BOKMÅL

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT220/MAUMAT644 - Algebra

Mandag 23. september 2013, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator i samsvar med fakultetets regler.

Oppgave 1

a. Uttrykket $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X_g|$ opptrer i Burnside sin formel. Hva er G og X_g, og hva kan en bruke uttrykket til å regne ut?

I en kinesisk restaurant er et sirkulært bord som kan roteres. Det er satt fire retter med mat på bordet (på vanlig symmetrisk vis). Der er seks mulige retter å velg mellom fra menyen. To måter å plassere rettene på regnes som like om den ene måten fås fra den andre ved å rotere bordet.

b. Bruk Burnsides formel til å regne ut antall mulige fordelinger av retter rundt bordet.

Oppgave 2

a. Gi alle abelske grupper av orden 8.

b. Hva er ordenen til $(10, 21)$ i $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{30}$? Finn alle elementer i $\mathbb{Z}_{100}$ av orden 20.

c. Gi en gruppe av orden 8 som ikke er abelsk, og angi spesielt to elementer σ og τ i denne gruppen slik at $\sigma\tau$ ikke er lik $\tau\sigma$.

Oppgave 3

a. Vis at hvert ideal i $\mathbb{Z}$ er et hovedideal (principal ideal).

b. Definer hva det vil si at et ideal er et primideal.

c. Angi primidealene i $\mathbb{Z}$, og begrunn hvorfor disse er primidealer.

Oppgave 4

La G være en gruppe av orden $|G| = 595 = 5 \cdot 7 \cdot 17$.

a. Finn antallet av mulige Sylow-p undergrupper av G for hver av primtallene $5, 7$ og 17.

b. Vis at G har en normal Sylow-5 undergruppe og en normal Sylow p-undergruppe for minst et av primtallene $p = 7$ eller 17.

c. La K være en normal Sylow-5 undergruppe av G. Vis at G/K er abelsk. (Hint: G/K er en gruppe av orden $7 \cdot 17$.)

Oppgave 5

La $i \in \mathbf{C}$ være det imaginære tallet med $i^2 = -1$.

a. Hva er graden til utvidelsen $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$?

b. Hva er graden til utvidelsen $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(i, i\sqrt{2})$?

c. Vis at $\mathbb{Q}(i\sqrt{2}+i) = \mathbb{Q}(i\sqrt{2}, i)$. Vis at $i\sqrt{2}+i$ er et nullpunkt til x^4+6x^2+1 og bruk det til å vise at x^4+6x^2+1 er irredusibelt over $\mathbb{Q}$.

Oppgave 6

a. La $p(x) = x^3 - x^2 - 1$ i $\mathbb{Z}_5[x]$. Vis at $p(x)$ er et irredusibelt polynom i denne ringen.

b. La $F = \mathbb{Z}_5[x]/\langle x^3 - x^2 - 1\rangle = \mathbb{Z}_3(\alpha)$ der $\alpha = x + \langle x^3 - x^2 - 1\rangle$. Hvorfor er F en kropp? Hvor mange elementer har F? Angi en basis for F over $\mathbb{Z}_5$.

c. Uttrykk α^4, α^5 og $1/(\alpha+1)$ ved hjelp av basisen du fant i del b.

d. Er $x^3 - x^2 - 1$ et irredusibelt eller redusibelt polynom i $F[x]$? Hvis det er irredusibelt, forklar hvorfor. Hvis det er redusibelt, angi en faktorisering av polynomet.

Gunnar Fløystad Johan Lie