Utdanningsdirektoratet

Eksamen

29.11.2013

REA3028 Matematikk S2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgåvene i Del 1 og Del 2. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar
Andre opplysningar:	Kjelder for bilete, teikningar osv. • Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet • Tabellar: www.ssb.no 11.02.2013

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (4 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

b) $g(x) = 5(x-1)^5$

c) $h(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x-3}$

Oppgåve 2 (5 poeng)

a) Vis at polynomdivisjonen

$$(x^3 + 2x^2 - 21x + 18) : (x - 1)$$

går opp, utan å gjennomføre divisjonen.

b) Skriv så enkelt som mogleg

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 21x + 18}{x^2 - 1}$$

c) Bestem tala a og b slik at divisjonen nedanfor går opp.

$$(x^3 + ax + b) : (x^2 + 2x - 3)$$

Oppgåve 3 (4 poeng)

I ei aritmetisk rekkje er $a_2 = 6$ og $a_5 = 18$.

a) Skriv opp dei fire første ledda i rekkja.

b) Bestem ein formel for a_n.

c) Bestem ein formel for summen $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Oppgåve 4 (4 poeng)

Vi har gitt funksjonen

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+1 \quad , \quad D_f=\mathbb{R}$$

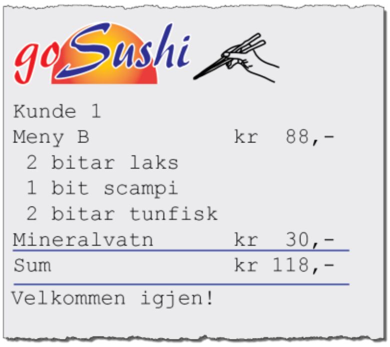
a) Bestem eventuelle topp- eller botnpunkt på grafen til f.

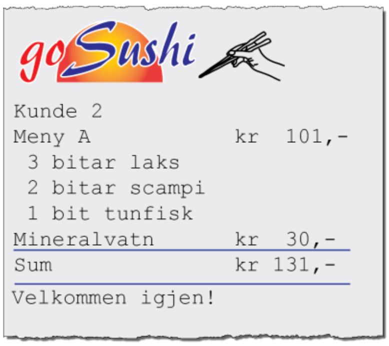
b) Bestem eventuelle vendepunkt på grafen til f.

c) Lag ei skisse av grafen til f.

Oppgåve 5 (3 poeng)

Tre venner åt lunsj på ein sushi-restaurant. Dei valde kvar sin meny, slik kvitteringane nedanfor viser.


goSushi
Kunde 1
Meny B kr 88,-
2 bitar laks
1 bit scampi
2 bitar tunfisk
Mineralvatn kr 30,-
Sum kr 118,-
Velkommen igjen!


goSushi
Kunde 2
Meny A kr 101,-
3 bitar laks
2 bitar scampi
1 bit tunfisk
Mineralvatn kr 30,-
Sum kr 131,-
Velkommen igjen!


goSushi
Kunde 3
Meny C kr 103,-
3 bitar laks
1 bit scampi
2 bitar tunfisk
Mineralvatn kr 30,-
Sum kr 133,-
Velkommen igjen!

Kor mykje hadde éin bit sushi med laks, éin bit med scampi og éin bit med tunfisk kosta dersom dei hadde blitt bestilte kvar for seg?

Oppgåve 6 (4 poeng)

I eit terningspel på eit kasino blir det kasta to terningar. Det kostar i utgangspunktet ikkje noko å delta i spelet. Dersom summen av auga blir 2 eller 12, får spelaren 200 kroner. Blir talet på auge til saman 7, får ho 20 kroner. Men dersom summen blir noko anna enn 2, 12 eller 7, må spelaren betale a kroner til kasinoet.

La X vere utbytet til kasinoet ved ein speleomgang.

a) Forklar at $P(X=-20) = \frac{1}{6}$.

b) Skriv av og fyll ut tabellen nedanfor.

x	a	-20	-200
$P(X=x)$		$\frac{1}{6}$	

c) Kasinoet vil setje a slik at dei i det lange løp tener 5 kroner per spel.

Bestem verdien til a.

