Eksamen R1 vår 2016 løsning

Del 1, ingen hjelpemidler

Oppgave 1

a) $f(x) = -3x^2 + 6x - 4$

$$f'(x) = -3 \cdot 2x + 6 \cdot 1 - 0 = \underline{\underline{-6x + 6}}$$

b) $g(x) = 5\ln(x^3 - x)$, bruker kjerneregelen med $u = x^3 - x$ og $G(u) = 5\ln u$:

$$g'(x) = u' \cdot G'(u) = (3x^2 - 1) \cdot 5 \cdot \frac{1}{u} = \underline{\underline{\frac{5(3x^2 - 1)}{x^3 - x}}}$$

c) $h(x) = \frac{x-1}{x+1}$, bruker derivasjonsregelen for brøk

$$h'(x) = \frac{[x-1]' \cdot (x+1) - (x-1) \cdot [x+1]'}{(x+1)^2} = \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \underline{\underline{\frac{2}{(x+1)^2}}}$$

Oppgave 2

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x + k$$

a) P er delelig med $(x-2)$ hvis $P(2) = 0$

$$2^3 - 7 \cdot 2^2 + 14 \cdot 2 + k = 0$$
$$k = -8 + 28 - 28 = \underline{\underline{-8}}$$

$P(2) = 0$ bare hvis $k = -8$, altså er dette den eneste verdien av k som gjør at divisjonen går opp

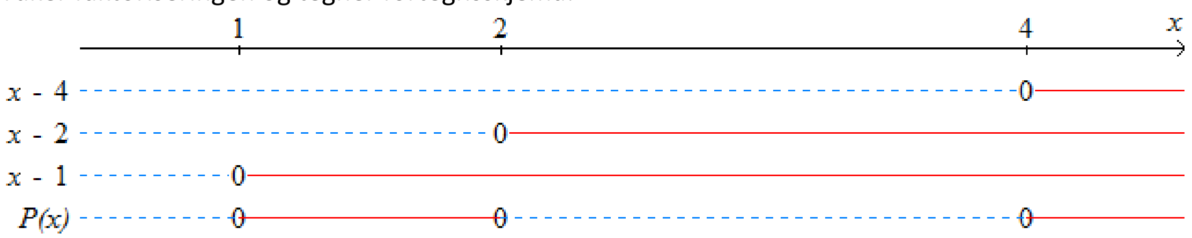
b) Utfører polynomdivisjonen $P(x) : (x-2)$ med $k = -8$:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 7x^2 + 14x - 8) : (x - 2) = x^2 - 5x + 4 \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
\quad -5x^2 + 14x - 8 \\
\underline{\quad -(-5x^2 + 10x)} \\
\qquad\qquad 4x - 8 \\
\underline{\qquad\qquad -(4x - 8)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Ser videre at siden $-1 - 4 = -5$ og $-1 \cdot (-4) = 4$ så er $x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$

Svar: Faktoriseringen blir $\underline{\underline{P(x) = (x-4)(x-2)(x-1)}}$

c) Bruker faktoriseringen og tegner fortegnsskjema:



Svar: Ulikheten $P(x) \leq 0$ er oppfylt for $\underline{\underline{x \in \langle \leftarrow, 1] \vee [2, 4]}}$

Oppgave 3

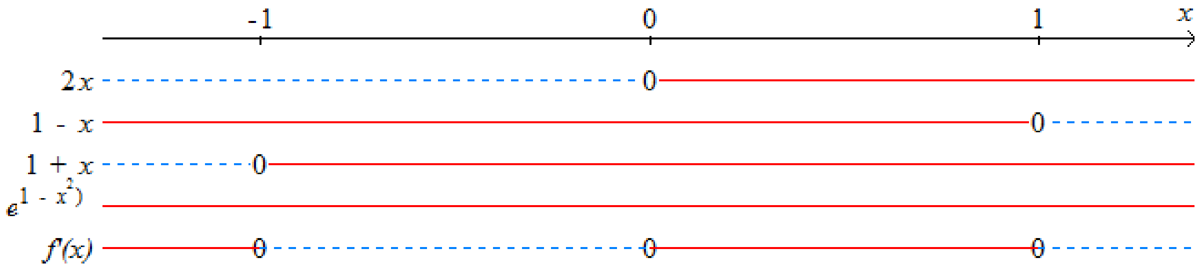
$$f(x) = x^2 e^{1-x^2} \qquad , \qquad D_f = \mathbb{R}$$

