

# Løsningsforslag til eksamen i Matematikk R1 V2016

## Del 1

### Oppgave 1

a)  $f'(x) = -3 \cdot 2x + 6 = \underline{\underline{-6x + 6}}$ .

b) Vi bruker kjerneregelen med  $x^3 - x$  som kjerne:

$$g'(x) = 5 \cdot \frac{1}{x^3 - x} \cdot (x^3 - x)' = \frac{5(3x^2 - 1)}{x^3 - x} = \frac{15x^2 - 5}{\underline{\underline{x^3 - x}}}.$$

c) Vi bruker brøkregelen:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(x-1)' \cdot (x+1) - (x-1) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{\underline{\underline{(x+1)^2}}}. \end{aligned}$$

### Oppgave 2

a)  $P$  er delelig med  $(x-2)$  hvis og bare hvis  $P(2) = 0$ :

$$\begin{aligned} (2)^3 - 7(2)^2 + 14(2) + k &= 0 \\ k &= -8 + 28 - 28 = \underline{\underline{-8}} \end{aligned}$$

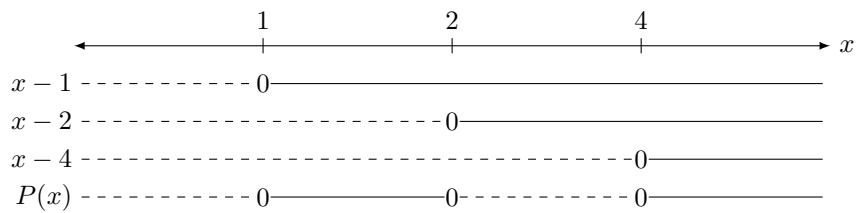
b) Vi utfører først polynomdivisjonen  $P(x) : (x-2)$ .

$$\begin{array}{r} (x^3 - 7x^2 + 14x - 8) : (x - 2) = x^2 - 5x + 4. \\ \underline{x^3 - 2x^2} \phantom{+ 12x - 8} \\ -5x^2 + 14x - 8 \\ \underline{-5x^2 + 10x} \phantom{- 8} \\ 4x - 8 \\ \underline{4x - 8} \\ 0 \end{array}$$

$x^2 - 5x + 4$  kan vi faktorisere som  $(x-1)(x-4)$  siden  $-1-4 = -5$  og  $(-1)(-4) = 4$ . Dermed har vi at

$$P(x) = \underline{\underline{(x-1)(x-2)(x-4)}}.$$

c) Vi tegner en fortegnslinje for  $P(x)$ :



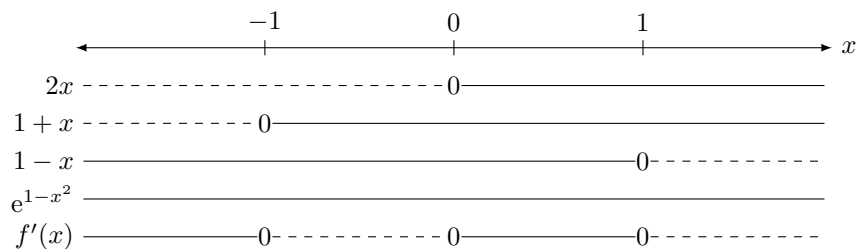
Vi kan nå lese av at  $P(x) \leq 0$  når  $1 \leq x \leq 2$  eller  $x \geq 4$ .

### Oppgave 3

a) Her må vi bruke både produkt- og kjerneregelen:

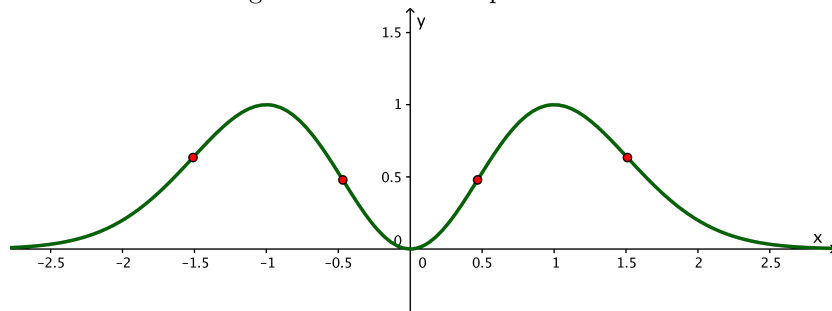
$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (x^2)' \cdot e^{1-x^2} + x^2 \cdot (e^{1-x^2})' \\
 &= 2xe^{1-x^2} + x^2 e^{1-x^2} \cdot (1-x^2)' \\
 &= 2xe^{1-x^2} - 2x^3 e^{1-x^2} \\
 &= \underline{\underline{2x(1-x^2)e^{1-x^2}}}.
 \end{aligned}$$