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (5 poeng)

Ei bedrift produserer og sel x einingar av ei vare per dag. Det viser seg at kostnadene $K(x)$ og inntektene $I(x)$ per dag er gitt ved

$$K(x) = 0{,}1x^2 - 10x + 2200$$

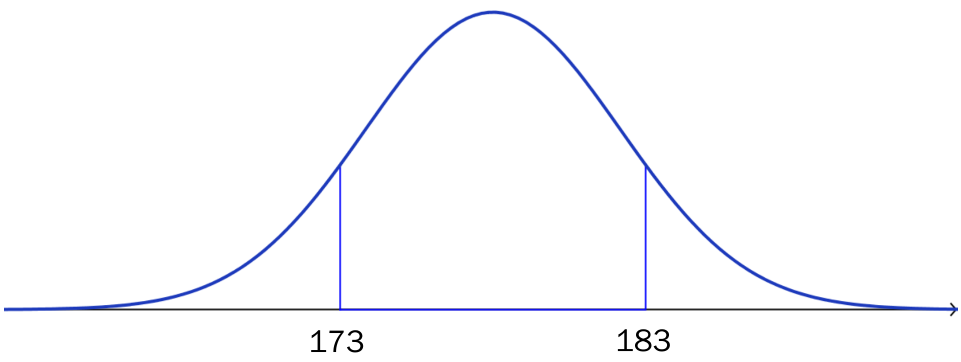
$$I(x) = 2400 \cdot \ln(x+1)$$

a) Bestem $K'(100)$ og $I'(100)$. Kan du ut frå desse tala seie om bedrifta bør produsere fleire eller færre enn 100 einingar per dag?

b) Bestem den produksjonsmengda som gir størst overskot for bedrifta.

Oppgåve 2 (4 poeng)

I ei gruppe elevar er høgda tilnærma normalfordelt, med forventingsverdi μ og standardavvik σ.



I denne fordelinga er 10 % av elevane lågare enn 173 cm og 10 % høgare enn 183 cm.

a) Bestem μ.
Kor mange prosent av elevane er lågare enn 183 cm?

b) Bestem σ.

Oppgåve 3 (6 poeng)

Ifølgje ein modell frå Statistisk sentralbyrå vil forventa levealder til befolkninga i Noreg følgje funksjonen

$$f(x) = \frac{98{,}0}{1+0{,}206 \cdot e^{-0{,}0113x}} \quad , \quad x \in [0, \rightarrow\rangle$$

Her er $f(x)$ forventa levealder for dei som er fødde x år etter 2012.

a) Kva blir forventa levealder for dei som blir fødde i 2020, ifølgje denne modellen?

b) Bestem i kva år nyfødde kan forvente ein levealder på 84 år.

c) Bruk $f'(x)$ til å vise at forventa levealder i Noreg stadig aukar, ifølgje denne modellen.

d) Kva vil forventa levealder i Noreg gå mot i det lange løp, ifølgje modellen?

Oppgåve 4 (4 poeng)

Som vist i tabell 1 nedanfor har salet av CD-ar i Noreg minka dei siste åra.

Tabell 1:

År etter 2002	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Omsetning (mill. kroner)	943	866	876	759	659	620	526	473	352	235

a) I kva år kan vi rekne med at CD-salet er slutt dersom vi går ut frå at utviklinga held fram på same måte?

Omsetninga av nedlasta/streama musikk har derimot auka, som vist i tabell 2 nedanfor.

Tabell 2:

År etter 2006	0	1	2	3	4	5
Omsetning (mill. kroner)	26	42	57	89	143	248

b) Bestem ein eksponentiell modell $f(x)$ som viser omsetninga som funksjon av talet på år etter 2006. Kor stor omsetning kan musikkbransjen rekne med i 2013 dersom utviklinga held fram på denne måten?

Oppgåve 5 (6 poeng)

I starten av eit år vurderer Lise å låne 100 000 kroner for å investere i eit aksjefond. Lånet er eit annuitetslån, og ho må betale 16 274,54 kroner i slutten av kvart år i 10 år for å betale ned heile lånet, første gong eitt år etter låneopptaket.

a) Vis at den årlege renta er på 10 %.

Banken hevdar at dersom aksjane har ein årleg verdiauke på 12 %, vil ho sitje igjen med ei solid forteneste på aksjane.

b) Bestem verdien av aksjane i slutten av det 10. året.

Netto forteneste etter 10 år er differansen mellom verdien av det ho har betalt på lånet, og verdien av aksjane.

Vis at netto forteneste etter 10 år vil vere 51 210,57 kroner.

I staden for å ta opp dette lånet for å kjøpe aksjar vurderer Lise heller å spare. I slutten av kvart år vil ho setje 16 274,54 kroner inn på ein konto med ei fast årleg rente. Det første beløpet set ho inn om eitt år.

c) Kva må sparerenta vere for at ho skal ha like mykje pengar i banken om 10 år som verdien av aksjane i oppgåve b)?