a) Deriverer med produktregelen og kjerneregelen.
Finner først med kjerneregelen at $\frac{d}{dx}\left(e^{1-x^2}\right) = \frac{d}{dx}(1-x^2) \cdot \frac{d}{du}e^u = -2x \cdot e^u = -2xe^{1-x^2}$
Deriverer så:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) \cdot e^{1-x^2} + x^2 \cdot \frac{d}{dx}\left(e^{1-x^2}\right) = 2x \cdot e^{1-x^2} + x^2 \cdot \left(-2xe^{1-x^2}\right) = \underline{\underline{2x(1-x^2)e^{1-x^2}}}$$

b) Faktoriserer $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$

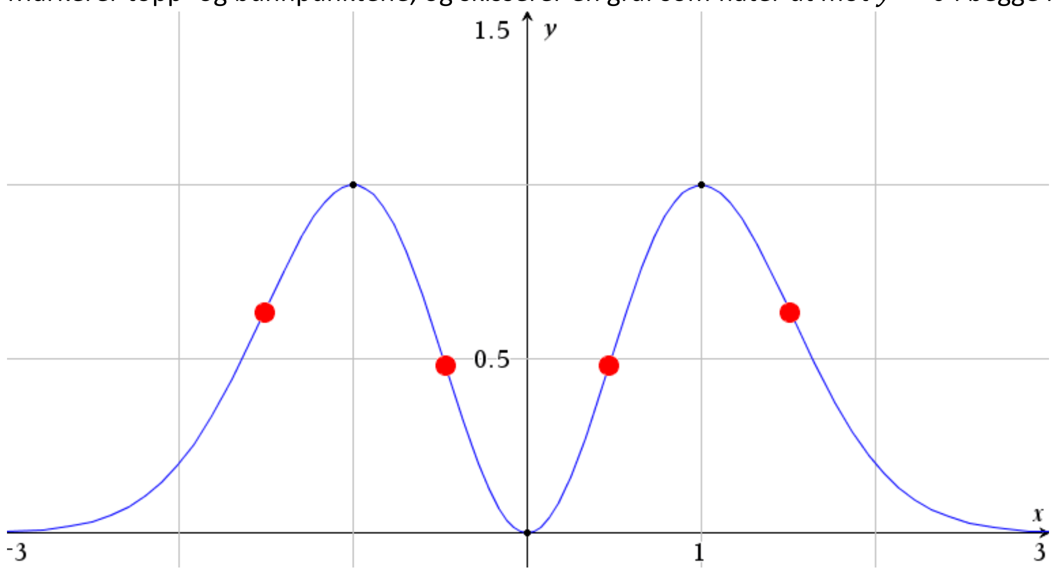
Tegner fortegnsskjema:



Finner y-verdiene:
$f(-1) = (-1)^2 \cdot e^{(1-(-1)^2)} = 1 \cdot e^0 = 1$
$f(0) = 0^2 \cdot e^0 = 0$
$f(1) = 1^2 \cdot e^{(1-1^2)} = 1 \cdot e^0 = 1$

Svar: <u>$f(x)$ har toppunkt i $(-1\,,1)$ og $(1\,,1)$ og bunnpunkt i $(0,0)$</u>

c) Markerer topp- og bunnpunktene, og skisserer en graf som flater ut mot $y = 0$ i begge retninger:



d) Vendepunktene finnes der grafen endrer krumning (går fra å vokse raskere til å vokse saktere, eller omvendt. Det er totalt fire vendepunkter, markert på skissen over.

Oppgave 4

a) $AH = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$, bruker Pytagoras: $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = \sqrt{3 \cdot 9} = \underline{\underline{3\sqrt{3}}}$

Siden $BEDC$ er et kvadrat må $BE = CB = 6$ og jeg kan igjen bruke Pytagoras,
$CE = \sqrt{CB^2 + BE^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{2 \cdot 6^2} = 6\sqrt{2}$, og jeg har at $CF = CE = \underline{\underline{6\sqrt{2}}}$

Bruker Pytagoras og finner $HF = \sqrt{CF^2 - CH^2} = \sqrt{\sqrt{72}^2 - \sqrt{27}^2} = \sqrt{72 - 27} = \sqrt{45} = \underline{\underline{3\sqrt{5}}}$

b) $\frac{AF}{AB} = \frac{AH+HF}{AB} = \frac{3+3\sqrt{5}}{6} = \frac{3(1+\sqrt{5})}{3 \cdot 2} = \underline{\underline{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$

