

Eksamen R1 vår 2016 løsning

Del 1, ingen hjelpemidler

Oppgave 1

a) $f(x) = -3x^2 + 6x - 4$

$$f'(x) = -3 \cdot 2x + 6 \cdot 1 - 0 = \underline{\underline{-6x + 6}}$$

b) $g(x) = 5 \ln(x^3 - x)$, bruker kjerneregelen med $u = x^3 - x$ og $G(u) = 5 \ln u$:

$$g'(x) = u' \cdot G'(u) = (3x^2 - 1) \cdot 5 \cdot \frac{1}{u} = \underline{\underline{\frac{5(3x^2 - 1)}{x^3 - x}}}$$

c) $h(x) = \frac{x-1}{x+1}$, bruker derivasjonsregelen for brøk

$$h'(x) = \frac{[x-1]' \cdot (x+1) - (x-1) \cdot [x+1]'}{(x+1)^2} = \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \underline{\underline{\frac{2}{(x+1)^2}}}$$

Oppgave 2

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x + k$$

a) P er delelig med $(x-2)$ hvis $P(2) = 0$

$$2^3 - 7 \cdot 2^2 + 14 \cdot 2 + k = 0$$

$$k = -8 + 28 - 28 = \underline{\underline{-8}}$$

$P(2) = 0$ bare hvis $k = -8$, altså er dette den eneste verdien av k som gjør at divisjonen går opp

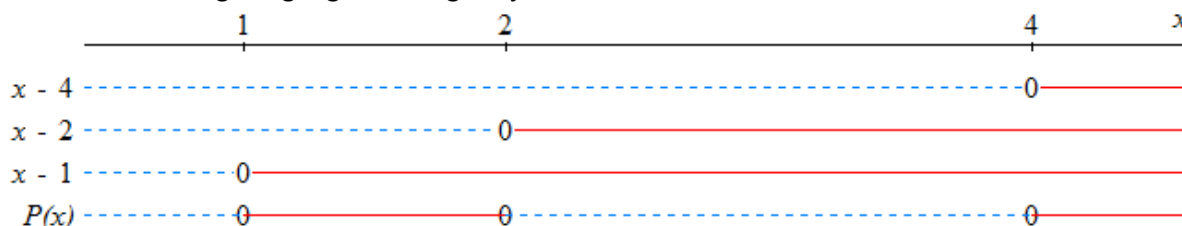
b) Utfører polynomdivisjonen $P(x) : (x-2)$ med $k = -8$:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 7x^2 + 14x - 8) : (x - 2) = x^2 - 5x + 4 \\ \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\ -5x^2 + 14x - 8 \\ \underline{-(-5x^2 + 10x)} \\ 4x - 8 \\ \underline{-(4x - 8)} \\ 0 \end{array}$$

Ser videre at siden $-1 - 4 = -5$ og $-1 \cdot (-4) = 4$ så er $x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$

Svar: Faktoriseringen blir $\underline{\underline{P(x) = (x-4)(x-2)(x-1)}}$

c) Bruker faktoriseringen og tegner fortegnsskjema:



Svar: Ulikheten $P(x) \leq 0$ er oppfylt for $\underline{\underline{x \in \langle \leftarrow, 1 \rangle \cup [2, 4]}}$

Oppgave 3

$$f(x) = x^2 e^{1-x^2}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

- a) Deriverer med produktregelen og kjerneregelen.

