vise at punkta A, B og C bestemmer eit plan α eintydig.

b) Bestem ei likning til planet α.

Eit punkt T har koordinatane $(2,5,4t+1)$.

c) Bestem t slik at volumet av pyramiden $ABCT$ blir 3.

Oppgåve 2 (5 poeng)

Ei kuleflate er gitt ved likninga

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+2=0$$

a) Vis at punktet $P(2,3,5)$ ligg på kuleflata.

b) Bestem sentrum og radius til kula.

c) Bestem likninga til planet som tangerer kuleflata i punktet P.

Oppgåve 3 (7 poeng)

I ein kriminalserie på TV blei eit drapsoffer funne kl. 11.00. Kroppstemperaturen blei da målt til $30\ ^\circ\text{C}$. Rommet der den drepne blei funnen, hadde hatt ein konstant temperatur på $22\ ^\circ\text{C}$ sidan mordet skjedde.

Vi lèt kroppstemperaturen vere $y(t)$ grader Celsius t timar etter at den døde blei funnen.

a) Ifølgje Newtons avkjølingslov er temperaturendringa per time proporsjonal med differansen mellom kroppstemperaturen og romtemperaturen. Forklar at dette gir differensiallikninga

$$y' = -k(y - 22) \quad \text{der} \quad k > 0$$

b) Forklar at $y(0) = 30$, og løys differensiallikninga ved rekning.

c) Ein time etter at den døde blei funnen, blei kroppstemperaturen målt til $28\ ^\circ\text{C}$. Bruk dette til å bestemme konstanten k.

Vi går ut frå at drapsofferet hadde ein kroppstemperatur på $37\ ^\circ\text{C}$ like etter at døden inntrefte.

d) Bruk $y(t)$ til å anslå når drapet blei utført.

Oppgåve 4 (7 poeng)

Ei uendeleg rekkje er gitt ved

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

a) Vis at $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \dfrac{1}{1-x}$, når $x \in \langle -1, 1 \rangle$

Det kan visast at

$$(1)' + (x)' + (x^2)' + (x^3)' + \ldots = \left(\frac{1}{1-x}\right)', \quad \text{når} \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

b) Vis at

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{når} \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

c) Bruk resultatet i oppgåve b) til å vise at

$$1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \ldots = 4$$

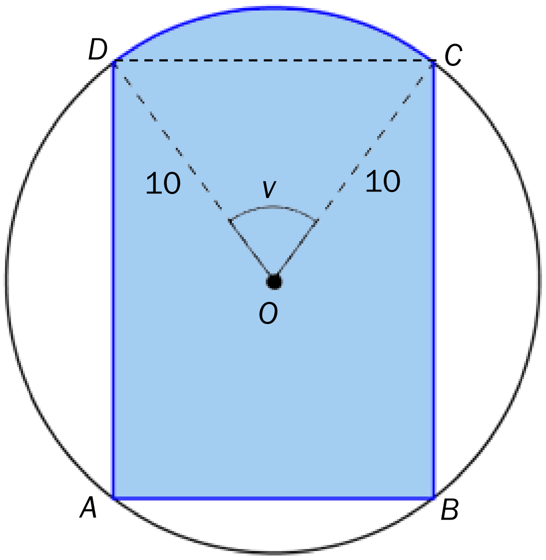
d) Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n): \quad 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^{n-1}} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

e) Bruk det du har funne ovanfor til å bestemme $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n+2}{2^{n-1}}$

Oppgåve 5 (5 poeng)

Eit rektangel $ABCD$ er skrive inn i ein sirkel. Sirkelen har sentrum i O og radius 10.
Vi set $\angle COD = v$, der $0 < v < \pi$. Sjå figuren nedanfor.



