V14 MATS2 ①

Oppg. 1 a) $f(x) = \frac{3}{x^2}$

$f'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)'$ $u = 3,\ u' = 0$

$v = x^2,\ v' = 2x$

$f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$f'(x) = \frac{0 \cdot x^2 - 3 \cdot 2x}{(x^2)^2}$

$f'(x) = -\frac{6\cancel{x}}{x^{\cancel{4}}}$

$f'(x) = \underline{\underline{-\frac{6}{x^3}}}$

b) $g(x) = x \cdot e^{-4x}$

$g'(x) = (u \cdot v)'$ $u = x,\ u' = 1$

$v = e^{-4x},\ v' = -4 \cdot e^{-4x}$

$g'(x) = u'v + u \cdot v'$

$g'(x) = 1 \cdot e^{-4x} + x \cdot -4e^{-4x}$

$g'(x) = \underline{\underline{e^{-4x}(1 - 4x)}}$

Oppg. 2 a) $P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4$

$= 8 - 12 + 4 = \underline{\underline{0}}$

b) Siden $P(2) = 0$, så går $P(x) : (x-2)$ opp:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 3x^2 + 4) : (x-2) = \underline{\underline{x^2 - x - 2}} \\
\underline{-x^3 + 2x^2} \\
\quad -x^2 + 4 \\
\quad \underline{+x^2 - 2x} \\
\qquad -2x + 4 \\
\qquad \underline{-(-2x + 4)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$x^2 - x - 2 = 0$:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$x = \frac{1+3}{2} \quad \vee \quad x = \frac{1-3}{2}$$

$$\underline{x = 2} \quad \vee \quad \underline{x = -1}$$

Da er $x^3 - 3x^2 + 4 = \underline{\underline{(x-2)^2(x-1)}}$

Oppg. 3 a) $a_1 = 3$, $d = 3$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Setter $a_n = 300$ og finner n:

$$300 = 3 + (n-1) \cdot 3$$
$$300 = 3 + 3n - 3$$
$$\frac{300}{3} = \frac{\cancel{3}n}{\cancel{3}}$$
$$\underline{n = 100}$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_n = \frac{(3 + 300) \cdot \cancel{100}^{50}}{\cancel{2}}$$

$$S_n = 303 \cdot 50$$
$$S_n = \underline{\underline{15150}}$$

b) $a_1 = 4$

$$a_n = a_{n-2} + 8 \,, \; n \geq 3$$

Da er

$$a_n - a_{n-2} = 8$$

Hvis rekken skal være aritmetisk må

$$d = \frac{8}{2}$$ (fordi det er to ledd mellom a_n og a_{n-2})

$$\underline{d = 4}$$

Da er $a_2 = a_1 + 4 = 4 + 4 = 8$

$$\underline{\underline{a_2 = 8}}$$

Oppg. 4 Voksne (x) = 100kr (4)

Barn (y) = 50kr

Pensj. (z) = 60kr

Antall billetter:

$$x + y + z = 80$$

Billettinntekter:

$$100 \cdot x + 50 \cdot y + 60 \cdot z = 5000$$

Billettfordeling:

$$y = x + z$$

Likningssettet vi skal løse:

$$\begin{bmatrix} x + y + z = 80 \\ 100x + 50y + 60z = 5000 \\ y = x + z \end{bmatrix}$$

$$2x + 2z = 80 \Leftrightarrow x + z = 40 \Leftrightarrow x = 40 - z \quad \text{I}$$

$$100x + 50(x+z) + 60z = 5000$$

$$100x + 50x + 50z + 60z = 5000$$

$$150x + 110z = 5000$$

$$15x + 11z = 500 \quad \text{II}$$

$$15 \cdot (40 - z) + 11z = 500$$

$$600 - 15z + 11z = 500$$

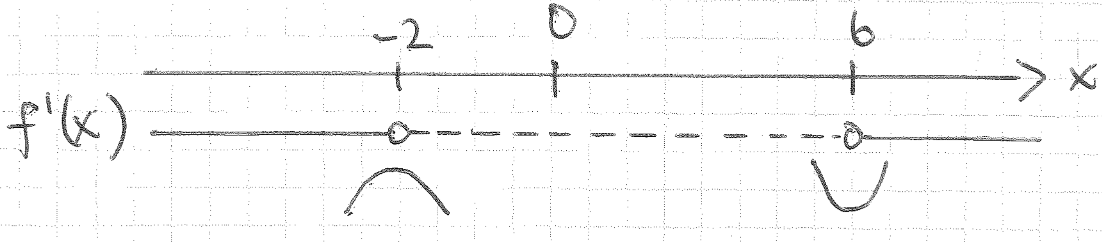
$$\frac{-4z}{-4} = \frac{-100}{-4}$$

$$\underline{z = 25}$$

$$x = 40 - 25 = \underline{15} \quad \wedge \quad y = 25 + 15 = \underline{40}$$

<u>Det var 40 barn, 15 voksne og 25 pensjonister til stede</u>

Oppg. 5 a) Lager et fortegnsskjema for f':