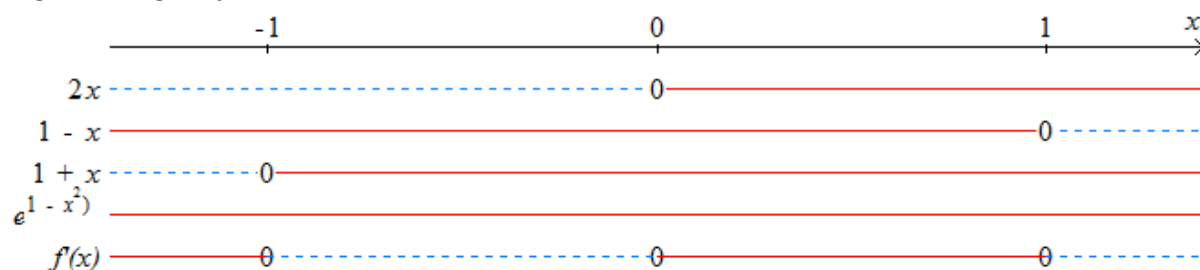
Finner først med kjerneregelen at $\frac{d}{dx}(e^{1-x^2}) = \frac{d}{dx}(1-x^2) \cdot \frac{d}{du}e^u = -2x \cdot e^u = -2xe^{1-x^2}$

Deriverer så:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) \cdot e^{1-x^2} + x^2 \cdot \frac{d}{dx}(e^{1-x^2}) = 2x \cdot e^{1-x^2} + x^2 \cdot (-2xe^{1-x^2}) = \underline{\underline{2x(1-x^2)e^{1-x^2}}}$$

- b) Faktoriserer $1-x^2 = (1-x)(1+x)$

Tegner fortegnsskjema:



Finner y-verdiene:

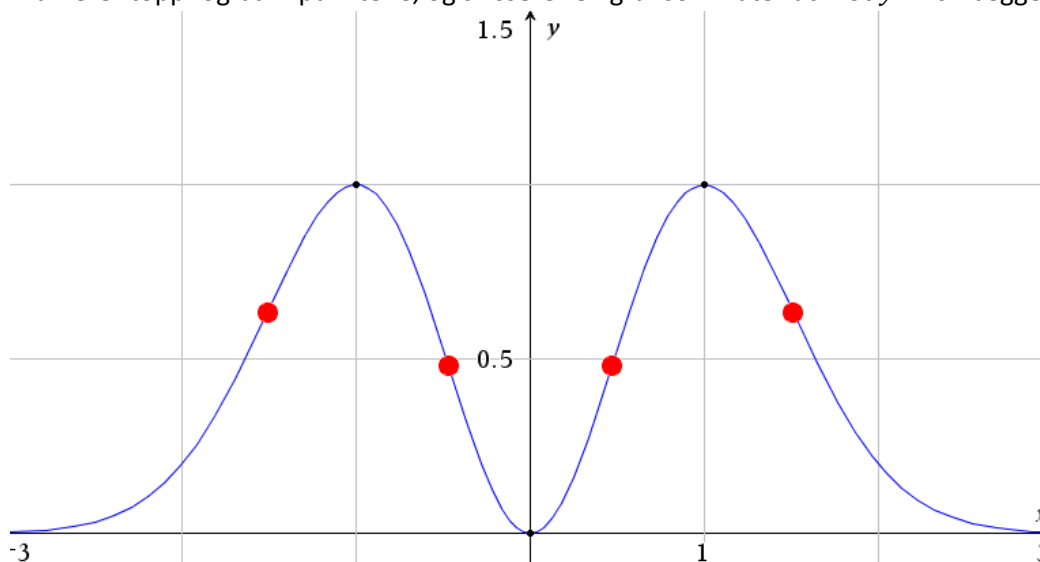
$$f(-1) = (-1)^2 \cdot e^{(1-(-1)^2)} = 1 \cdot e^0 = 1$$

$$f(0) = 0^2 \cdot e^0 = 0$$

$$f(1) = 1^2 \cdot e^{(1-1^2)} = 1 \cdot e^0 = 1$$

Svar: $f(x)$ har toppunkt i $(-1, 1)$ og $(1, 1)$ og bunnpunkt i $(0, 0)$

- c) Markerer topp- og bunnpunktene, og skisserer en graf som flater ut mot $y = 0$ i begge retninger:



- d) Vendepunktene finnes der grafen endrer krumning (går fra å vokse raskere til å vokse saktere, eller omvendt. Det er totalt fire vendepunkter, markert på skissen over.