Oppgåve 6 (5 poeng)

I ein stor kommune fekk eit politisk parti ei oppslutning på 6,0 % ved valet for to år sidan. I ei fersk meiningsmåling i kommunen blei 100 tilfeldig valde personar spurde om kva parti dei ville ha stemt på om det var val i dag.

La X vere talet på personar som i dag ville ha stemt på dette partiet blant 100 tilfeldig valde personar. Vi går ut frå at X er binomisk fordelt.

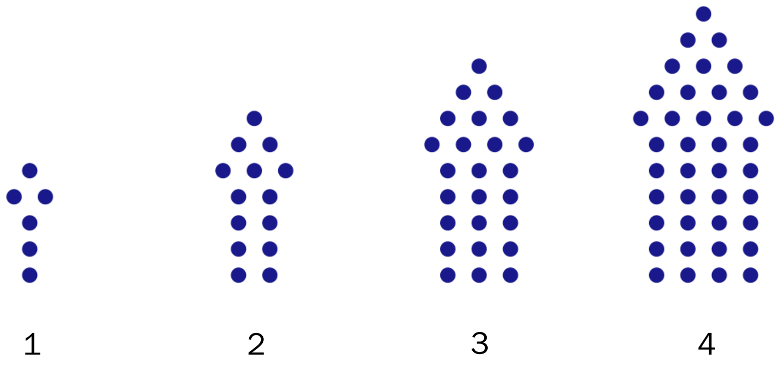
a) Bestem forventingsverdien og standardavviket til X dersom vi går ut frå at partiet framleis har ei oppslutning på 6,0 %.

Av 100 tilfeldig valde personar var det 10 som sa at dei no ville stemme på dette partiet.

b) Set opp hypotesar og test om partiet har grunn til å tru at dei har hatt framgang blant veljarane. Bruk eit signifikansnivå på 5 %.

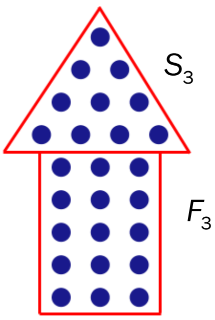
Oppgåve 7 (6 poeng)

Talet på prikkar i figurane nedanfor kallar vi for *piltala* P_n. Vi ser at $P_1 = 6$ og $P_2 = 14$.



a) Skriv opp dei fem første piltala.

Maria ser at ho kan dele figurane i to slik at hun får ein «pilspiss» og eit «rektangel». Da er det samla talet på prikkar $P_n = S_n + F_n$, der S_n er talet på prikkar i «pilspissen» og F_n er talet på prikkar i «rektangelet». Figuren nedanfor viser denne oppdelinga for figur nummer 3.



b) Forklar at talet på prikkar i «pilspissen» på figur nummer n er gitt ved $S_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

c) Bestem ein formel for det n-te piltalet P_n.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv. • Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet • Tabeller: www.ssb.no 11.02.2013

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

b) $g(x) = 5(x-1)^5$

c) $h(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x-3}$

Oppgave 2 (5 poeng)

a) Vis at polynomdivisjonen

$$(x^3 + 2x^2 - 21x + 18) : (x - 1)$$

går opp, uten å gjennomføre divisjonen.

b) Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 21x + 18}{x^2 - 1}$$

c) Bestem tallene a og b slik at divisjonen nedenfor går opp.

$$(x^3 + ax + b) : (x^2 + 2x - 3)$$

Oppgave 3 (4 poeng)

I en aritmetisk rekke er $a_2 = 6$ og $a_5 = 18$.

a) Skriv opp de fire første leddene i rekken.

b) Bestem en formel for a_n.

c) Bestem en formel for summen $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Oppgave 4 (4 poeng)

Vi har gitt funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1 \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

a) Bestem eventuelle topp- eller bunnpunkter på grafen til f .

b) Bestem eventuelle vendepunkter på grafen til f .

c) Lag en skisse av grafen til f.

Oppgave 5 (3 poeng)

Tre venner spiste lunsj på en sushi-restaurant. De valgte hver sin meny, slik kvitteringene nedenfor viser.

goSushi
Kunde 1
Meny B kr 88,-
2 biter laks
1 bit scampi
2 biter tunfisk
Mineralvann kr 30,-
Sum kr 118,-
Velkommen igjen!

goSushi
Kunde 2
Meny A kr 101,-
3 biter laks
2 biter scampi
1 bit tunfisk
Mineralvann kr 30,-
Sum kr 131,-
Velkommen igjen!

goSushi
Kunde 3
Meny C kr 103,-
3 biter laks
1 bit scampi
2 biter tunfisk
Mineralvann kr 30,-
Sum kr 133,-
Velkommen igjen!