a) Vis ved rekning at arealet F av sirkelsektoren COD er

$$F(v) = 50v$$

b) Vis ved rekning at arealet T av det fargelagde området på figuren kan skrivast som

$$T(v) = 50(v + 3\sin v)$$

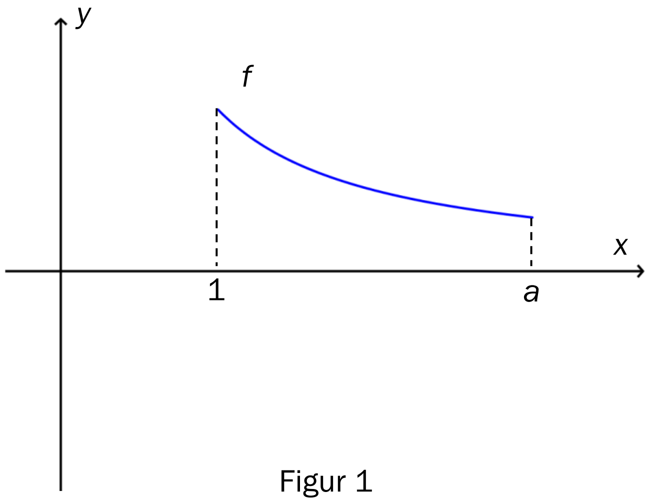
c) Bestem v grafisk slik at T blir størst mogleg. Bestem T_{maks}.

Oppgåve 6 (6 poeng)

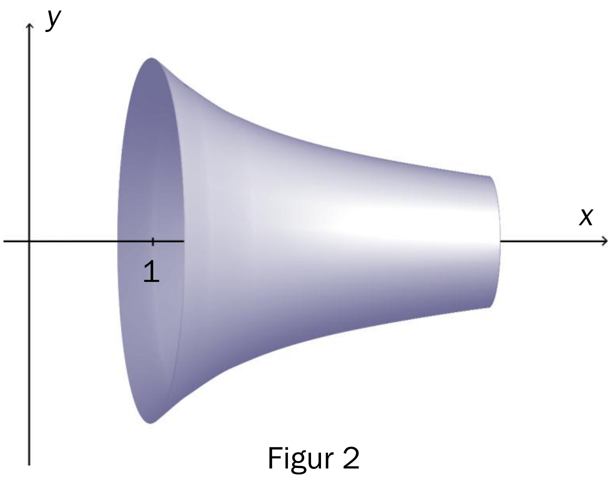
Figur 1 nedanfor viser grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{x}\ , \qquad x \in [1\ ,\ a]$$

Vi dreier grafen til f 360° om x-aksen. Vi får da fram ein omdreiingslekam som vist på figur 2.



Figur 1



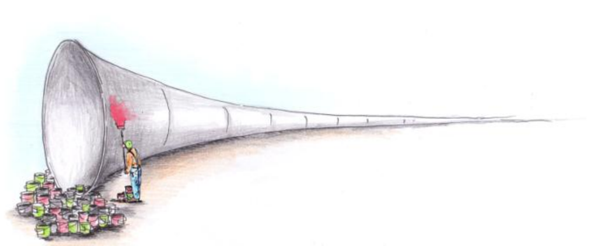
Figur 2

a) Bestem volumet $V(a)$ av omdreiingslekamen.

b) Bestem $\int_1^a f(x)\,dx$. Omdreiingslekamen har overflateareal $O(a)$. Forklar at $O(a) > \int_1^a f(x)\,dx$.

c) Vi lèt $a \to \infty$. Den omdreiingslekamen vi da får, kallar vi *Gabriels horn*.

Bestem $\lim\limits_{a\to\infty} O(a)$ og $\lim\limits_{a\to\infty} V(a)$ dersom grenseverdiane eksisterer. Kommenter svara.


Å male Gabriels horn ...


Å fylle Gabriels horn ...

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv. • Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet • CSI, sodahead.com (28.02.2014)

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = \sin(3x)$

b) $g(x) = e^{2x} \cdot \cos x$

Oppgave 2 (4 poeng)

Regn ut integralene

a) $\int 2x \cdot \sin(x^2)\ dx$

b) $\int_1^e x \cdot \ln x\ dx$

Oppgave 3 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = e^{2x} - 4e^x \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

Bestem koordinatene til eventuelle vendepunkter på grafen til f.

Oppgave 4 (4 poeng)

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$s(x) = 1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \ldots$$

a) Bestem konvergensområdet til rekken.

b) Løs likningene

$$s(x) = 3 \text{ og } s(x) = \frac{1}{3}$$

Oppgave 5 (5 poeng)

Planet α er gitt ved

$$\alpha: \; 2x + y - 2z + 3 = 0$$

a) Vis at punktet $P(3, 4, 2)$ *ikke* ligger i planet α.