b) Den deriverte kan faktoriseres videre til  $f'(x) = 2x(1+x)(1-x)e^{1-x^2}$ . Da får vi følgende fortegnslinje:



Vi får toppunktene  $(-1, f(-1)) = \underline{\underline{(-1, 1)}}$  og  $(1, f(1)) = \underline{\underline{(1, 1)}}$ , og bunnpunktet  $(0, f(0)) = \underline{\underline{(0, 0)}}$ .

c/d) Vi ser fra skissen at grafen har fire vendepunkter.



#### Oppgave 4

- a)  $CH$  er katet i en rettvinklet trekant med sider på 6 og 3, så  $CH = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27}$ .  $CE$  er hypotenus i en rettvinklet trekant med sider på 6 og 6, så  $CE = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ .  $CF$  vil være like lang siden  $CE$  og  $CF$  er radier i samme sirkel. Dermed kan vi bruke Pytagorassetningen på  $\triangle CHF$ :

$$\begin{aligned} HF^2 &= CF^2 - CH^2 \\ HF^2 &= (6\sqrt{2})^2 - (\sqrt{27})^2 \\ HF &= \sqrt{72 - 27} = \underline{\underline{3\sqrt{5}}}. \end{aligned}$$

- b)  $AF = AH + HF = 3 + 3\sqrt{5}$ . Dermed blir

$$\frac{AF}{AB} = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{6} = \underline{\underline{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}}.$$

#### Oppgave 5

- a) Punktene ligger på en rett linje hvis  $\overrightarrow{AB}$  og  $\overrightarrow{AC}$  er parallelle, altså hvis det finnes et tall  $k$  slik at  $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= [5 - 1, 2 - 1] = [4, 1] \\ \overrightarrow{AC} &= [3 - 1, 5 - 1] = [2, 4] \end{aligned}$$

Vi ser fra  $x$ -koordinatene at  $k = 2$ , men dette passer ikke med  $y$ -koordinatene. Dermed er vektorene ikke parallelle, og punktene ligger ikke på en rett linje.

- b)  $\angle CDA = 90^\circ$  dersom  $\overrightarrow{DC}$  og  $\overrightarrow{DA}$  står vinkelrett på hverandre, noe de gjør hvis skalarproduktet mellom de er null.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DC} &= [0 - 3, t - 5] = [-3, t - 5] \\ \overrightarrow{DA} &= [0 - 1, t - 1] = [-1, t - 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} &= 0 \\ (-3)(-1) + (t - 5)(t - 1) &= 0 \\ 3 + t^2 - 6t + 5 &= 0 \\ (t - 2)(t - 4) &= 0 \\ \underline{\underline{t = 2}} \quad \vee \quad \underline{\underline{t = 4}} \end{aligned}$$

- c) Vi har to muligheter for at  $ABCD$  skal være et trapes.

Den første muligheten er at  $\overrightarrow{AB}$  og  $\overrightarrow{DC}$  er parallelle. I så fall har vi at

$$[4, 1] = k \cdot [-3, t - 5] \Rightarrow k = -\frac{4}{3} \Rightarrow t = \underline{\underline{\frac{17}{4}}}.$$

Den andre muligheten er at  $\overrightarrow{DA}$  og  $\overrightarrow{BC} = [3 - 5, 5 - 2] = [-2, 3]$  er parallelle. I så fall vil

$$[-1, t - 1] = k[-2, 3] \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}.$$

### Oppgave 6

- a) Hun kan velge de to realfagene på  $\binom{5}{2}$  måter og de to andre fagene på  $\binom{8}{2}$  måter, så antall kombinasjoner blir

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{8}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 10 \cdot 28 = \underline{\underline{280}}.$$

- b) Antallet måter å velge fag på er  $\binom{13}{4} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 715$ .

$$\text{Antall måter å velge ingen realfag: } \binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

$$\text{Antall måter å velge ett realfag: } \binom{5}{1} \cdot \binom{8}{3} = \frac{5}{1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 280$$

$$\text{Antall måter å velge minst to realfag: } 715 - 70 - 280 = \underline{\underline{365}}.$$

### Oppgave 7

- a) Se vedlegg 1. Leser av at nullpunktene er  $\underline{\underline{x = -2}}$  og  $\underline{\underline{x = 4}}$ .
- b)  $S$  ligger midt mellom  $A$  og  $B$  så koordinatene blir

$$\left( \frac{0 + (-p)}{2}, \frac{1 + q}{2} \right) = \left( \underline{\underline{-\frac{p}{2}}}, \underline{\underline{\frac{q+1}{2}}} \right).$$

Radius er avstanden fra dette punktet til  $A$ , som blir

$$\sqrt{\left(-\frac{p}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{q+1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{(q+1-2)^2}{4}} = \sqrt{\frac{p^2 + (q-1)^2}{4}}.$$

- c) Sirkellikningen blir som følger:

$$\begin{aligned} \left(x - \left(-\frac{p}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{q+1}{2}\right)^2 &= \left(\sqrt{\frac{p^2 + (q-1)^2}{4}}\right)^2 \\ x^2 + 2x \cdot \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} + y^2 - 2y \cdot \frac{q+1}{2} + \frac{(q+1)^2}{4} &= \frac{p^2 + (q-1)^2}{4} \\ x^2 + px + y^2 - (q+1)y - \frac{(q-1)^2 - (q+1)^2}{4} &= 0 \\ x^2 + px + y^2 - (q+1)y + q &= 0 \end{aligned}$$

Denne sirkelen skjærer  $x$ -aksen når  $y = 0$ , altså når  $x^2 + px + q = 0$ . QED.

## Del 2

### Oppgave 1

a) Siden er to bunker vil  $P(F) = P(\overline{F}) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ .

I bunke A er 5 av 8 kort røde, så  $P(R|F) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \underline{\underline{\frac{5}{14}}}$ .

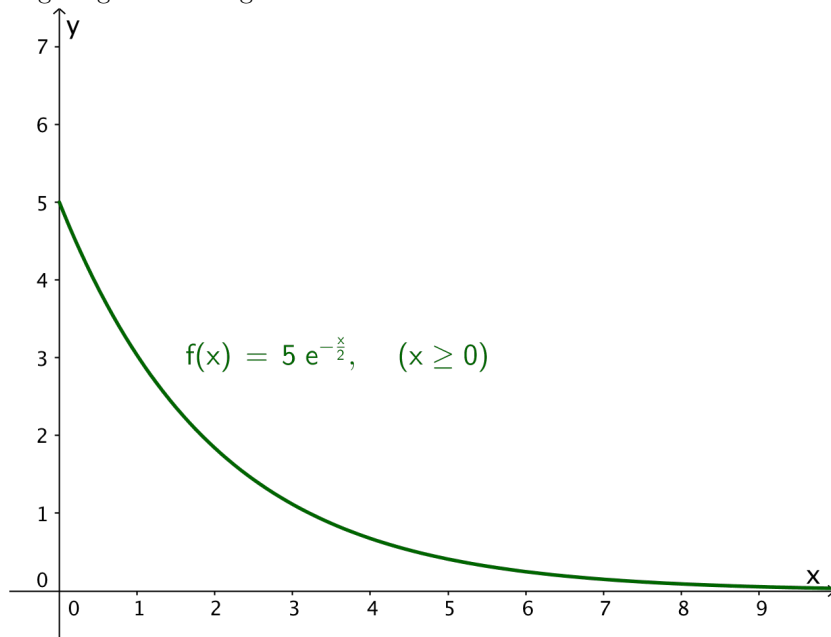
I bunke B er 3 av 7 kort røde, så  $P(R|\overline{F}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{7}}}$ .

b)  $P(R) = P(F) \cdot P(R|F) + P(\overline{F}) \cdot P(R|\overline{F}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{14} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$ .

c)  $P(F|R) = \frac{P(F) \cdot P(R|F)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{14}}{\frac{1}{4}} = \underline{\underline{\frac{5}{7}}}$ .

### Oppgave 2

a) Tegner grafen i Geogebra:



b) Bredden til rektangelet er gitt ved  $OA$  som har lengden  $x$ , og høyden til rektangelet er gitt ved  $OC$  som har lengden  $f(x)$ . Dermed blir arealet

$$T(x) = x \cdot f(x) = \underline{\underline{5xe^{-\frac{x}{2}}}}.$$

c) Vi tegner grafen til  $T$  i Geogebra og finner toppunktet  $(2, 3,68)$  ved hjelp av kommandoen Ekstremalpunkt. Rektangelet har altså sitt største areal når  $\underline{\underline{x = 2}}$  og arealet er  $\underline{\underline{3,68}}$ .

### Oppgave 3

- a)  $\overrightarrow{BC} = [5 - 4, 5 - 0] = [1, 5]$  er en retningsvektor for linja. Da vil en parameterframstilling være

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 5t \end{cases}$$

- b) Punktet  $P$  vil ha koordinater gitt ved parameterframstillinga i a-oppgaven, slik at

$$\overrightarrow{AP} = [(4 + t) - 1, 5t - 3] = \underline{\underline{[3 + t, -3 + 5t]}}.$$

- c)  $\overrightarrow{AB} = [4 - 1, 0 - 3] = [3, -3]$ . Skalarproduktet mellom ortogonale vektorer er alltid null, dermed har vi at

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} &= 0 \\ 3(3 + t) + (-3)(-3 + 5t) &= 0 \\ 9 + 3t + 9 - 15t &= 0 \\ 12t &= 18 \\ t &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Da blir } P = \left(4 + \frac{3}{2}, 5 \cdot \frac{3}{2}\right) = \underline{\underline{\left(\frac{11}{2}, \frac{15}{2}\right)}}.$$

- d) Løst i CAS i Geogebra. Vi får to løsninger.

1 ●	AB := Vektor[(3,-3)] → AB := $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$
2 ●	AP := Vektor[(3+t,-3+5t)] → AP := $\begin{pmatrix} 3+t \\ -3+5t \end{pmatrix}$
3 ○	Skalarprodukt[AB, AP] = Lengde[AB] Lengde[AP] cos(45°) NLØS: {t = -3, t = 0.6}
4 ●	P1 := (4 - 3, 5 * -3) → P1 := (1, -15)
5 ●	P2 := (4 + 0.6, 5 * 0.6) → P2 := $\left(\frac{23}{5}, 3\right)$

#### Oppgave 4

- a) Stigningstallet til linja gjennom  $B$  og  $C$  vil være

$$\frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{s}}{t - s} = \frac{s - t}{(t - s)st} = -\frac{1}{st}.$$

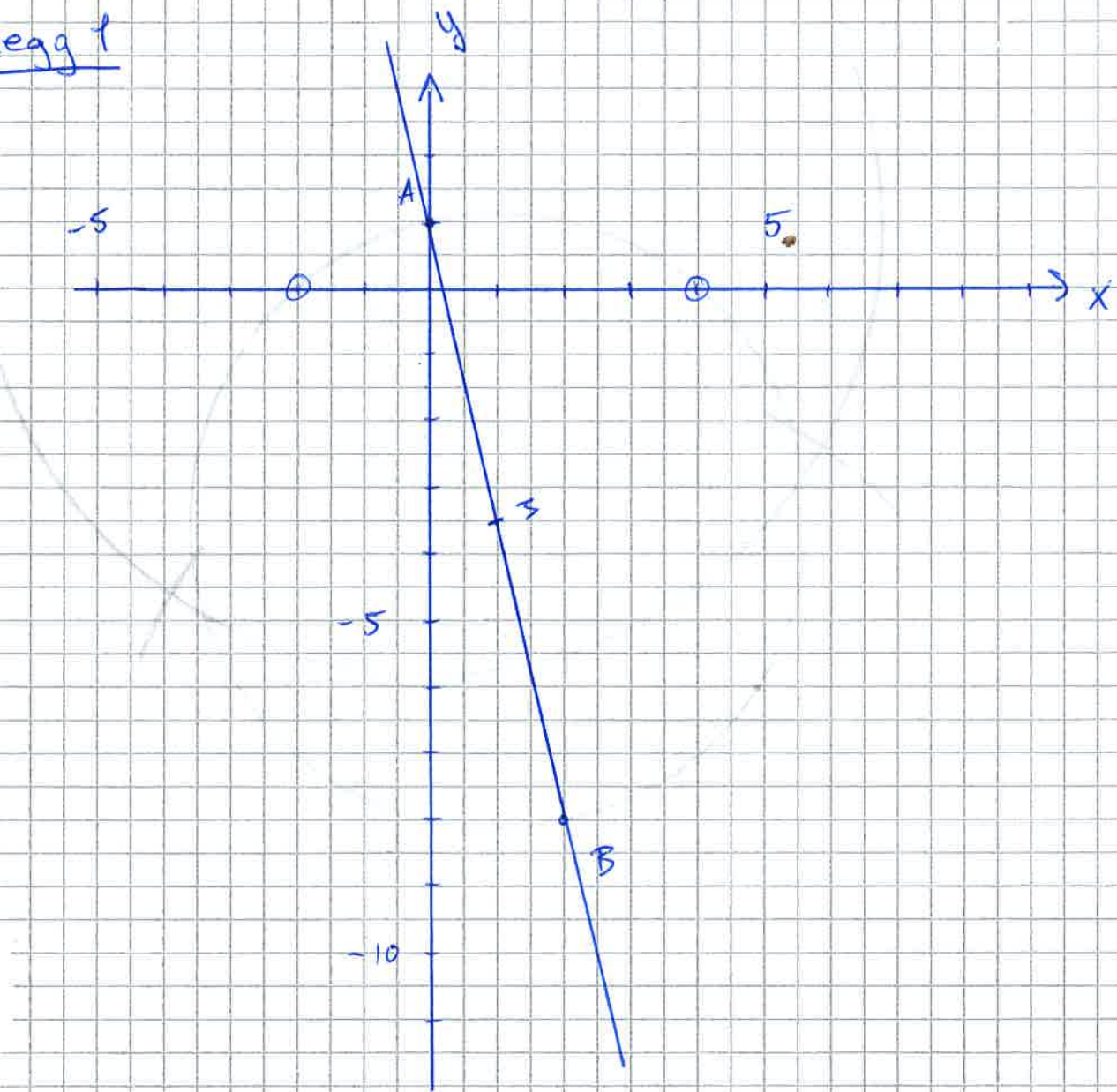
Da blir stigningstallet til linja som står normalt på denne  $st$  (hvis en linje har stigningstall  $a$  vil linja med stigningstall  $-\frac{1}{a}$  stå normalt på denne). Vi bruker etpunktsformelen på linja med dette stigningstallet som går gjennom  $A$  og får

$$y - \frac{1}{r} = st(x - r) \Leftrightarrow y = \underline{\underline{st(x - r) + \frac{1}{r}}}.$$

- b) Løst i CAS. Linje 5 viser at skjæringspunktet mellom linjene er et punkt på grafen til  $f$ .

1	$y = st(x - r) + 1/r$ $\rightarrow y = st(-r + x) + \frac{1}{r}$
2	$y = rt(x - s) + 1/s$ $\rightarrow y = rt(-s + x) + \frac{1}{s}$
3 ○	Skjæring[\$1,\$2] $\rightarrow \left\{ \left( -\frac{1}{rst}, -rst \right) \right\}$
4 ●	$f(x) := 1/x$ $\rightarrow f(x) := \frac{1}{x}$
5	$f(-1/(rst))$ $\rightarrow -rst$

# Vedlegg 1



Konstruksjonsforklaring:

1. Tegner inn A og B og slår en linje gjennom de
2. Konstruerer midtpunktet på AB
3. Slår en sirkel med sentrum i midtpunktet gjennom A.