Oppgave 5

$A(1\,,1)$ $\quad$ $B(5\,,2)$ $\quad$ $C(3\,,5)$

a) Hvis punktene ligger på ei rett linje er vektorene mellom dem parallelle:
$\overrightarrow{AB} = [5-1\,,2-1] = [4\,,1]$ og $\overrightarrow{AC} = [3-1\,,5-1] = [2\,,4]$
$\frac{4}{2} = 2 \neq \frac{1}{4}$, altså kan jeg ikke skrive $\overrightarrow{AB} = t \cdot \overrightarrow{AC}$, så <u>punktene ligger ikke på en rett linje.</u>

b) Har $D(0, t)$ og finner $\overrightarrow{CD} = [-3, t-5]$ og $\overrightarrow{AD} = [-1, t-1]$

Hvis $\angle CDA = 90°$ så er skalarproduktet $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

$$[-3\,,t-5] \cdot [-1\,,t-1] = 0$$
$$-3 \cdot (-1) + (t-5) \cdot (t-1) = 0$$
$$3 + t^2 - t - 5t + 5 = 0$$
$$t^2 - 6t + 8 = 0$$

Ser at $-4 - 2 = -6$ og $-4 \cdot (-2) = 8$ og faktoriserer:

$$(t-4)(t-2) = 0$$
$$\underline{\underline{t = 4}} \quad \vee \quad \underline{\underline{t = 2}}$$

c) For at $ABCD$ skal være et trapes må to vektorer være parallelle, enten $\overrightarrow{AB} || \overrightarrow{CD}$ eller $\overrightarrow{AD} || \overrightarrow{BC}$

Ser først på $\overrightarrow{AB} \vert\vert \overrightarrow{CD}$: $[4\,,1] = s \cdot [-3\,,t-5]$ Ser fra x-koordinaten at $s = -\frac{4}{3}$, som gir $-\frac{4}{3}(t-5) = 1$ $t - 5 = -\frac{3}{4}$ $\underline{\underline{t = \frac{17}{4}}}$	Ser så på $\overrightarrow{AD} \vert\vert \overrightarrow{BC}$: $s \cdot [-1\,,t-1] = [-2, 3]$ Ser fra x-koordinaten at $s = 2$, som gir $2(t-1) = 3$ $t - 1 = \frac{3}{2}$ $\underline{\underline{t = \frac{5}{2}}}$

Oppgave 6

Det skal trekkes uten tilbakelegging og rekkefølge er ikke viktig, så jeg bruker kombinasjoner.

Setter opp Pascals trekant ned til rad 8 for å finne koeffisientene:

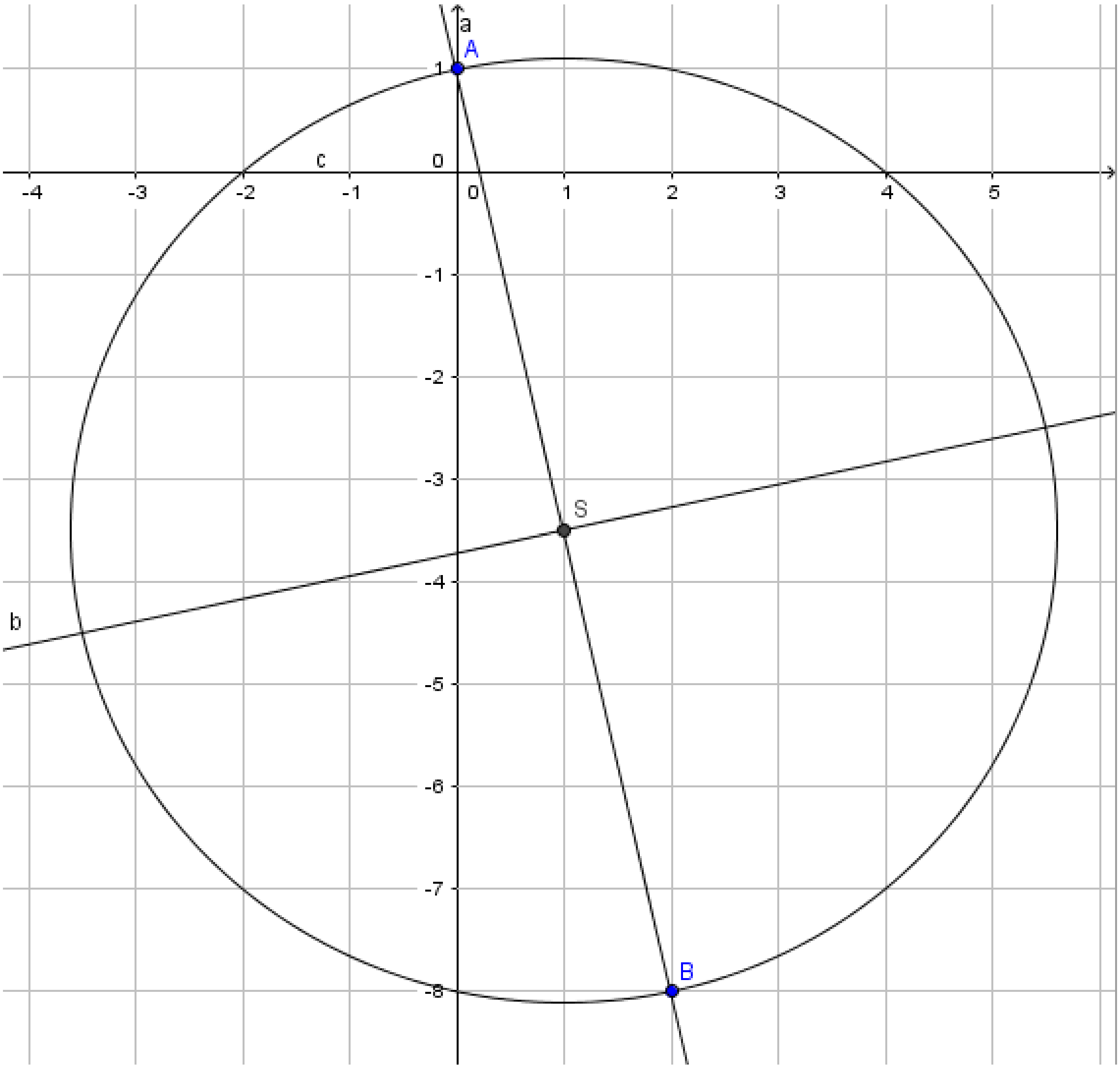
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

a) 2 realfag og 2 andre fag gir
$\binom{5}{2} \cdot \binom{8}{2} = 10 \cdot 28 = \underline{\underline{280}}$ mulige kombinasjoner

b) «Minst 2» realfag betyr 2, 3 eller 4 realfag.
Regner alle mulighetene og får
$\binom{5}{2} \cdot \binom{8}{2} + \binom{5}{3} \cdot \binom{8}{1} + \binom{5}{4} \cdot \binom{8}{0} = 10 \cdot 28 + 10 \cdot 8 + 5 \cdot 1 = 280 + 80 + 5 = \underline{\underline{365}}$ kombinasjoner

Oppgave 7

a) $f(x) = x^2 - 2x - 8$ betyr at punktene er $A(0\,,1)$ og $B(2\,,-8)$.
Konstruerer sirkelen ved å trekke linja mellom punkt A og B, konstruere en midtnormal til den for å finne sentrum S og til slutt trekke sirkelen med passeren:



Svar: <u>Nullpunktene til $f(x)$ er $(-2\,,0)$ og $(4\,,0)$</u>

b) $f(x) = x^2 + px + q$ gir punktene $A(0\,,1)$ og $B(-p\,,q)$.
Siden AB er diagonalen må sentrum S ligge midt mellom A og B, og midtpunktformelen gir oss da at

$$S\left(\frac{0-p}{2}\,,\frac{1+q}{2}\right) = \underline{\underline{S\left(-\frac{p}{2}\,,\frac{q+1}{2}\right)}}$$

Bruker $\overrightarrow{AS}$ som radien,

$$\overrightarrow{AS} = \left[-\frac{p}{2} - 0\,, \frac{q+1}{2} - 1\right] = \left[-\frac{p}{2}\,, \frac{q+1}{2} - \frac{2}{2}\right] = \left[\left[-\frac{p}{2}\,, \frac{q-1}{2}\right]\right]$$

$$r = \left|\overrightarrow{AS}\right| = \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{p^2}{2^2} + \frac{(q-1)^2}{2^2}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{p^2 + (q-1)^2}{4}}}}$$

c) Bruker sirkelligningen $(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 = r^2$

$$\left(x - \left(-\frac{p}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{q+1}{2}\right)^2 = \sqrt{\frac{p^2 + (q-1)^2}{4}}^2$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{q+1}{2}\right)^2 = \frac{p^2 + (q-1)^2}{4}$$

abc-formelen forteller at nullpunktene til funksjonen $f(x)$ ligger i

$$\left(\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4 \cdot 1 \cdot q}}{2 \cdot 1}\,, 0\right)$$

Jeg ser om nullpunktene ligger på sirkelen ved å sette dem i sirkelligningen og se om den er oppfylt:

Første nullpunkt, $\left(\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\,,\ 0\right)$ gir:

$$\left(\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{q+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q} + p}{2}\right)^2 + \left(-\frac{q+1}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{q+1}{2}\right)^2 = \frac{p^2 - 4q}{2^2} + \frac{q^2 + 2q + 1}{2^2} = \frac{p^2 + q^2 - 2q + 1}{4} = \frac{p^2 + (q-1)^2}{4}$$

Andre nullpunkt, $\left(\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\,,\ 0\right)$ gir:

$$\left(\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{q+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q} + p}{2}\right)^2 + \left(-\frac{q+1}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{-\sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{q+1}{2}\right)^2 = \frac{p^2 - 4q}{2^2} + \frac{q^2 + 2q + 1}{2^2} = \frac{p^2 + q^2 - 2q + 1}{4} = \frac{p^2 + (q-1)^2}{4}$$

Begge punktene oppfyller sirkelligningen, og <u>sirkelen skjærer x-aksen i nullpunktene til funksjonen f.</u>

Del 2, alle hjelpemidler unntatt kommunikasjon

Oppgave 1

a) Siden vi velger en av to bunker er $P(\bar{F}) = P(F) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$.

I bunke A er 5 av 8 kort røde, og hvis det første er rødt er 4 av 7 røde, $P(R|F) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \underline{\underline{\frac{5}{14}}}$

I bunke B er 3 av 7 kort røde, og hvis det første er rødt er 2 av 6 røde, $P(R|\bar{F}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{7}}}$

b) $P(R) = P(R \cap F) + P(R \cap \bar{F}) = P(R|F) \cdot P(F) + P(R|\bar{F}) \cdot P(\bar{F}) = \frac{5}{14} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{28} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

c) $P(F|R) = \frac{P(R|F) \cdot P(F)}{P(R)} = \frac{\frac{5}{14} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \underline{\underline{\frac{5}{7}}}$

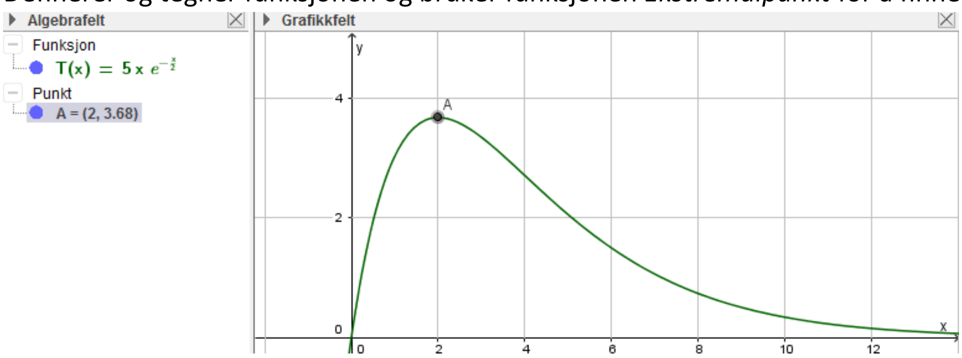
Oppgave 2

a) Grafen er tegnet under, med et eksempelrektangel der $x = 3$.

b) Rektangelet har en side som går langs x-aksen fra origo til x, så den har lengde x, mens den andre siden går langs y-aksen fra origo til $f(x)$, så den har lengde $5e^{-\frac{x}{2}}$, og arealet er produktet av disse,

$$T(x) = x \cdot 5e^{-\frac{x}{2}} = \underline{\underline{5xe^{-\frac{x}{2}}}}$$

c) Definerer og tegner funksjonen og bruker funksjonen *Ekstremalpunkt* for å finne den maksimale verdien.



GeoGebra gir en desimalverdi i grafiske løsninger, jeg regner ut eksaktverdi $T(2) = 5 \cdot 2 \cdot e^{-\frac{2}{2}} = 10e^{-1}$.
Svar: <u>Det største arealet rektangelet kan få er $T(2) = 10e^{-1}$.</u>

Oppgave 3

Punkt
A = (1, 3)
B = (4, 0)
C = (5, 5)
Vektor
$BC = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

a) Definerer punktene og finner en retningsvektor $\overrightarrow{BC}$ ved å bruke $Vektor[B, C]$.
Velger å bruke startpunkt B og får linja $\overrightarrow{OB} + t \cdot \overrightarrow{BC}$

$$l\colon \begin{cases} x = 4 + t \\ y = \quad 5t \end{cases}$$

b) Et punkt på linja vil ha koordinater $P(4 + t, 5t)$ der $t \in \mathbb{R}$, og dermed er vektoren

$$\overrightarrow{AP} = [4 + t - 1\,, 5t - 3] = \underline{\underline{[3 + t\,, -3 + 5t]}}$$

c) Hvis $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP}$ så er $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$. Definerer de to vektorene og løser vektorligningen i GeoGebra, og regner så ut $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ med t-verdien jeg fant:

5	AB:=Vektor[A, B] $\rightarrow \ \mathbf{AB} := \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$
6	AP(t):=Vektor[3+t, -3+5t] $\rightarrow \ \mathbf{AP(t)} := \begin{pmatrix} t + 3 \\ 5t - 3 \end{pmatrix}$
7	Løs[AB*AP(t)=0, t] $\rightarrow \ \left\{ t = \frac{3}{2} \right\}$
8	P:=A+AP(3/2) $\rightarrow \ P := \left(\frac{11}{2}, \frac{15}{2} \right)$

Svar: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP}$ når $P\,\underline{\underline{\left(\frac{11}{2}\,, \frac{15}{2}\right)}}$

d) $\angle BAP$ er det samme som vinkelen mellom vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AP}$.
Vet at for en gitt vinkel $\angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}\right)$ mellom vektorene så er $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AB}| \perp |\overrightarrow{AP}|} = \cos\left(\angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}\right)\right)$, løser ligninga og finner de tilhørende koordinatene:

	Løs(Skalarprodukt[AB, AP(t)]/(abs(AB)*abs(AP))=cos(45°),t) $\rightarrow \ \left\{ t = -3, t = \frac{3}{5} \right\}$
13	A+AP(-3) $\rightarrow \ (1, -15)$
14	A+AP(3/5) $\rightarrow \ \left(\frac{23}{5}, 3 \right)$

Svar: Når $\angle BAP = 45°$ kan punktet ha koordinatene $P_1\underline{\underline{(1\,, -15)}}$ eller $P_2\,\underline{\underline{\left(\frac{23}{5}\,, 3\right)}}$

Oppgave 4

a) Definerer i geogebra, $f(x) := \frac{1}{x}$ og $A(r) := (r, f(r))$ og $B(s) := (s, f(s))$ og $C(t) := (t, f(t))$.
Så definerer jeg linja gjennom B og C:

5	Linje[B(s), C(t)]
	$\rightarrow \quad y = -\frac{x}{s\,t} + \frac{s+t}{s\,t}$

Denne linja har stigningstall $-\frac{1}{st}$, så linja som står vinkelrett på den har stigningstall $a = -\frac{1}{-\frac{1}{st}} = st$.

Den skal gå gjennom $A(x_0, y_0) = A\left(r, \frac{1}{r}\right)$ og jeg bruker ettpunktsformelen:

$$y = ax + y_0 - ax_0 = st \cdot x + \frac{1}{r} - st \cdot r = \underline{\underline{st(x-r) + \frac{1}{r}}}$$

(Eventuelt kommandoen

8	NormalLinje[A(r), y = (-x) / (s t) + (s + t) / (s t)]
	$\rightarrow \quad y = s\,t\,x + \frac{-r^2\,s\,t + 1}{r}$

og så organisere den)

b) Skjæringspunktet mellom de to linjene er

6	Skjæring[s*t*(x-r)+1/r, r*t*(x-s)+1/s]
	$\rightarrow \quad \left\{\left(-\frac{1}{r\,s\,t}, -r\,s\,t\right)\right\}$

Siden $f(x) = \frac{1}{x}$ så er $f\left(-\frac{1}{rst}\right) = -rst$, altså <u>ligger skjæringspunktet P alltid på grafen til f.</u>