En linje ℓ går gjennom P slik at $\ell \perp \alpha$.

b) Bestem en parameterframstilling for ℓ.

c) Bestem koordinatene til skjæringspunktet mellom ℓ og α.

d) Bestem avstanden fra P til α.

Oppgave 6 (4 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = a\sin(cx + \varphi) + d$$

Grafen til funksjonen har et toppunkt i $(0, 7)$. Det nærmeste bunnpunktet til høyre for dette toppunktet er $(2, 3)$.

a) Forklar at funksjonsuttrykket kan skrives

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) + 5$$

b) Lag en skisse av grafen til f for $x \in [0, 12]$.

Oppgave 7 (2 poeng)

Løs differensiallikningen

$$y' - 3y = 2 \qquad \text{når} \quad y(0) = \frac{1}{3}$$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Punktene $A(4, 3, 1)$, $B(2, 2, 0)$ og $C(1, 2, -2)$ er gitt.

En setning i geometrien sier:

> Et plan er entydig bestemt av tre punkter dersom disse punktene ikke ligger på en rett linje.

a) Bruk denne setningen til å vise at punktene A, B og C bestemmer et plan α entydig.

b) Bestem en likning til planet α.

Et punkt T har koordinatene $(2, 5, 4t+1)$.

c) Bestem t slik at volumet av pyramiden $ABCT$ blir 3.

Oppgave 2 (5 poeng)

En kuleflate er gitt ved likningen

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + 2 = 0$$

a) Vis at punktet $P(2, 3, 5)$ ligger på kuleflaten.

b) Bestem sentrum og radius til kulen.

c) Bestem likningen til planet som tangerer kuleflaten i punktet P.

Oppgave 3 (7 poeng)

I en kriminalserie på TV ble et drapsoffer funnet kl. 11.00. Kroppstemperaturen ble da målt til $30\ ^\circ\mathrm{C}$. Rommet der den drepte ble funnet, hadde hatt en konstant temperatur på $22\ ^\circ\mathrm{C}$ siden mordet skjedde.

Vi lar kroppstemperaturen være $y(t)$ grader Celsius t timer etter at den døde ble funnet.

a) Ifølge Newtons avkjølingslov er temperaturendringen per time proporsjonal med differansen mellom kroppstemperaturen og romtemperaturen. Forklar at dette gir differensiallikningen

$$y' = -k(y - 22) \quad \text{der} \quad k > 0$$

b) Forklar at $y(0) = 30$, og løs differensiallikningen ved regning.

c) En time etter at den døde ble funnet, ble kroppstemperaturen målt til $28\ ^\circ\mathrm{C}$. Bruk dette til å bestemme konstanten k.

Vi antar at drapsofferet hadde en kroppstemperatur på $37\ ^\circ\mathrm{C}$ like etter at døden inntraff.

d) Bruk $y(t)$ til å anslå når drapet ble utført.

Oppgave 4 (7 poeng)

En uendelig rekke er gitt ved

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

a) Vis at $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \dfrac{1}{1-x}$, når $x \in \langle -1, 1 \rangle$

Det kan vises at

$$(1)' + (x)' + (x^2)' + (x^3)' + \dots = \left(\frac{1}{1-x}\right)', \quad \text{når} \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

b) Vis at

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{når} \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

c) Bruk resultatet i oppgave b) til å vise at

$$1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots = 4$$

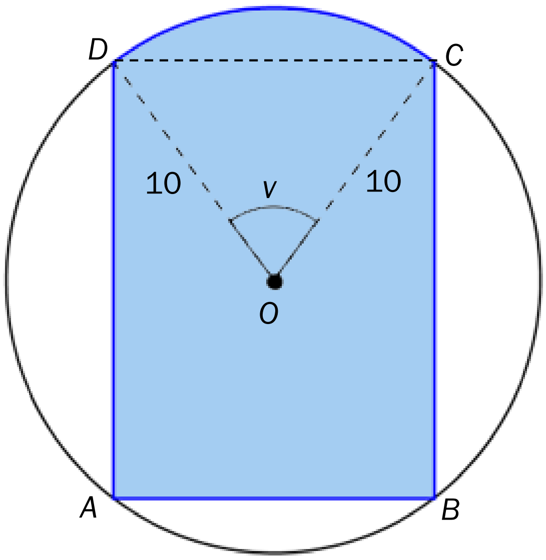
d) Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n): \quad 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} \qquad , \quad n \in \mathbb{N}$$

e) Bruk det du har funnet ovenfor til å bestemme $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n+2}{2^{n-1}}$

