BOKMÅL

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT220/MAUMAT644 - Algebra

Fredag 3. juni 2016, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator i samsvar med fakultetets regler.
Oppgavesettet er på 2 sider. Alle 20 underpunkter vektes likt.

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1

Betrakt følgende mengde

$$\mathbb{S} := \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

med følgende operasjon

$$(\cos\theta_1, \sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2, \sin\theta_2) := (\cos(\theta_1+\theta_2), \sin(\theta_1+\theta_2))$$

(a) Vis at $(\mathbb{S}, \cdot)$ er en gruppe.

(b) Avgjør om $\mathbb{S}$ er abelsk.

(c) Vis at $\mathbb{S}$ er isomorf med $\mathbb{R}/\langle 2\pi\rangle$. (**Hint**: Vis at $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ definerer en gruppehomomorfi $\mathbb{R} \to \mathbb{S}$ og anvend fundamentalteoremet for gruppehomomorfier.)

(d) Vis at $\mathbb{S}$ innholder en abelsk undergruppe H av orden 12. Bruk strukturteoremet for endelig genererte grupper til å bestemme H.

Oppgave 2

La G være den minste undergruppen av S_4 som innholder permutasjonene $\tau_1 = (2,3,4)$, $\tau_2 = (1,3,4)$, $\tau_3 = (1,2,4)$, $\tau_4 = (1,2,3)$ og $\mu_{12} = (1,2)(3,4)$, $\mu_{13} = (1,3)(2,4)$, $\mu_{14} = (1,4)(2,3)$.

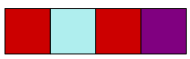
(a) Finn ordenen til G. Lag en liste over alle elementene i G ved å bruke symbolene over og angi de korresponderende permutasjonene. Finn ordenen til hvert av elementene i G.

(b) Vis at $H = \{\mathrm{id}, \mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{14}\}$ er en abelsk undergruppe av G.

(c) Anta g og h er to elementer i en gruppe. Vis at ordenen til h er lik ordenen til ghg^{-1}. Forklar hvorfor H er en normal undergruppe av G.

(d) Forklar hvorfor kvotientgruppen G/H er abelsk.

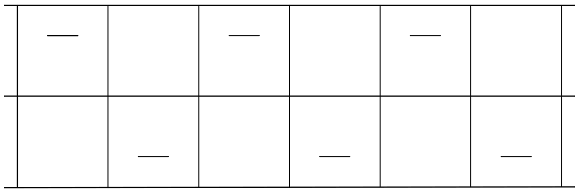
(e) Fargede 4-striper er satt sammen av fire fargede kvadratiske fliser, slik som:



Det er k farger å velge blant. La X være mengden av alle fargede 4-striper. Da virker G på X ved å permutere flisene. Bruk Burnsides teorem til å bestemme antallet baner for G-virkningen. (For $k = 3$ er svaret 15.)

Oppgave 3

Betrakt frisemønsteret:



(a) Bestem hvilke symmetrier (rotasjoner, speilinger, glidespeilinger eller translasjoner) frisen tillater.

(b) Avgjør om frisens symmetrigruppe er abelsk.

Oppgave 4

Avgjør om utsagnet er rett eller galt (alle svar skal begrunnes).

(a) $\mathbb{Q}[x]/\langle x^3 - 84x + 28\rangle$ har ingen null-divisorer.

(b) Anta $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ og $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Da vil $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$.

(c) Ringen $\mathbb{Z}_{12}$ innholder ingen primidealer.

(d) Ligningen $13x = 2$ har ingen løsninger i $\mathbb{Z}_{42}$.

(e) Tallet

$$\sqrt[4]{3} + \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{\frac{1}{3} + \sqrt{5} + \sqrt{11}}{1 + \sqrt{7 - \sqrt{47}}}}$$

er ikke konstruerbart med passer og umerket linjal.

Oppgave 5

La $f = x^3 + 4x + 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$.

(a) Forklar hvorfor $F = \mathbb{Z}_5[x]/\langle f\rangle$ er en kropp («field»).

(b) Vis at $\varphi\colon \mathbb{Z}_5[x] \to F$ definert ved at $\varphi(g) = g + \langle f\rangle$ er en ringhomomorfi. Finn kjernen til φ.

(c) Anta g og h er to elementer i $\mathbb{Z}_5[x]$ hvor g har resten $2x + 1$ og h har resten $3x^2 + x + 4$ ved divisjon med f. Finn restene til $g + h$ og $g \cdot h$ ved divisjon med f.

(d) La $\alpha = x + \langle f\rangle \in F$ og $\gamma = (2x + 1) + \langle f\rangle \in F$. Da er $\mathscr{B} = \{1, \alpha, \alpha^2\}$ en basis for F over $\mathbb{Z}_5$ (dette kan du ta for gitt). Uttrykk γ^{-1} i basisen $\mathscr{B}$.