<u>Grafen har toppunkt for $x=-2$</u>
<u>Grafen har bunnpunkt for $x=6$</u>
<u>Grafen vokser for $x \in \langle \leftarrow, -2\rangle \cup \langle 6, \rightarrow\rangle$</u>

b) $f'(4) = -3$, så $a = -3$

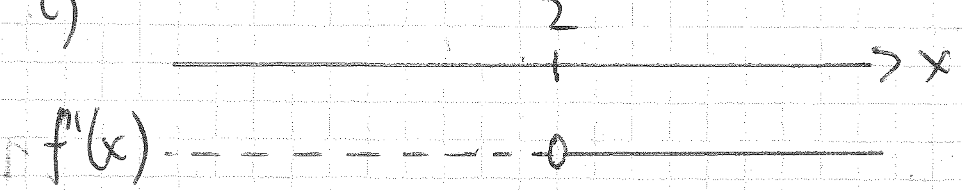
Går gjennom $(4,3)$, så

$x = 4$ og $y = 3$:

$$y = a \cdot x + b$$
$$3 = -3 \cdot 4 + b$$
$$3 + 12 = b$$
$$b = 15$$

<u>Likningen til tangenten er $y = -3x + 15$</u>

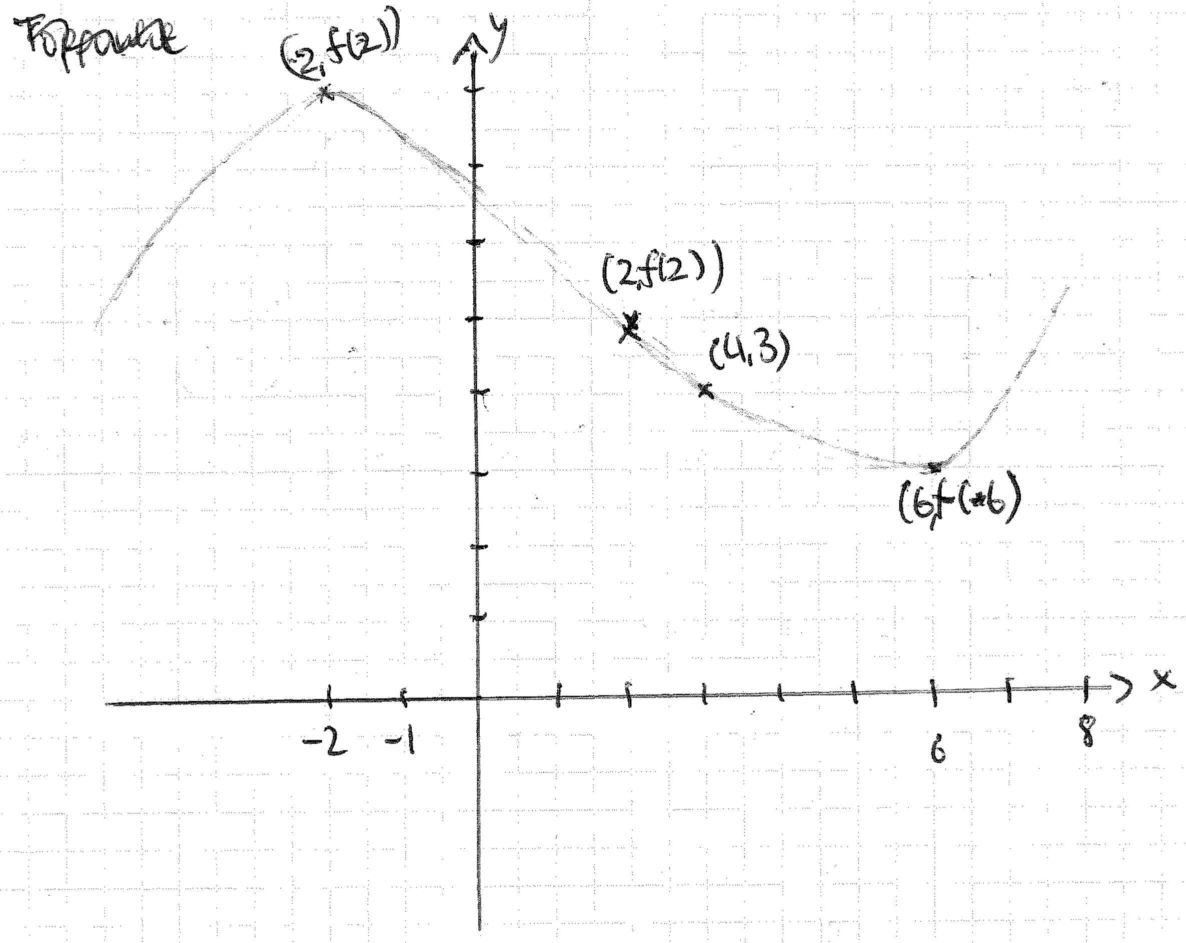
c)



$f''(x)$ skifter fortegn for $x=2$. <u>Da har f vendepunkt for $x=2$.</u>

d)

d) Bruker opplysninger fra a, b og c:



Oppg 6. a) X_1 er (2). Fordi forventningsverdien ~~E~~ $n \cdot p = 10 \cdot 0{,}6 = 6$ og det er 10 delforsøk (Sannsynligheter i fordelingen)

X_2: $\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}06 = 6$. Gir graf (3).

X_3: $\mu = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}4 = 4$. Gir graf (4)

X_4: $\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}1 = 5$. Gir graf (1)

b) X_2 har $P(X \geq 10) = 0{,}775$. Vi leser av søylehøyden i graf (3)

$P(X=10) + P(X=11) + P(X=12) + P(X=13) + \dots$

$= 0.04 + 0.02 + 0.01 + 0.005 + \dots$

$= \underline{0{,}0775}$

(Alternativet, graf (1) har for lave søyler, dvs. $P(X \geq 10)$ er for liten)

c) Bruker $Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$:

$X_1: 10 \cdot 0.6 \cdot 0{,}4 = 6 \cdot 0{,}4 = 2{,}4$

$X_2: 100 \cdot 0{,}06 \cdot 0.94 = 6 \cdot 0{,}94 = \underline{5.74}$

$6 \cdot 94$
544
$5{,}74$

$X_3: 10 \cdot 0.4 \cdot 0{,}6 = 2.4$

$X_4: 50 \cdot 0{,}1 \cdot 0.9 = 5 \cdot 0{,}9 = \underline{4.5}$

Vi ser at $Var(X_2)$ ~~er~~ størst, da er også $\sigma(X_2)$ størst, siden $\sigma = \sqrt{Var}$

<u>X_2 har det største standardavviket.</u>

DEL 2

Oppg. 1 a)

$$O_1 = \frac{\pi \cdot \cancel{2}r}{\cancel{2}} = \pi r$$

$$O_2 = \frac{\pi \cdot r}{2} = \frac{\pi r}{2}$$

$$O_3 = \frac{\frac{\pi \cdot r}{2}}{2} = \frac{\pi r}{4}$$

Det ~~neste~~ n'te leddet er ~~det for~~ halvparten av det foregående. Da er det en geometrisk rekke der $k = \frac{1}{2}$ og denne fortsetter i det uendelige.

b) $S = \dfrac{a_1}{1-k}$ $\quad a_1 = \pi r$

$$S = \frac{\pi r}{1 - \frac{1}{2}} = \pi r \cdot 2 = \underline{2\pi r}$$

Summen av rekken tilsvarer omkrets av en sirkel der radius er lik den største sirkelen.

Oppg. 2

a) Se Utskrift.

b) Se utskrift

c) Se utskrift.

Oppg. 3

a) Se utskrift for lineær regresjon:

$p(x) = -0.22x + 2219$

Da er inntekten

$I(x) = p(x) \cdot x$

$I = (-0.22x + 2219)x$

$I(x) = \underline{\underline{-0.22x^2 + 2219x}}$

b) $I'(x) = -0.44x + 2219$

$I'(3000) = -0.44 \cdot 3000 + 2219 = \underline{899}$

$K'(x) = 0{,}06x + 15$

$K'(3000) = 0.06 \cdot 3000 + 15 = \underline{195}$

Siden $I'(3000) > K'(3000)$ vil inntektene øke mer enn kostnadene om vi øker produksjonen.

<u>Bedriften bør øke produksjonen.</u>

c) Se utskrift (Vi løser den grafisk)

d) Overskuddet er størst når $I'(x) = K'(x)$. Fra oppgave
c) ser vi at det er 4408 enheter.
Bedriften må produsere 4408 enheter for at overskuddet skal bli størst mulig.

Oppg. 4 a) $\left.\begin{array}{l} \text{Volum} = l \cdot b \cdot h \\ V = 2x \cdot x \cdot h \end{array}\right\}$ $V = 10$

$$\frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{2}x^2} = \frac{\cancel{2x^2} \cdot h}{\cancel{2x^2}}$$

$$h = \frac{5}{x^2}$$

b) Kostnader til bunnen:

$$2 \cdot x^2 \cdot 100 = 200x^2$$

Kostnader til kortsiden:

$$h \cdot x \cdot 60 = \frac{5}{x^2} \cdot x \cdot 60 = \frac{300}{x}$$ (To kortsider gir $\frac{600}{x}$)

Kostnader til langsiden:

$$2x \cdot h \cdot 60 = 2x \cdot \frac{5}{x^2} \cdot 60 = \frac{600}{x}$$ (To langsider gir $\frac{1200}{x}$)

Totale kostnader:

$$K(x) = 200x^2 + \frac{600}{x} + \frac{1200}{x} = 200x^2 + \frac{1800}{x}$$

c) Se utskrift.

Finner at $x = 1{,}65$ gir lavest kostnad.

Da er lengden $2 \cdot 1{,}65 = \underline{\underline{3{,}30\,m}}$

Da er bredden $\underline{\underline{1{,}65\,m}}$

Høyden er $\frac{5}{(1{,}65)^2} = \underline{\underline{1{,}84\,m}}$

Oppg. 5 a) $p = 0.10$. Setter

Tre personer etter hverandre:

$P(\text{tre trukket ut}) = 0{,}10^3 = 0.001$

Sannsynligheten er 0,1% for at tre personer etter hverandre blir trukket ut.

b)

$E(X) = \mu = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}10 = \underline{\underline{100}}$

$SD(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{1000 \cdot 0.10 \cdot 0{,}90} = \underline{\underline{9{,}49}}$

c) $H_0: p = 0.10$

$H_A: p > 0.10$

$P(X \geq 100) = \underline{0.1583}$ (Bruker sannsynlighetskalk. i GeoGebra)

P-verdi > S-nivå, så vi må beholde nullhypotesen.

Flyplasspersonalet har ikke grunn til å mistenke at for mange blir trukket ut.

Oppg. 6 a) Avbetaling tilsvarer en sum av nåverdier
Totalt tilsvarer dette 7995 kr + 30 kr = 8025 kr
(Månedlig rente lik 1,6% gir vekstfaktor lik 1,016.)

~~S_{36} =1~~

Venstresiden er en geometrisk rekke der $a_1 = \frac{x}{1{,}016}$ og

$k = \frac{1}{1{,}016}$ og $n = 36$

$$S_{36} = a_1 \cdot \frac{k^{36} - 1}{k - 1} = 8025$$

$$\frac{x}{1{,}016} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}016}\right)^{36} - 1}{\frac{1}{1{,}016} - 1} = 8025 \quad \Big| \cdot 1.016$$

$$\frac{x \cdot \cancel{27{,}64}}{\cancel{27{,}64}} = \frac{8153{,}40}{27.64}$$

$$x = 294{,}98$$

$$\underline{x \approx 295}$$

<u>Frida må betale 295 kr per måned ved avbetaling</u>

b) Første beløp (om en måned) = $\frac{289}{x}$
⋮
Siste beløp (om 36 måneder) = $\frac{289}{x^{36}}$

} Geom. rekke, $a_1 = \frac{289}{x}$, $k = \frac{1}{x}$, $n = 36$.

Gir rekka:

$$\frac{289}{x} \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{36} - 1}{\frac{1}{x} - 1} = 8025$$

Løser dette grafisk i Geogebra, se utskrift.

c) Sparingen til Elise:

1 aug

$$\underbrace{650 + 650\cdot x + 650\cdot x^2 + \ldots}_{} = 8107$$

Geometrisk rekke der

$a_1 = 650$, $k = x$ og $n = 12$

$$650\cdot\frac{x^{12}-1}{x-1} = 8107.$$

Løser grafisk i Geogebra som oppgave b.

Oppg. 7. Vi setter opp en oversikt over de første 24 timene

~~Antall timer~~	Antall tabletter → / Antall timer ↓	1	2	3
	6t	30mg	-	-
	12t	15mg	60mg	-
	18t	7,5mg	30mg	-
	24t	3.75mg	15 mg	60mg

Vi ser at mengden stoff utgjør en uendelig (konvergent) Geometrisk rekke der de første leddene er $60 + 15 + 3{,}75 + \ldots$

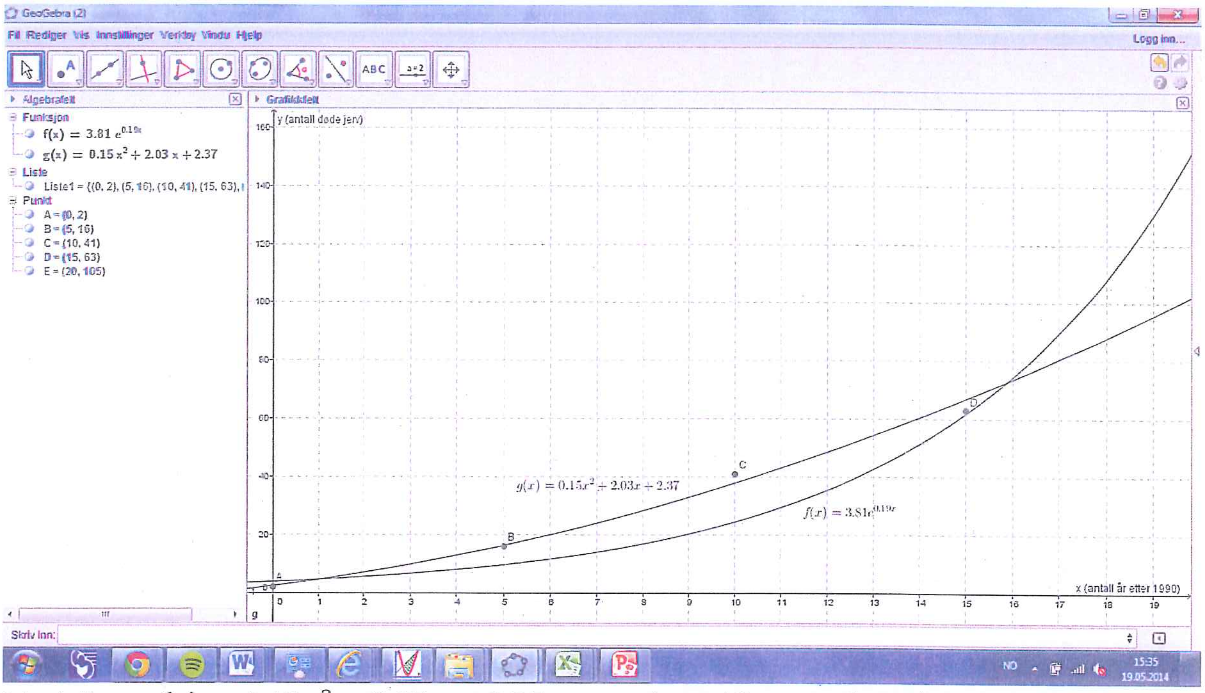
$a_1 = 60$, $k = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} \in (-1,1)$ så konvergent. Da er summen

$$S = \frac{60}{1-\frac{1}{4}} = \frac{60\cdot 4}{\frac{3}{4}\cdot 4} = \frac{240}{3} = \underline{80}$$

<u>Etter lang tids bruk vil det være 80mg i kroppen.</u>

Oppgave 2

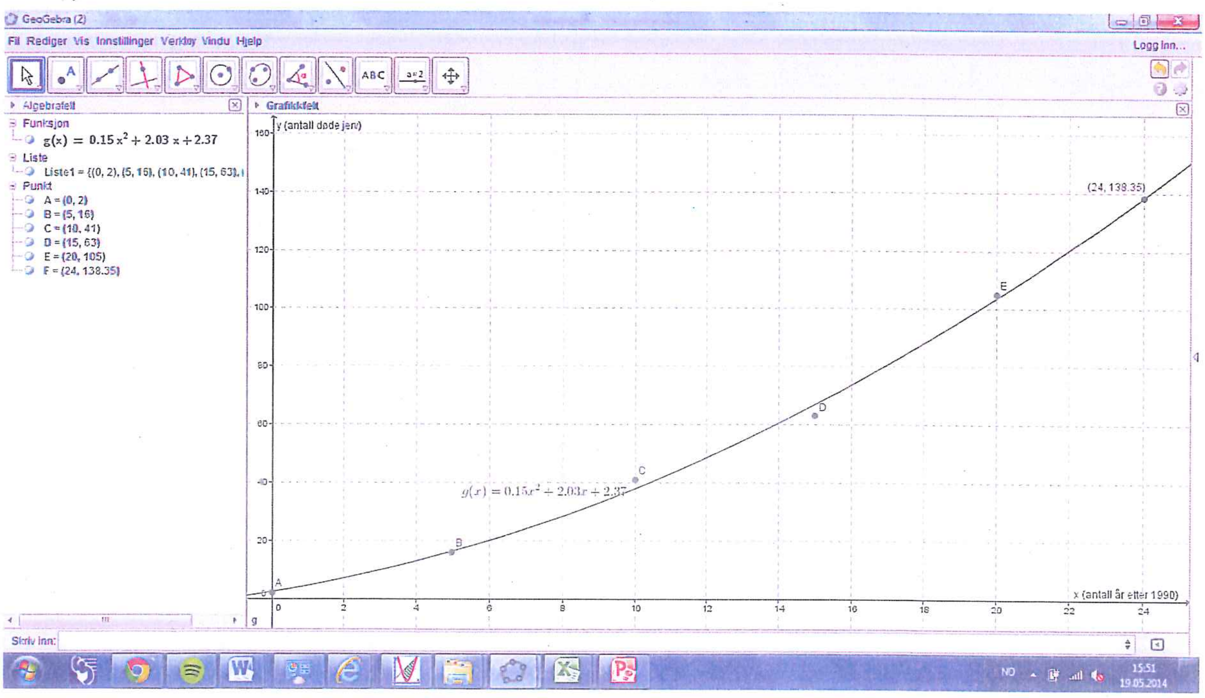
a)



Modellen $g(x) = 0{,}15x^2 + 2{,}03x + 2{,}37$ passer best. Vi ser at den går nærmere punktene enn den eksponentielle modellen.

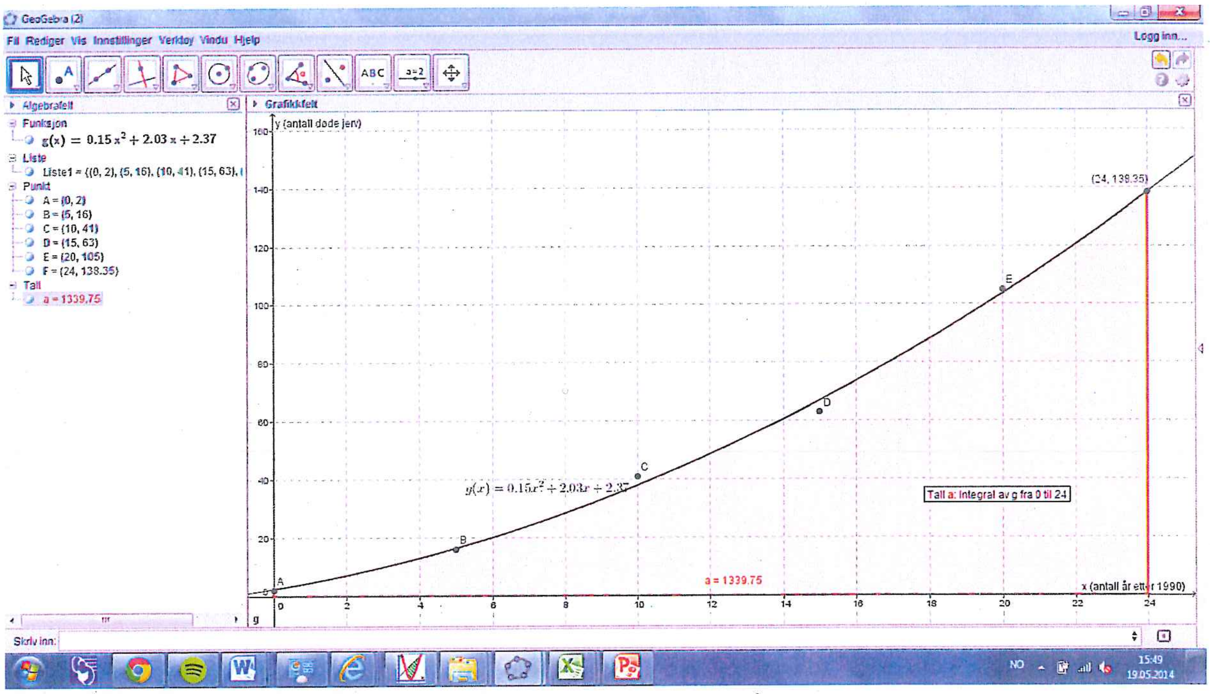
Forklaring: Satte inn regneark, brukte "Lag liste med punkt". Valgte først RegEksp2, deretter RegPoly, grad 2. Ser at andregradsfunksjonen passer best.

b)



Ca. 140 jerv kan forventes døde i 2014 i følge modellen vår.

(Løser grafisk, regner ut f(24) = 138.35)

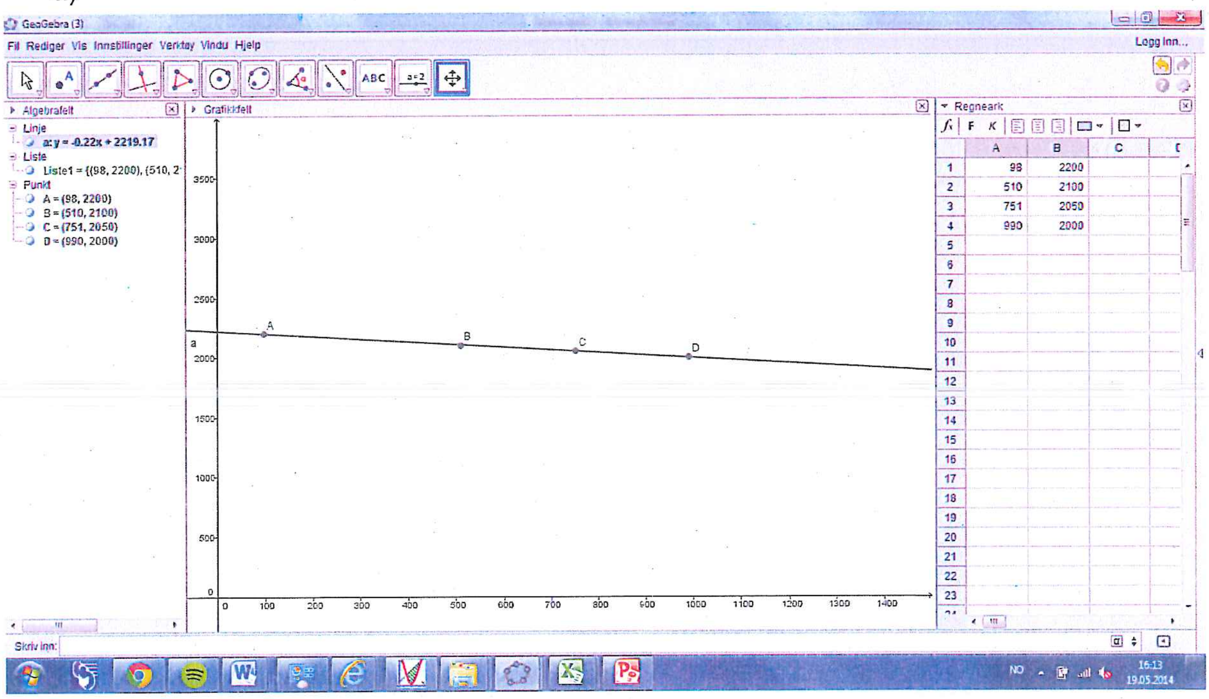


Ca. 1340 jerv kan forventes døde til sammen i løpet av årene

Forklaring: Det totale antall døde jerv tilsvarer arealet under grafen. Vi finner integralet ved å bruke [Integral, Funksjon = g, Start = 0, Slutt = 24]

Oppgave 3

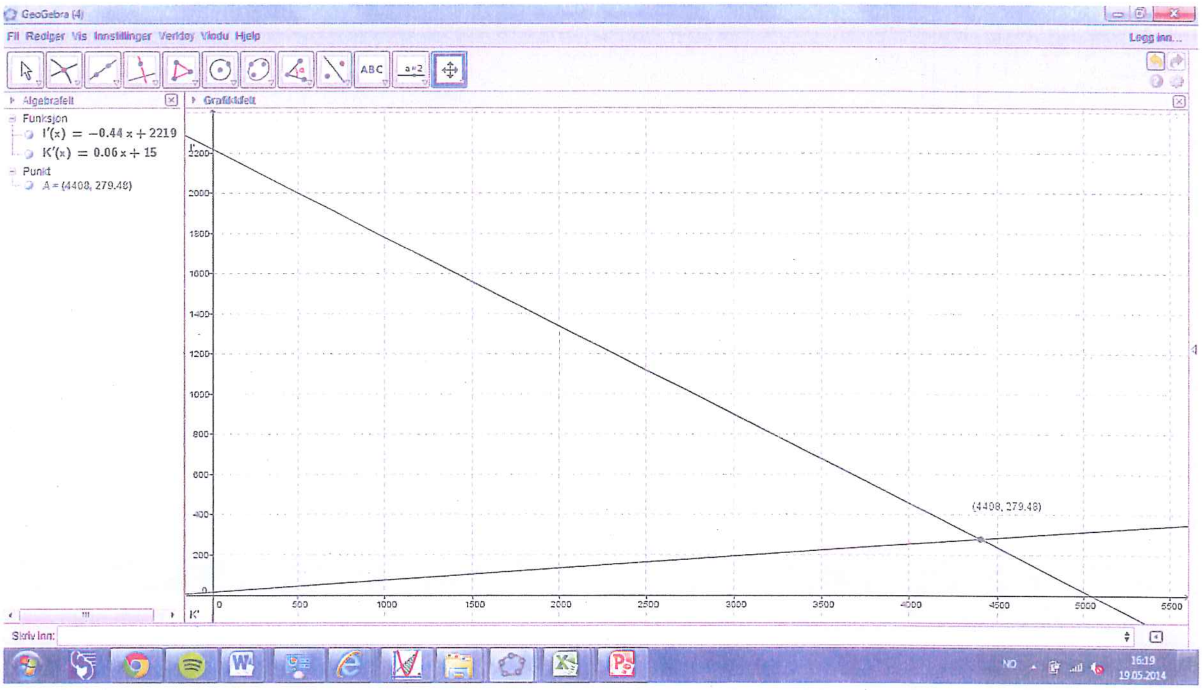
a)



Uttrykket $p(x) = -0.22x + 2219$ gir oss prisen p som funksjon antall enheter.

Forklaring: La inn tallene i regneark, brukte "Lag Liste, med punkt", deretter RegLin[Liste1], fikk fram uttrykket.

c)



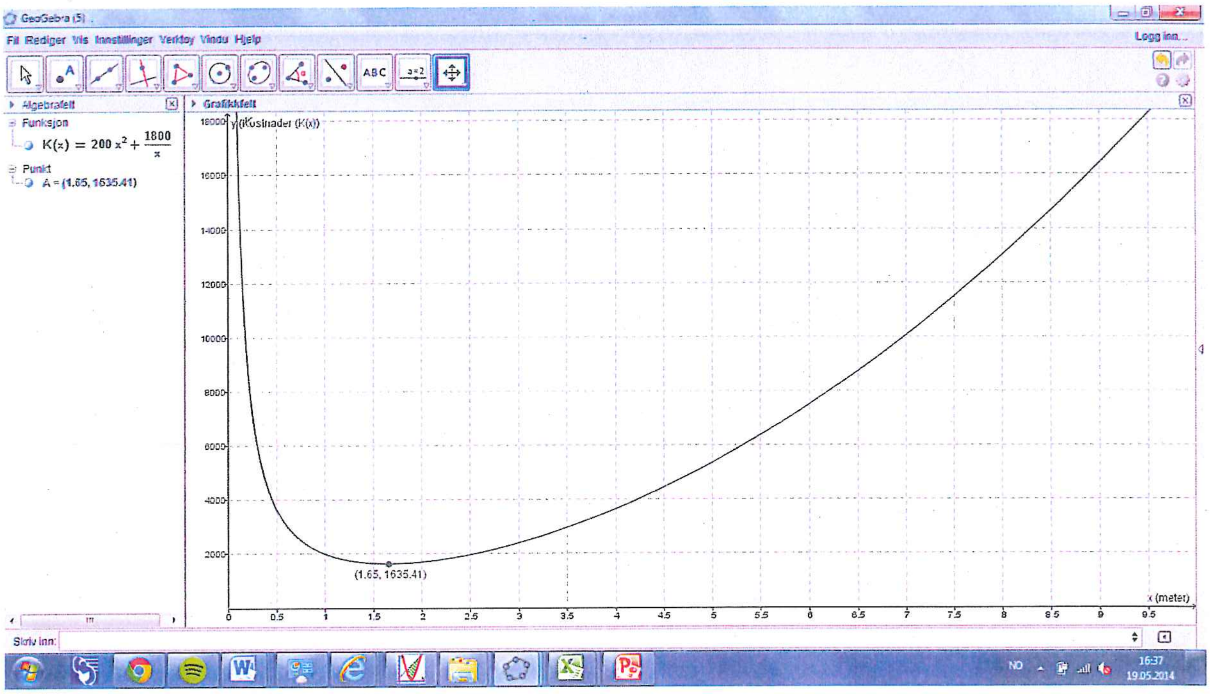
<u>Vi ser av skjermbildet at $I'(x) > K'(x)$ når $x \in \langle 0\,,4408\rangle$</u>

(Grafen til I' ligger over grafen til K' i det intervallet).

<u>Det betyr at bedriften kan øke produksjonen fram til de produserer 4408 enheter.</u>

Oppgave 4

c)

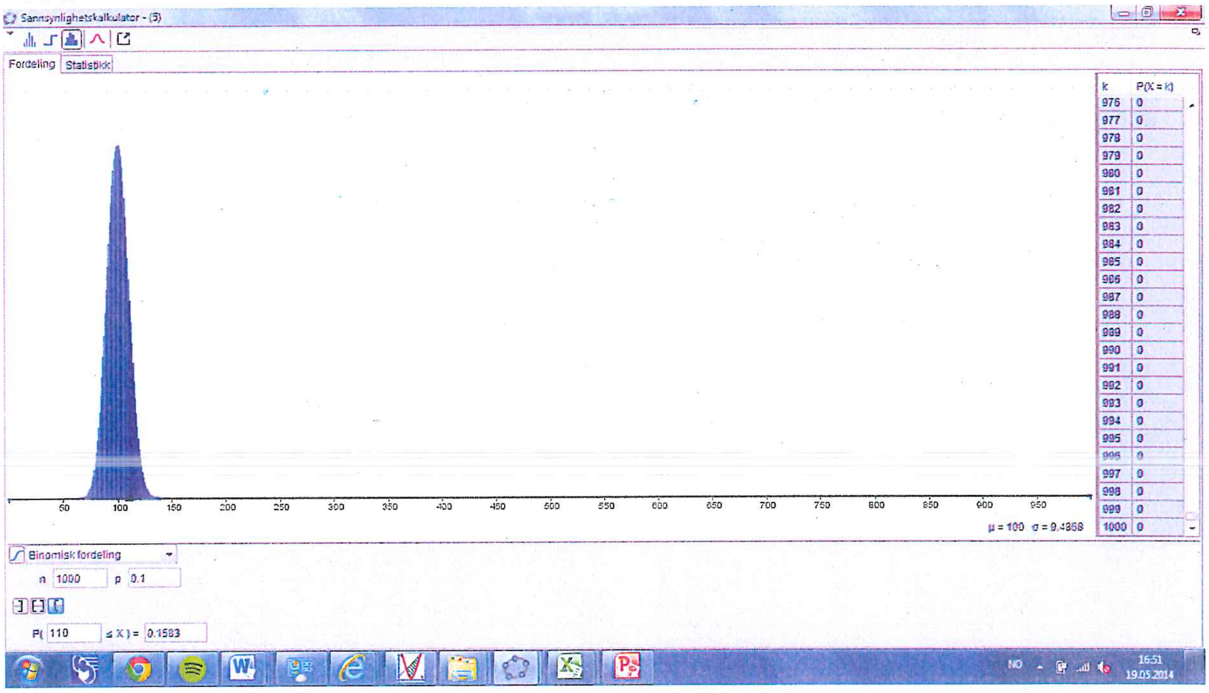


$\underline{x = 1.65 \text{ gir lavest kostnad}}$

<u>Da er den minste kostnaden 1635,41 kroner</u>

(Bruker Ekstremalpunkt [Funksjon=g, Start =0.1,Slutt=20] og fikk fram bunnpunkt)

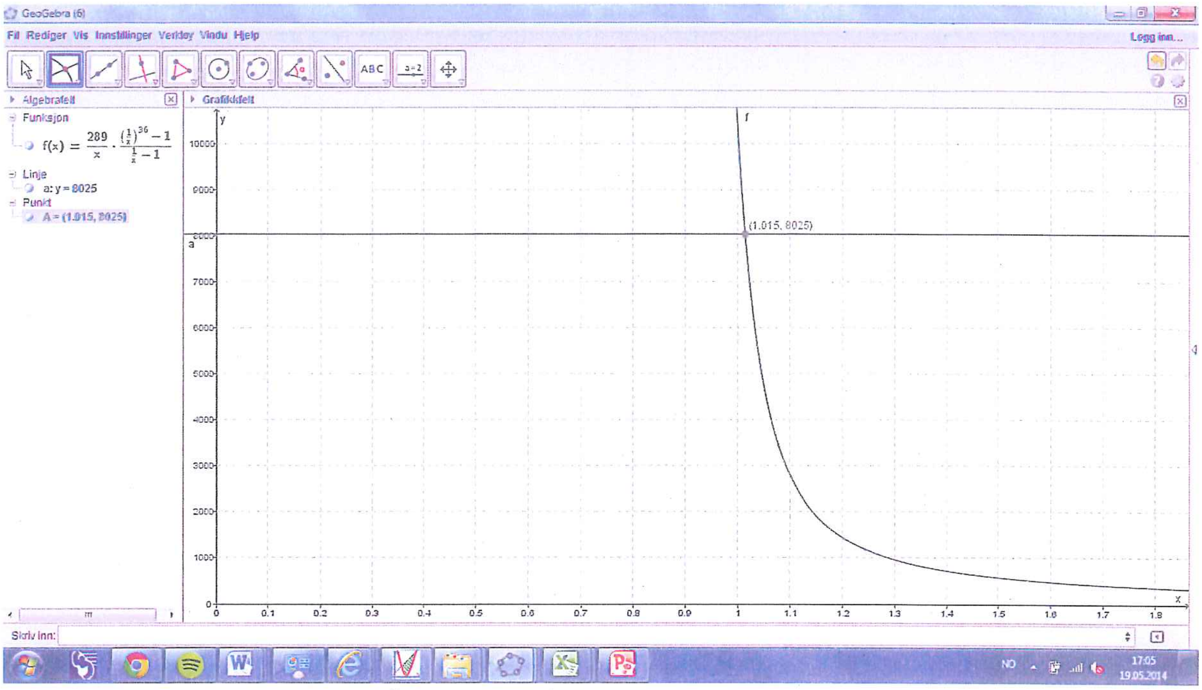
Oppgave 5



Brukte sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra og fikk fram bildet over.

Oppgave 6

b)

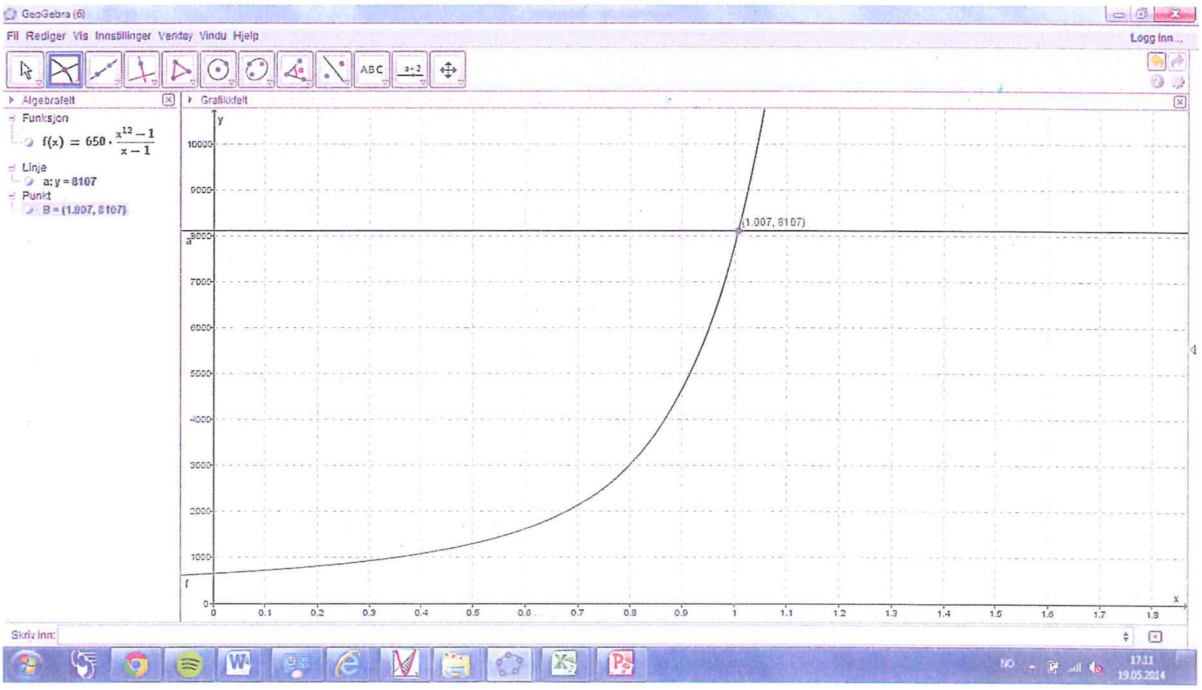


Vi løser likningen grafisk og får $x = 1{,}015$. Dette er vekstfaktoren.

<u>Det betyr at renten hun får i banken er 1,5 %</u>

(Skrev inn venstresiden og linja y = 8025. Brukte “Skjæring mellom to objekt”)

c)



Vi løser likningen grafisk og får $x = 1{,}007$. Dette er vekstfaktoren.

<u>Renten hun får i banken er 0,7 %</u>

(Skrev inn venstresiden av likningen og linja y = 8107. Brukte skjæring mellom to objekt)