Oppgave 5 (5 poeng)

Et rektangel $ABCD$ er innskrevet i en sirkel. Sirkelen har sentrum i O og radius 10.
Vi setter $\angle COD = v$, der $0 < v < \pi$. Se figuren nedenfor.



a) Vis ved regning at arealet F av sirkelsektoren COD er

$$F(v) = 50v$$

b) Vis ved regning at arealet T av det fargelagte området på figuren kan skrives som

$$T(v) = 50(v + 3\sin v)$$

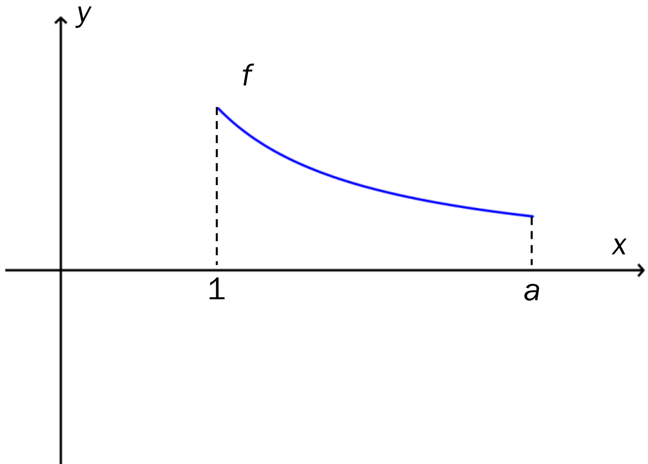
c) Bestem v grafisk slik at T blir størst mulig. Bestem T_{maks}.

Oppgave 6 (6 poeng)

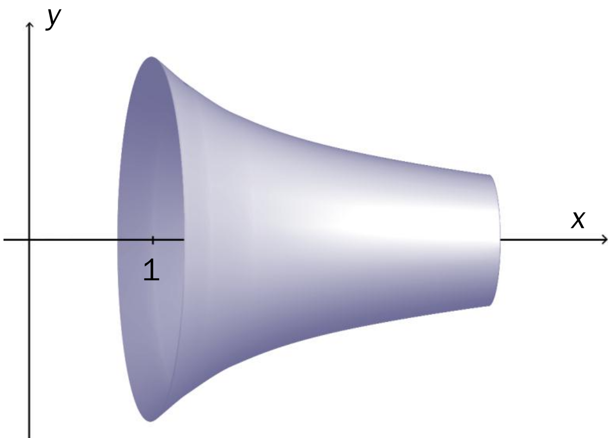
Figur 1 nedenfor viser grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad x \in [1\,,\, a]$$

Vi dreier grafen til f 360° om x-aksen. Vi får da fram et omdreiningslegeme som vist på figur 2.



Figur 1



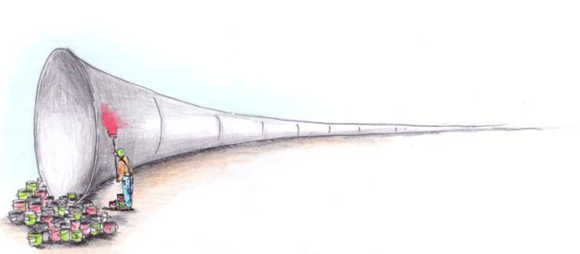
Figur 2

a) Bestem volumet $V(a)$ av omdreiningslegemet.

b) Bestem $\int_1^a f(x)\,dx$. Omdreiningslegemet har overflateareal $O(a)$. Forklar at $O(a) > \int_1^a f(x)\,dx$.

c) Vi lar $a \to \infty$. Det omdreiningslegemet vi da får, kalles *Gabriels horn*.

Bestem $\lim_{a\to\infty} O(a)$ og $\lim_{a\to\infty} V(a)$ dersom grenseverdiene eksisterer. Kommenter svarene.



Å male Gabriels horn …

Å fylle Gabriels horn …

Blank side.

Blank side.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet