

Oppgave 1

a)

$$\frac{\sqrt{ab^4} \cdot \sqrt[3]{(ac)^6}}{\sqrt[4]{a^{10}} \cdot b^2} = \frac{a^{\frac{1}{2}} (b^4)^{\frac{1}{2}} (ac)^{\frac{6}{3}}}{a^{\frac{10}{4}} b^2} = \frac{a^{\frac{1}{2}} b^2 a^2 c^2}{a^{\frac{5}{2}} b^2} = a^{\frac{1}{2}+2-\frac{5}{2}} b^{2-2} c^2 = \underline{\underline{c^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2 \ln(2a) - \ln(4a^2) &= 2(\ln 2 + \ln a) - (\ln 4 + \ln a^2) = 2(\ln 2 + \ln a) - (\ln 4 + 2 \ln a) \\ &= 2 \ln 2 + 2 \ln a - \ln 4 - 2 \ln a = \ln 2^2 - \ln 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{c) } f'(x) = 3 \cdot 4x^3 - \sin(3x) \cdot 3 - 5 \cdot \frac{1}{x} = 12x^3 - 3 \sin(3x) - \frac{5}{x}$$

$$\text{d) } f'(x) = e^{2x} \cdot 2 \cdot \ln x + e^{2x} \cdot \frac{1}{x} = 2e^{2x} \ln x + \frac{e^{2x}}{x}$$

$$\text{e) } f'(x) = \frac{e^x(x^2+3) - e^x \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+3)}{(x^2+3)^2}$$

$$\text{f) } \int (x^4 + \sin(3x) - e^{2x}) dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}\cos(3x) - \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$\text{g) } \text{Bruker substitusjon med } u = x^7 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 7x^6.$$

$$\int x^6 e^{x^7} dx = \int x^6 e^u \frac{du}{7x^6} = \frac{1}{7} \int e^u du = \frac{1}{7} e^u + C = \frac{1}{7} e^{x^7} + C$$

Oppgave 2

a)

$$\sqrt{2x+1} + 1 = x$$

$$\sqrt{2x+1} = x - 1$$

\Downarrow

$$2x + 1 = (x - 1)^2$$

$$2x + 1 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 4$$

Sjekker svaret:

For $x = 0$:

$$V.S = \sqrt{2 \cdot 0 + 1} + 1 = 2$$

$$H.S = 0$$

$V.S \neq H.S$, så $x = 0$ er ikke en løsning.

For $x = 4$:

$$V.S = \sqrt{2 \cdot 4 + 1} + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$H.S = 4$$

$V.S = H.S$, så $x = 4$ er eneste løsning på denne likningen.

b)

$$\sin(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin^{-1} \sin(3x) = \sin^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad \vee \quad 3x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

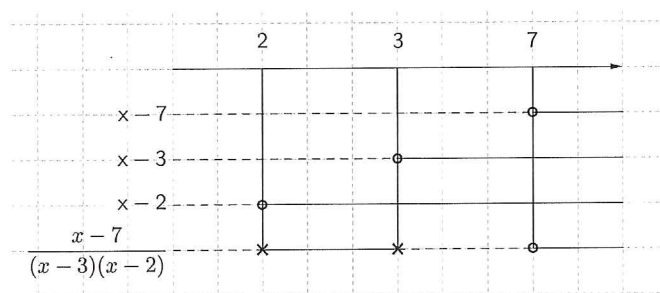
$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi k$$

$$\text{Løsning: } x \in \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{19\pi}{12} \right\}.$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x-2} &\leq \frac{x+1}{x-3} \\ \frac{x+3}{x-2} - \frac{x+1}{x-3} &\leq 0 \\ \frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-3)} - \frac{(x+1)(x-2)}{(x-3)(x-2)} &\leq 0 \\ \frac{x^2-9}{(x-2)(x-3)} - \frac{x^2-x-2}{(x-3)(x-2)} &\leq 0 \\ \frac{x-7}{(x-3)(x-2)} &\leq 0 \end{aligned}$$

Fortegnslinje:



$$\underline{\underline{\frac{x+3}{x-2} \leq \frac{x+1}{x-3} \text{ når } x \in \langle -, 2 \rangle \cup \langle 3, 7 \rangle}}$$