Oppgave 4

a) $AH = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$, bruker Pytagoras: $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = \sqrt{3 \cdot 9} = \underline{\underline{3\sqrt{3}}}$

Siden $BEDC$ er et kvadrat må $BE = CB = 6$ og jeg kan igjen bruke Pytagoras,

$$CE = \sqrt{CB^2 + BE^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{2 \cdot 6^2} = 6\sqrt{2}, \text{ og jeg har at } CF = CE = \underline{\underline{6\sqrt{2}}}$$

Bruker Pytagoras og finner $HF = \sqrt{CF^2 - CH^2} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{72 - 27} = \sqrt{45} = \underline{\underline{3\sqrt{5}}}$

b) $\frac{AF}{AB} = \frac{AH+HF}{AB} = \frac{3+3\sqrt{5}}{6} = \frac{3(1+\sqrt{5})}{3 \cdot 2} = \underline{\underline{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$

Oppgave 5

$A(1, 1)$ $B(5, 2)$ $C(3, 5)$

a) Hvis punktene ligger på ei rett linje er vektorene mellom dem parallelle:

$$\overrightarrow{AB} = [5 - 1, 2 - 1] = [4, 1] \quad \text{og} \quad \overrightarrow{AC} = [3 - 1, 5 - 1] = [2, 4]$$

$\frac{4}{2} = 2 \neq \frac{1}{4}$, altså kan jeg ikke skrive $\overrightarrow{AB} = t \cdot \overrightarrow{AC}$, så punktene ligger ikke på en rett linje.

b) Har $D(0, t)$ og finner $\overrightarrow{CD} = [-3, t - 5]$ og $\overrightarrow{AD} = [-1, t - 1]$

Hvis $\angle CDA = 90^\circ$ så er skalarproduktet $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

$$\begin{aligned} [-3, t - 5] \cdot [-1, t - 1] &= 0 \\ -3 \cdot (-1) + (t - 5) \cdot (t - 1) &= 0 \\ 3 + t^2 - t - 5t + 5 &= 0 \\ t^2 - 6t + 8 &= 0 \end{aligned}$$

Ser at $-4 - 2 = -6$ og $-4 \cdot (-2) = 8$ og faktorerer:

$$(t - 4)(t - 2) = 0$$

$$\underline{\underline{t = 4}} \quad \vee \quad \underline{\underline{t = 2}}$$

c) For at $ABCD$ skal være et trapes må to vektorer være parallelle, enten $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ eller $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$

<p>Ser først på $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$:</p> $[4, 1] = s \cdot [-3, t - 5]$ <p>Ser fra x-koordinaten at $s = -\frac{4}{3}$, som gir</p> $-\frac{4}{3}(t - 5) = 1$ $t - 5 = -\frac{3}{4}$ $\underline{\underline{t = \frac{17}{4}}}$	<p>Ser så på $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$:</p> $s \cdot [-1, t - 1] = [-2, 3]$ <p>Ser fra x-koordinaten at $s = 2$, som gir</p> $2(t - 1) = 3$ $t - 1 = \frac{3}{2}$ $\underline{\underline{t = \frac{5}{2}}}$
--	--

Oppgave 6

Det skal trekkes uten tilbakelegging og rekkefølge er ikke viktig, så jeg bruker kombinasjoner.

Setter opp Pascals trekant ned til rad 8 for å finne koeffisientene:

							1							
							1	1						
						1	2	1						
					1	3	3	1						
				1	4	6	4	1						
			1	5	10	10	5	1						
		1	6	15	20	15	6	1						
	1	7	21	35	35	21	7	1						
1	8	28	56	70	56	28	8	1						

- a) 2 realfag og 2 andre fag gir

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{8}{2} = 10 \cdot 28 = \underline{280} \text{ mulige kombinasjoner}$$

- b) «Minst 2» realfag betyr 2, 3 eller 4 realfag.

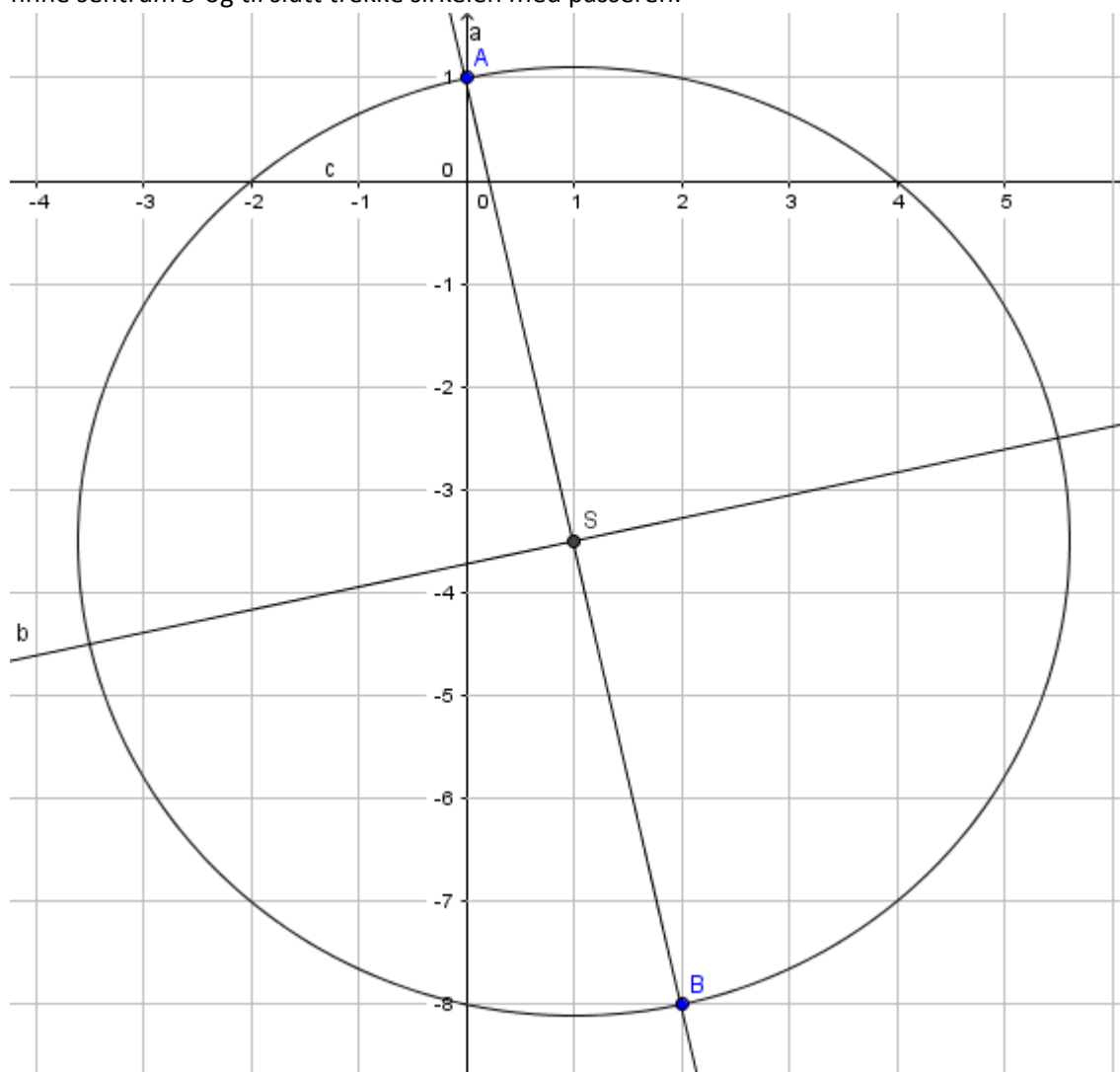
Regner alle mulighetene og får

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{8}{2} + \binom{5}{3} \cdot \binom{8}{1} + \binom{5}{4} \cdot \binom{8}{0} = 10 \cdot 28 + 10 \cdot 8 + 5 \cdot 1 = 280 + 80 + 5 = \underline{365} \text{ kombinasjoner}$$

Oppgave 7

- a) $f(x) = x^2 - 2x - 8$ betyr at punktene er $A(0, 1)$ og $B(2, -8)$.

Konstruerer sirkelen ved å trekke linja mellom punkt A og B , konstruere en midtnormal til den for å finne sentrum S og til slutt trekke sirkelen med passeren:



Svar: Nullpunktene til $f(x)$ er $(-2, 0)$ og $(4, 0)$

- b) $f(x) = x^2 + px + q$ gir punktene $A(0, 1)$ og $B(-p, q)$.

Siden AB er diagonalen må sentrum S ligge midt mellom A og B , og midtpunktformelen gir oss da at

$$S\left(\frac{0-p}{2}, \frac{1+q}{2}\right) = \underline{\underline{S\left(-\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2}\right)}}$$

Bruker \overrightarrow{AS} som radien,

$$\overrightarrow{AS} = \left[-\frac{p}{2} - 0, \frac{q+1}{2} - 1\right] = \left[-\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2} - \frac{2}{2}\right] = \left[-\frac{p}{2}, \frac{q-1}{2}\right]$$

$$r = |\overrightarrow{AS}| = \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{p^2}{2^2} + \frac{(q-1)^2}{2^2}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{p^2 + (q-1)^2}{4}}}}$$

- c) Bruker sirkelligningen $(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 = r^2$

$$\begin{aligned} \left(x - \left(-\frac{p}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{q+1}{2}\right)^2 &= \frac{p^2 + (q-1)^2}{4} \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{q+1}{2}\right)^2 &= \frac{p^2 + (q-1)^2}{4} \end{aligned}$$

abc -formelen forteller at nullpunktene til funksjonen $f(x)$ ligger i

$$\left(\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4 \cdot 1 \cdot q}}{2 \cdot 1}, 0\right)$$

Jeg ser om nullpunktene ligger på sirkelen ved å sette dem i sirkelligningen og se om den er oppfylt:

Første nullpunkt, $\left(\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, 0\right)$ gir:

$$\begin{aligned} \left(\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{q+1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q} + p}{2}\right)^2 + \left(-\frac{q+1}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{q+1}{2}\right)^2 = \frac{p^2 - 4q}{2^2} + \frac{q^2 + 2q + 1}{2^2} = \frac{p^2 + q^2 - 2q + 1}{4} = \frac{p^2 + (q-1)^2}{4} \end{aligned}$$

Andre nullpunkt, $\left(\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, 0\right)$ gir:

$$\begin{aligned} \left(\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{q+1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q} + p}{2}\right)^2 + \left(-\frac{q+1}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{-\sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{q+1}{2}\right)^2 = \frac{p^2 - 4q}{2^2} + \frac{q^2 + 2q + 1}{2^2} = \frac{p^2 + q^2 - 2q + 1}{4} = \frac{p^2 + (q-1)^2}{4} \end{aligned}$$

Begge punktene oppfyller sirkelligningen, og sirkelen skjærer x -aksen i nullpunktene til funksjonen f .

Del 2, alle hjelpemidler unntatt kommunikasjon

Oppgave 1

- a) Siden vi velger en av to bunker er $P(\bar{F}) = P(F) = \frac{1}{2}$.

I bunke A er 5 av 8 kort røde, og hvis det første er rødt er 4 av 7 røde, $P(R|F) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$

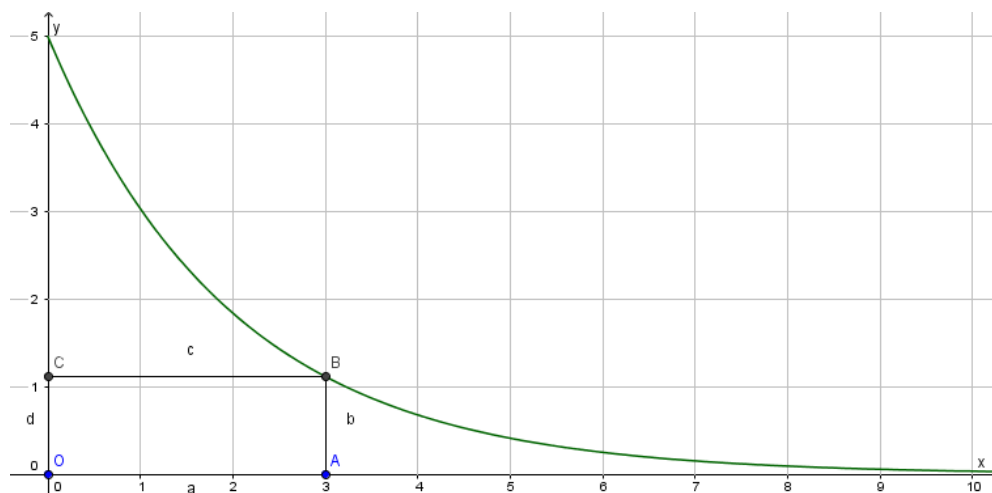
I bunke B er 3 av 7 kort røde, og hvis det første er rødt er 2 av 6 røde, $P(R|\bar{F}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$

b) $P(R) = P(R \cap F) + P(R \cap \bar{F}) = P(R|F) \cdot P(F) + P(R|\bar{F}) \cdot P(\bar{F}) = \frac{5}{14} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

c) $P(F|R) = \frac{P(R|F) \cdot P(F)}{P(R)} = \frac{\frac{5}{14} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{7}$

Oppgave 2

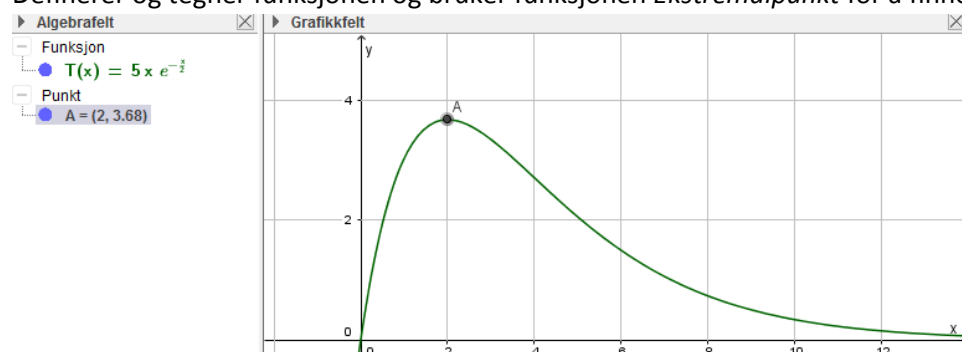
- a) Grafen er tegnet under, med et eksempelrektangel der $x = 3$.



- b) Rektangelet har en side som går langs x -aksen fra origo til x , så den har lengde x , mens den andre siden går langs y -aksen fra origo til $f(x)$, så den har lengde $5e^{-\frac{x}{2}}$, og arealet er produktet av disse,

$$T(x) = x \cdot 5e^{-\frac{x}{2}} = \underline{\underline{5xe^{-\frac{x}{2}}}}$$

- c) Definerer og tegner funksjonen og bruker funksjonen *Ekstremalpunkt* for å finne den maksimale verdien.



GeoGebra gir en desimalverdi i grafiske løsninger, jeg regner ut eksaktverdi $T(2) = 5 \cdot 2 \cdot e^{-\frac{2}{2}} = 10e^{-1}$.
Svar: Det største arealet rektangelet kan få er $T(2) = 10e^{-1}$.

Oppgave 3

- a) Definerer punktene og finner en retningsvektor \overrightarrow{BC} ved å bruke $Vektor[B, C]$.

Velger å bruke startpunkt B og får linja $\overrightarrow{OB} + t \cdot \overrightarrow{BC}$

$$l: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 5t \end{cases}$$

Punkt

- $A = (1, 3)$
- $B = (4, 0)$
- $C = (5, 5)$

Vektor

- $BC = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

- b) Et punkt på linja vil ha koordinater $P(4 + t, 5t)$ der $t \in \mathbb{R}$, og dermed er vektoren

$$\overrightarrow{AP} = [4 + t - 1, 5t - 3] = \underline{\underline{[3 + t, -3 + 5t]}}$$

- c) Hvis $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP}$ så er $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$. Definerer de to vektorene og løser vektorligningen i GeoGebra, og regner så ut $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ med t -verdien jeg fant:

5	$AB := Vektor[A, B]$	6	$AP(t) := Vektor[3+t, -3+5t]$
	$\rightarrow AB := \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$		$\rightarrow AP(t) := \begin{pmatrix} t+3 \\ 5t-3 \end{pmatrix}$
7	$Løs[AB \cdot AP(t)=0, t]$	8	$P := A + AP(3/2)$
	$\rightarrow \left\{ t = \frac{3}{2} \right\}$		$\rightarrow P := \left(\frac{11}{2}, \frac{15}{2} \right)$

Svar: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP}$ når $P\left(\frac{11}{2}, \frac{15}{2}\right)$

- d) $\angle BAP$ er det samme som vinkelen mellom vektorene \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{AP} .

Vet at for en gitt vinkel $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP})$ mellom vektorene så er $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AP}|} = \cos(\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}))$, løser ligninga og finner de tilhørende koordinatene:

$Løs(Skalarprodukt[AB, AP(t)]/(abs(AB)*abs(AP))=\cos(45^\circ), t)$

$\rightarrow \left\{ t = -3, t = \frac{3}{5} \right\}$

13	$A + AP(-3)$	14	$A + AP(3/5)$
	$\rightarrow (1, -15)$		$\rightarrow \left(\frac{23}{5}, 3 \right)$

Svar: Når $\angle BAP = 45^\circ$ kan punktet ha koordinatene $P_1(1, -15)$ eller $P_2\left(\frac{23}{5}, 3\right)$

Oppgave 4

- a) Definerer i geogebra, $f(x) := \frac{1}{x}$ og $A(r) := (r, f(r))$ og $B(s) := (s, f(s))$ og $C(t) := (t, f(t))$.

Så definerer jeg linja gjennom B og C :

5	Linje[B(s), C(t)] $\rightarrow y = -\frac{x}{st} + \frac{s+t}{st}$
---	---

Denne linja har stigningstall $-\frac{1}{st}$, så linja som står vinkelrett på den har stigningstall $a = -\frac{1}{-\frac{1}{st}} = st$.

Den skal gå gjennom $A(x_0, y_0) = A\left(r, \frac{1}{r}\right)$ og jeg bruker ettpunktsformelen:

$$y = ax + y_0 - ax_0 = st \cdot x + \frac{1}{r} - st \cdot r = \underline{\underline{st(x - r) + \frac{1}{r}}}$$

- b) Skjæringspunktet mellom de to linjene er

6	Skjæring[s*t*(x-r)+1/r, r*t*(x-s)+1/s] $\rightarrow \left\{ \left(-\frac{1}{rst}, -rst \right) \right\}$
---	--

Siden $f(x) = \frac{1}{x}$ så er $f\left(-\frac{1}{rst}\right) = -rst$, altså ligger skjæringspunktet P alltid på grafen til f .