Hvor mye hadde én bit sushi med laks, én bit med scampi og én bit med tunfisk kostet dersom de hadde blitt bestilt hver for seg?

Oppgave 6 (4 poeng)

I et terningspill på et kasino kastes to terninger. Det koster i utgangspunktet ikke noe å delta i spillet. Dersom summen av antall øyne blir 2 eller 12, får spilleren 200 kroner. Blir antall øyne til sammen 7, får hun 20 kroner. Men dersom summen blir noe annet enn 2, 12 eller 7, må spilleren betale a kroner til kasinoet.

La X være utbyttet til kasinoet ved en spilleomgang.

a) Forklar at $P(X=-20)=\dfrac{1}{6}$.

b) Skriv av og fyll ut tabellen nedenfor.

x	a	-20	-200
$P(X=x)$		$\dfrac{1}{6}$	

c) Kasinoet vil sette a slik at de i det lange løp tjener 5 kroner per spill.

Bestem verdien til a.

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

En bedrift produserer og selger x enheter av en vare per dag. Det viser seg at kostnadene $K(x)$ og inntektene $I(x)$ per dag er gitt ved

$$K(x) = 0{,}1x^2 - 10x + 2200$$

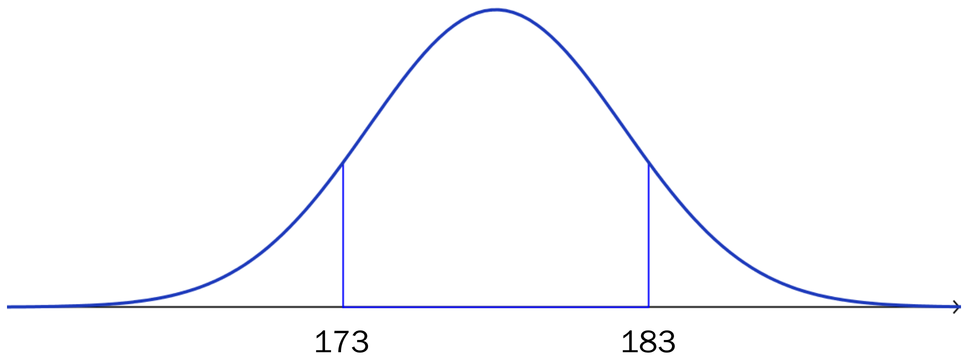
$$I(x) = 2400 \cdot \ln(x+1)$$

a) Bestem $K'(100)$ og $I'(100)$. Kan du ut fra disse tallene si om bedriften bør produsere flere eller færre enn 100 enheter per dag?

b) Bestem den produksjonsmengden som gir størst overskudd for bedriften.

Oppgave 2 (4 poeng)

I en gruppe elever er høyden tilnærmet normalfordelt, med forventningsverdi μ og standardavvik σ.



I denne fordelingen er 10 % av elevene lavere enn 173 cm og 10 % høyere enn 183 cm.

a) Bestem μ.
Hvor mange prosent av elevene er lavere enn 183 cm?

b) Bestem σ.

Oppgave 3 (6 poeng)

Ifølge en modell fra Statistisk sentralbyrå vil forventet levealder til befolkningen i Norge følge funksjonen

$$f(x) = \frac{98{,}0}{1 + 0{,}206 \cdot e^{-0{,}0113x}} \quad , \qquad x \in [0, \rightarrow\rangle$$

Her er $f(x)$ forventet levealder for dem som er født x år etter 2012.

a) Hva blir forventet levealder for dem som blir født i 2020, ifølge denne modellen?

b) Bestem i hvilket år nyfødte kan forvente en levealder på 84 år.

c) Bruk $f'(x)$ til å vise at forventet levealder i Norge stadig øker, ifølge denne modellen.

d) Hva vil forventet levealder i Norge gå mot i det lange løp, ifølge modellen?

Oppgave 4 (4 poeng)

Som vist i tabell 1 nedenfor har salget av CD-er i Norge minket de siste årene.

Tabell 1:

Antall år etter 2002	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Omsetning (mill. kroner)	943	866	876	759	659	620	526	473	352	235

a) I hvilket år kan vi regne med at CD-salget er slutt dersom vi går ut fra at utviklingen fortsetter på samme måte?