- d) Kvotienten k til rekken er $k = \frac{25x}{5} = 5x$.
 Rekken konvergerer dersom $-1 < k < 1 \Rightarrow -1 < 5x < 1$.
 Konvergensområdet til rekken er $-\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}$.
 Summen av rekken er gitt ved

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{5}{1-5x}$$

Oppgave 3

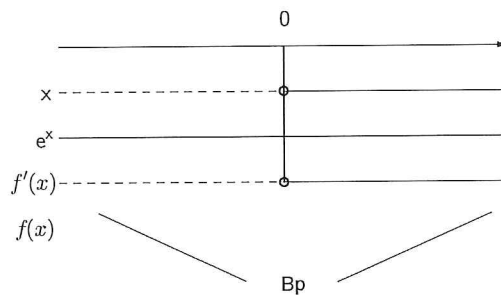
a) Løser:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ (x-1)e^x &= 0 \\ x-1 &= 0 \vee e^x = 0 \\ x &= \underline{\underline{1}} \vee \text{ingen løsning} \end{aligned}$$

b) Finner f' :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)' \\ &= 1e^x + (x-1)e^x \\ &= xe^x \end{aligned}$$

Fortegnslinje for f' :



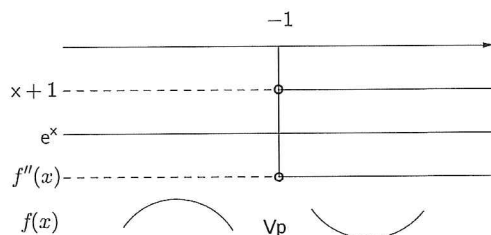
Koordinatene til bunnpunktet er:

$$\begin{aligned} (0, f(0)) &= (0, (0-1)e^0) \\ &= \underline{\underline{(0, -1)}} \end{aligned}$$

c) Finner f'' :

$$\begin{aligned} f''(x) &= (x)'e^x + x(e^x)' \\ &= 1e^x + xe^x \\ &= (1+x)e^x \end{aligned}$$

Fortegnslinje for f'' :



Koordinatene til vendepunktet er:

$$\begin{aligned} (-1, f(-1)) &= (-1, (-1-1)e^{-1}) \\ &= \underline{\underline{\left(-1, -\frac{2}{e}\right)}} \end{aligned}$$

d) Finner koordinatene til punktet ved:

$$(1, f(1)) = (1, (1-1)e^1) = (1, 0)$$

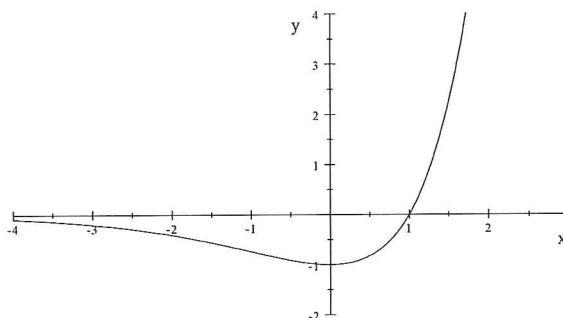
Stigningstallet a til tangenten er gitt ved:

$$\begin{aligned} a &= f'(1) \\ &= 1e^1 \\ &= e \end{aligned}$$

Bruker ettpunktsformelen for å finne likningen til tangenten:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= a(x - x_1) \\ y - 0 &= e(x - 1) \\ y &= \underline{\underline{ex - e}} \end{aligned}$$

e) Tegner grafen til funksjonen f .



f) Arealet A er gitt ved delvis integrasjon:

$$\begin{aligned} \int (x-1)e^x dx &= (x-1)e^x - \int 1e^x dx \\ &= (x-1)e^x - e^x + C \\ &= (x-2)e^x + C \end{aligned}$$

Hvilket gir:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 (x-1)e^x dx \\ &= [(x-2)e^x]_1^2 \\ &= (2-2)e^2 - (1-2)e^1 \\ &= \underline{\underline{e}} \end{aligned}$$

Oppgave 4

Vi velger en tilfeldig person.

- a) $P(\text{vi velger en gutt}) = \frac{15}{13+15} = \frac{15}{28}$
 $P(\text{vi velger en person som drikker kaffe}) = \frac{6+10}{28} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$
- b) $P(\text{vi velger en jente som drikker kaffe}) = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$
 $P(\text{kaffe} | \text{jente}) = \frac{6}{13}$

Oppgave 5

Gitt tre punkter $A(2, 1, 2)$, $B(0, -1, 0)$ og $C(-1, 10, 3)$

- a) $\vec{AB} = [0-2, -1-1, 0-2] = [-2, -2, -2]$
 $\vec{AC} = [-1-2, 10-1, 3-2] = [-3, 9, 1]$
 $|\vec{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{12}$
 $|\vec{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 9^2 + 1^2} = \sqrt{91}$
 $\angle BAC = \cos^{-1} \left(\frac{[-2, -2, -2] \cdot [-3, 9, 1]}{\sqrt{12}\sqrt{91}} \right) = 115,1^\circ$
- b) Arealet av trekanten ABC er gitt ved $\frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$.

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = [16, 8, -24]$$

Arealet av trekanten er: $\frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{16^2 + 8^2 + (-24)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{896} = 4\sqrt{14}$.

- c) En normalvektor for planet gjennom A, B og C er $\vec{AB} \times \vec{AC} = [16, 8, -24] = 8[2, 1, -3]$.

Har vist at $\vec{AB} \times \vec{AC} \parallel [2, 1, -3]$, så $[2, 1, -3]$ er normalvektor til planet.

- d) Setter inn $B = (x_0, y_0, z_0) = (0, -1, 0)$ og $\vec{n} = [a, b, c] = [2, 1, -3]$ inn i likning for plan:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$2(x - 0) + 1(y + 1) - 3(z - 0) = 0$$

$$2x + y + 1 - 3z = 0$$

Likningen for planet α er gitt ved: $2x + y - 3z = -1$

- e) Setter $x = 2$ inn i likningen for l : $2 = 1 + t \Leftrightarrow t = 1$.

Setter dette inn i likningen for z : $0 = 1 + 1k \Leftrightarrow k = -1$.

Oppgave 6

- a) Dersom strengen vi bruker til kvadratet har lengde x , må hver av sidene i kvadratet ha lengde $s = \frac{x}{4}$. Arealet av kvadratet blir da gitt ved $A_{kvadrat} = s^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2$.

Strengen har lengde 1 meter, så lengden av strengen vi bruker til sirkelen må bli $1 - x$. Dette blir da det samme som omkretsen av sirkelen. Vi vet at omkretsen av en sirkel er $2\pi r$, og vi kan sette opp $1 - x = 2\pi r$. Dette gir oss et uttrykk for radius $r = \frac{1-x}{2\pi}$.

Arealet av sirkelen er $A_{sirkel} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1-x}{2\pi}\right)^2$. Vi kan nå sette sammen arealet av kvadrat og sirkel:

$$A = A_{kvadrat} + A_{sirkel} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi \left(\frac{1-x}{2\pi}\right)^2$$

- b)

$$A = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi \left(\frac{1-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{16} + \frac{(1-x)^2}{4\pi}$$

$$A'(x) = \frac{2x}{16} + \frac{2(1-x)(-1)}{4\pi} = \frac{x}{8} - \frac{2-2x}{4\pi} = \frac{(4+\pi)x}{8\pi} - \frac{1}{2\pi}$$

Vi finner minste verdi der $A'(x) = 0$, dvs

$$\begin{aligned} \frac{4+\pi}{8\pi}x - \frac{1}{2\pi} &= 0 \\ \frac{4+\pi}{8\pi}x &= \frac{1}{2\pi} \\ x &= \frac{4}{4+\pi} \approx 0.56 \end{aligned}$$

$$A(0.56) = \frac{0.56^2}{16} + \frac{(1-0.56)^2}{4\pi} \approx 0.035$$

Vi må kutte strengen slik at lengden av strengen vi bruker til kvadratet er 0.56 m. Det minste samlede arealet blir da 0.035 m^2 . (Her begrunnes svaret med fortegnslinje for den deriverte, evt. vise at $A''(x) > 0$.)