Omsetningen av nedlastet/streamet musikk har derimot økt, som vist i tabell 2 nedenfor.

Tabell 2:

Antall år etter 2006	0	1	2	3	4	5
Omsetning (mill. kroner)	26	42	57	89	143	248

b) Bestem en eksponentiell modell $f(x)$ som viser omsetningen som funksjon av antall år etter 2006. Hvor stor omsetning kan musikkbransjen regne med i 2013 dersom utviklingen fortsetter på denne måten?

Oppgave 5 (6 poeng)

I starten av et år vurderer Lise å låne 100 000 kroner for å investere i et aksjefond. Lånet er et annuitetslån, og hun må betale 16 274,54 kroner i slutten av hvert år i 10 år for å nedbetale hele lånet, første gang ett år etter låneopptaket.

a) Vis at den årlige renten er på 10 %.

Banken hevder at dersom aksjene har en årlig verdiøkning på 12 %, vil hun sitte igjen med en solid fortjeneste på aksjene.

b) Bestem verdien av aksjene i slutten av det 10. året.

Hennes netto fortjeneste etter 10 år er differansen mellom verdien av det hun har betalt på lånet, og verdien av aksjene.

Vis at hennes netto fortjeneste etter 10 år vil være 51 210,57 kroner.

I stedet for å ta opp dette lånet for å kjøpe aksjer vurderer Lise heller å spare. I slutten av hvert år vil hun sette 16 274,54 kroner inn på en konto med en fast årlig rente. Det første beløpet setter hun inn om ett år.

c) Hva må sparerenten være for at hun skal ha like mye penger i banken om 10 år som verdien av aksjene i oppgave b)?

Oppgave 6 (5 poeng)

I en stor kommune fikk et politisk parti en oppslutning på 6,0 % ved valget for to år siden. I en fersk meningsmåling i kommunen ble 100 tilfeldig valgte personer spurt om hvilket parti de ville ha stemt på om det var valg i dag.

La X være antall personer som i dag ville ha stemt på dette partiet blant 100 tilfeldig valgte personer. Vi går ut fra at X er binomisk fordelt.

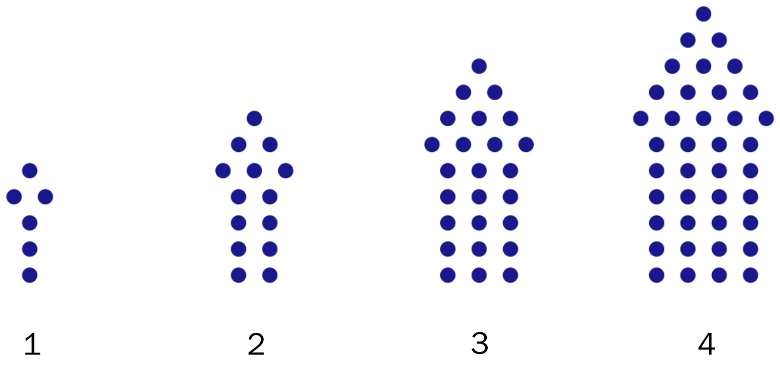
a) Bestem forventningsverdien og standardavviket til X dersom vi går ut fra at partiet fremdeles har en oppslutning på 6,0 %.

Av 100 tilfeldig valgte personer var det 10 som oppga at de nå ville stemme på dette partiet.

b) Sett opp hypoteser og test om partiet har grunn til å tro at de har hatt framgang blant velgerne. Bruk et signifikansnivå på 5 %.

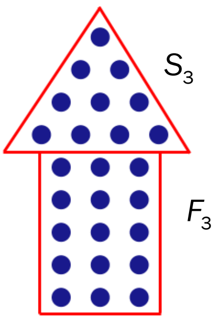
Oppgave 7 (6 poeng)

Antall prikker i figurene nedenfor kaller vi for *piltallene* P_n. Vi ser at $P_1 = 6$ og $P_2 = 14$.



a) Skriv opp de fem første piltallene.

Maria ser at hun kan dele figurene i to slik at hun får en «pilspiss» og et «rektangel». Da er samlet antall prikker $P_n = S_n + F_n$, der S_n er antall prikker i «pilspissen» og F_n er antall prikker i «rektangelet». Figuren nedenfor viser denne oppdelingen for figur nummer 3.



b) Forklar at antall prikker i «pilspissen» på figur nummer *n* er gitt ved $S_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

c) Bestem en formel for det *n*-te piltallet P_n.

Blank side.

Blank side.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet