Eksamen R1 VÅR 2007 Løsning

Delprøve 1

Oppgave 1

a)

$$f(x) = x^2 * e^{2x}$$
$$f'(x) = \left(x^2\right)' * e^{2x} + x^2 * \left(e^{2x}\right)' = 2x * e^{2x} + x^2 * 2e^{2x} = 2xe^{2x}(1 + x)$$

b)

$$g(x) = x^4 - 4x^3$$
$$g'(x) = (x^4)' - (4x^3)' = 4x^3 - 4 * 3x^2 = 4x^2(x - 3)$$

$$g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2(x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 = 0 \ \vee \ x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow x \in \{0\,,\ 3\}$$

$$g'(x) < 0 \iff x < 0 \quad \wedge \quad 0 < x < 3$$
$$g'(x) > 0 \iff x > 3$$

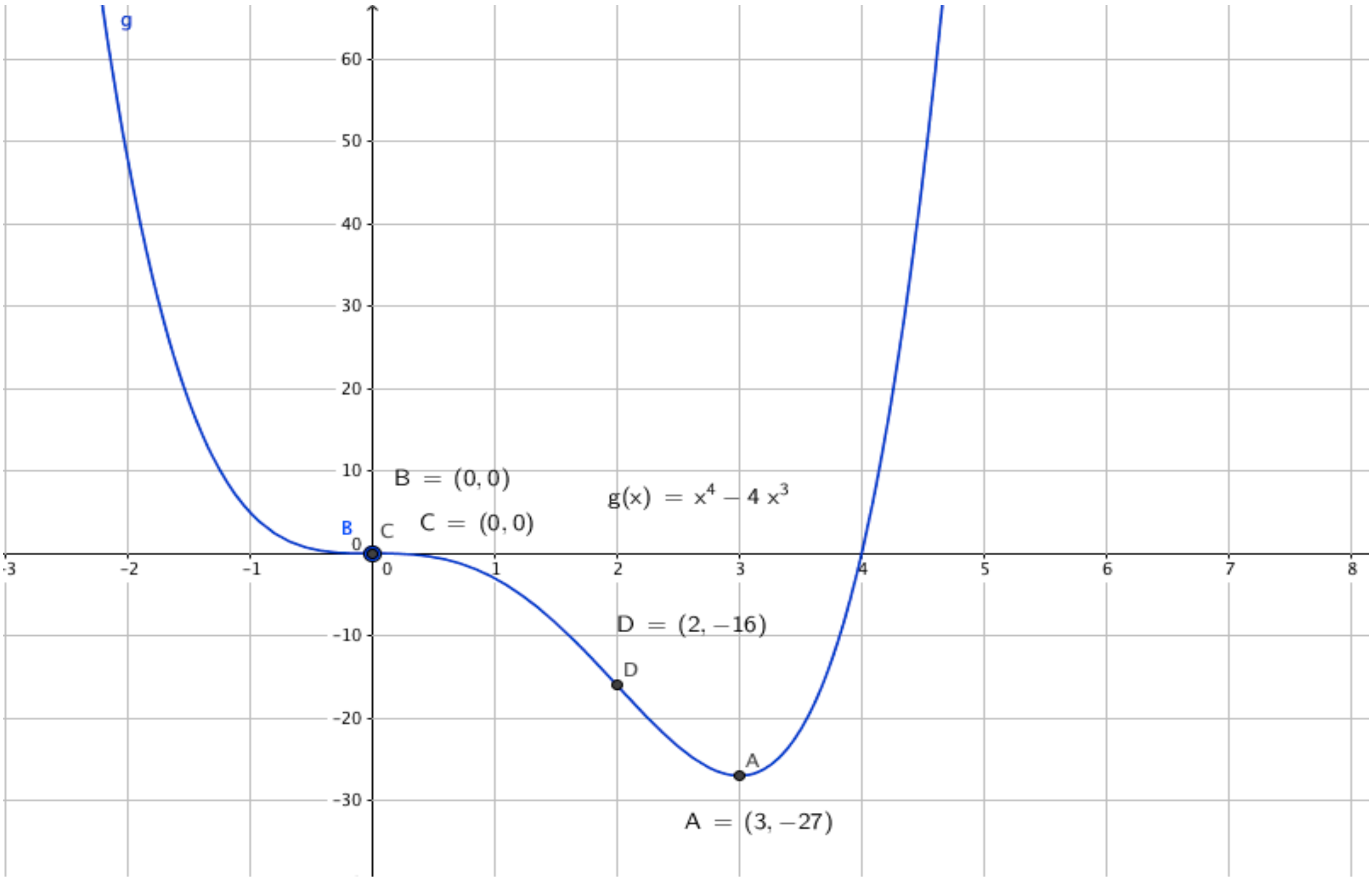
Terassepunkt: $(0, g(0) = (0, 0)$
Bunnpunkt:$(3, g(3) = (3, -27)$

$$g''(x) = (4x^3)' - (12x^2)' = 4 * 3x^2 - 12 * 2x = 12x(x-2)$$
$$g''(x) = 0 \iff 12x(x-2) = 0 \iff 12x = 0 \ \vee \ x - 2 = 0 \iff x \in \{0\,,\ 2\}$$

$$g''(x) < 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 24x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$
$$g''(x) > 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 24x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \wedge x > 2$$

Vendepunkt:

$$Vendepunkt_1 = (0, g(0) = (0, 0)$$
$$Vendepunkt_2 = (2, g(2) = (2, -16)$$



Dette er ikke en skisse av grafen, men grafen er laget av dynamisk programvare for å illustrere hvordan den bør se ut. Man skal ha med stasjonære punkter (bunnpunkt og terassepunkt) i tillegg til nullpunkter.

c)

$$\frac{x^2+x}{x^2-4}-\frac{2}{4-2x}$$

$$\frac{x^2+x}{x^2-4}-\frac{2}{4-2x}=\frac{x^2+x}{(x+2)(x-2)}-\frac{2}{2(-x+2)}=\frac{x^2+x}{(x+2)(x-2)}-\frac{1}{-1(x-2)}=\frac{x^2+x}{(x+2)(x-2)}+\frac{1}{1(x-2)}=\frac{x^2+x}{(x+2)(x-2)}+\frac{1*(x+2)}{(x-2)*(x+2)}=\frac{x^2+2x+2}{x^2-4}$$

d)

$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
$P(1) = 1^3 + 2 * 1^2 - 1 - 2 = 3 - 3 = 0$
$P(1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P(x) \quad | \quad (x - 1)$

$(x^3 + 2x^2 - x - 2) \;:\; (x - 1) = \; x^2 + 3x + 2$
$-(x^3 - x^2)$
$3x^2 - x - 2$
$-(3x^2 - 3x)$
$2x - 2$
$-(2x - 2)$
0

$P(x) = (x^3 + 2x^2 - x - 2) = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$
$(x^2 + 3x + 2) = (x \;() + 1)(x \;() + 2)$

Ser at c-leddet og b-leddet er positivt og således får vi at :

$(x^2 + 3x + 2) = (x + 1)(x + 2)$
$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$

Alternativt kan dette løses med abc-formelen:

$P(x) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x - 1)(x + 1)(x + 2) \leq 0$
$P(x) \leq 0 \; når \; x \leq -2 \;\; og \; når \; -1 \leq \; x \; \leq \; 1$

Alternativt skrivemåte

$P(x) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \; \in <\leftarrow, -2] \quad \wedge \quad [-1, 1]$

e)

1)

$$\vec{r}'(t) = \vec{v}(t) = \left[(t^2 + 2t)', \; (\frac{1}{2}t^2)'\right] = \left[2 * t^{2-1} + 2 * 1 * t^{1-1}, \; \frac{1}{2} * 2 * t^{2-1}\right] = [2t + 2, t]$$

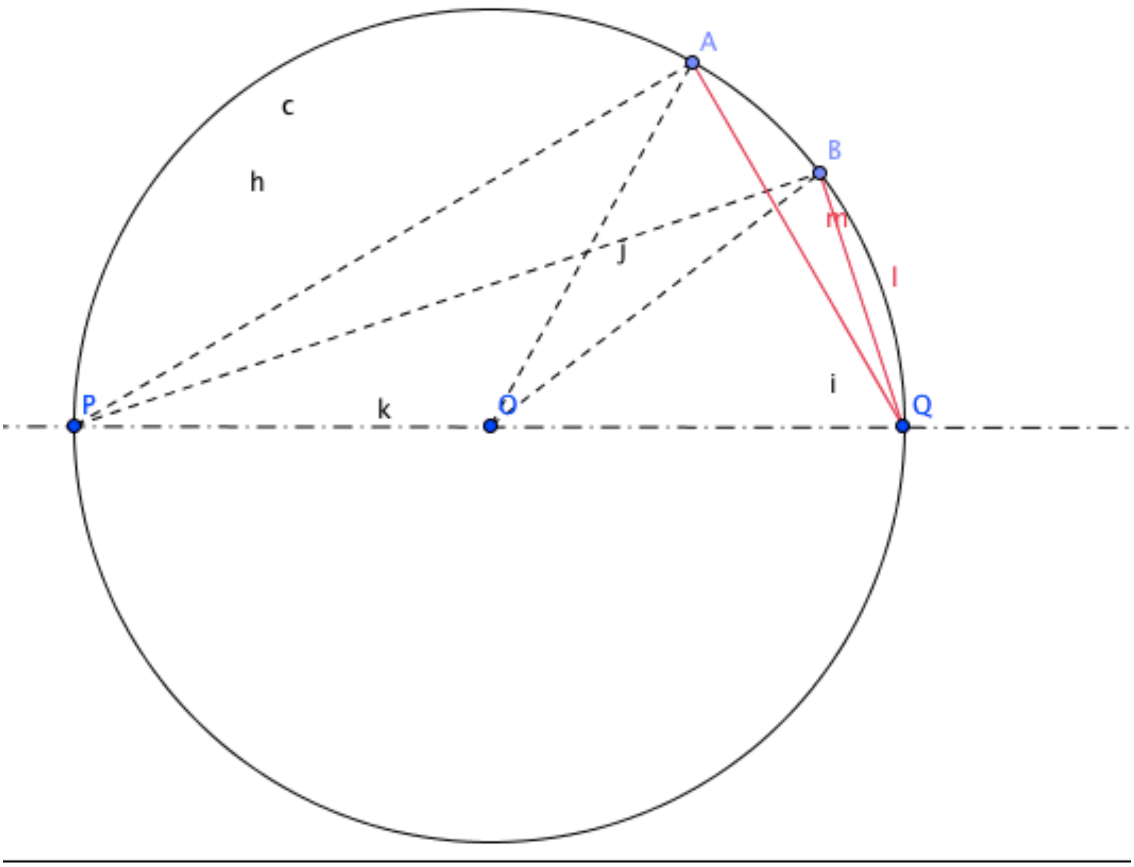
$$\vec{r}''(t) = \vec{v}'(t) = \vec{a}(t) = \left[(2t + 2)' \;, \; (t)'\right] = [2, 1]$$

2)

$$\vec{v}(t) \perp \; \vec{a}(t) \Leftrightarrow \vec{v}(t) * \vec{a}(t) = 0 \Leftrightarrow [2t + 2, t] * [2, 1] = 0 \Leftrightarrow (2t + 2)2 + t * 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{4}{5}$$

a)

$\angle AQB$ er en periferivinkel som spenner over buen AB



b)

I en likebeint trekant har to sider samme lengde i tillegg til at de to vinklene som står ovenfor de likebeinte sidene er like store (grunnvinklene).

$\triangle POA$ er likebeint ettersom senteret O er det geometriske punktet som har like lang avstand fra punkter på sirkelperiferien. Dermed får vi at $PO = OA = Radius$

$\triangle POB$ er likebeint av samme grunn fordi $PO = OB = Radius$

c)

I $\triangle PQB$ er vinkelsummen:

$$\angle PBO + \angle BPO + \angle POB = 180^\circ \iff 2 * \angle BPO + \angle POB = 180^\circ \iff \angle POB = 180^\circ - 2 * \angle BPO$$

$$\angle BOQ = 180^\circ - \angle POB = 180 - (180^\circ - 2 * \angle BPO) = 2 * \angle BPO$$

I $\triangle POA$ er vinkelsummen gitt ved:

$$\angle APO + \angle AOP + \angle PAO = 180^\circ \iff 2 * \angle APO + \angle AOP = 180^\circ \iff \angle AOP = 180^\circ - 2 * \angle APO$$
$$\angle AOQ = 180^\circ - \angle AOP = 180^\circ - (180^\circ - 2 * \angle APO) = 2 * \angle APO$$

d)

Fra c) ser vi at sentralvinkelen er dobbelt så stor som periferivinkelen som spenner over samme buen. Eller sagt på en annen måte: Periferivinkelen vil alltid være halvparten så stor som sentralvinkelen som spenner over samme bue:

$$\angle BOQ = 2 * \angle BPO \iff \angle BPO = \frac{1}{2}\angle BPQ \iff sentralvinkel = \frac{1}{2}\ periferivinkel$$

$$\angle AOQ = 2 * \angle APO \iff \angle APO = \frac{1}{2}\angle AOQ \iff Periferivinkel = \frac{1}{2}\ sentralvinkel$$

Delprøve 2

Oppgave 3

a)

a) Dette er en hypergeometrisk fordeling:

Antall elever=23
Gutter = 9
Jenter = 14
Valg av lag: 6 elever

Uordnet utvalg uten tilbakelegging:

$$P = \frac{\binom{9}{3} * \binom{14}{3}}{\binom{23}{6}} = \frac{1456}{4807} \approx 0.30$$

b)

Starter med å organisere all informasjon i en krysstabell:

	Gutter	Jenter	Sum
Spiller volleyball	63	47	110
Spiller ikke volleyball	285	341	626
Sum	348	388	736

$P(A \cap B)$ er sannsynligheten for at personen er både en gutt og spiller volleyball

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B \mid A) = \frac{348}{736} * \frac{63}{348} = \frac{63}{736} \approx 0.08$$

Alternativt kan vi bare se svaret rett ut fra tabellen :

$$P(A \cap B) = \frac{63}{736} \approx 0.08$$

c)

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) * P(B \mid A) + P(\bar{A}) * P(B \mid \bar{A}) = \frac{348}{736} * \frac{63}{348} + \left(1 - \frac{348}{736}\right) * \frac{47}{388} = \frac{55}{368} \approx 0.15$$

Vi kan igjen bare bruke tabellen vår og finne sannsynligheten for at personen spiller volleyball:

$$P(B) = \frac{spiller\ volleyball}{Sum} = \frac{110}{736} = \frac{55}{368} \approx 0.15$$

Vi har allerede fra fra b) $P(B \mid A)$, men vi kan også bruke Bayes' setning:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) * P(A \mid B)}{P(A)} = \frac{\frac{55}{368} * \frac{63}{110}}{\frac{348}{736}} = \frac{21}{116} \approx 0.18$$

$$P(B \mid A) \neq P(A) \iff avhengige\ hendelser$$

d)

$$P = P(\bar{A} \mid B) * P(\bar{A} \mid \bar{B}) = \frac{47}{110} * \frac{341}{626} = \frac{1457}{6260} \approx 0.23$$

Oppgave 4

Alternativ I

a)

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{(-1)^3+1}{(-1)^2-1} = \frac{-1+1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+1}{x-1} = \frac{(-1)^2-(-1)+1}{-1-1} = -\frac{3}{2} = -1.5$$

Kan alternativ benytte seg av L'Hôpitals regel (selv om det ikke er pensum i VGS)

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1}\frac{(x^3+1)'}{(x^2-1)'} = \lim_{x\to -1}\frac{3x^2}{2x} = \frac{3*(-1)^2}{2*(-1)} = -\frac{3}{2} = -1.5$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{1^3+1}{1^2-1} = \frac{2}{0}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x+1)}{(x-1)} = \frac{1^2-1+1}{1-1} = \frac{1}{0}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^3+1}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3+1}{x^2-1} = \infty$$

Grenseverdien divigerer mot +- uendelig $\rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)$ eksisterer ikke.

<u>Vi finner den vertikale asymptoten ved å skjekke bruddpunktene i den rasjonale funksjonen:</u>

<u>Vi finner når nevneren er lik null.</u>

$$x^2-1=0 \iff (x-1)(x+1)=0 \iff x=1 \quad \vee \quad x=-1$$

Kandidat 1

Vi undersøker først om x=1 er en aktuell kandidat for en vertikal asymptote:

$$(1)^3+1 = 1+1 = 2.$$

Telleren er et tall som er forskjellig fra null og samtidig er nevneren null for $x = 1$.

Det betyr at $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x^2-1}$ ikke eksisterer og funksjonsverdiene vokser over alle grenser.

Altså $x \to 1 \implies f(x) \to \pm\infty$

Linja $x = 1$ er derfor en vertikal asymptote for f

Kandidat 2

Vi undersøker om $x = -1$ er en aktuell kandidat for en vertikal asymptote:

$$(-1)^3+1 = -1+1 = 0$$

Både telleren og nevner er null for $x = -1$. Funksjonen vil da nærme seg en grenseverdi når x nærmer seg -1 .

Grenseverdien kan vi finne slik:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+1}{x-1} = \frac{(-1)^2-(-1)+1}{-1-1} = -\frac{3}{2} = -1.5$$

(Fra oppgave a).

Grenseverdien eksisterer og vi får ingen asymptote for $x = -1$

f har da ingen vertikal asymptote for $x = -1$

b)

Anvender brøkregelen på f(x)=(x³+1)/(x²-1)

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(x^3+1)' * (x^2-1) - (x^3+1) * (x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{(3x^2)(x^2-1) - (x^3+1)(2x)}{(x^2-1)^2} =$$
$$\frac{3x^2}{x^2-1} - \frac{2x(x^3+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}\frac{x(x-2)}{x^2-2x+1} = \frac{x(x-2)}{x(x-2)+1} = \frac{(x(x-2)+1)}{(x(x-2)+1)} -$$
$$\frac{x}{x(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} - \frac{x}{x(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2} = 1 \Longleftrightarrow 1 = x^2 - 2x + 1 \Longleftrightarrow x(x-2) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \ \vee \ x - 2 = 0 \Longleftrightarrow \ x = 0 \ \vee \ x = 2$$

(Sjekk fortegnslinje). → Bunnpunkt for $x = 2$ og toppunkt for $x = 0$
$f_{maks} = (0, f(0)) = (0, -1)$
$f_{min} = (2, f(2)) = (2, 3)$

$$f''(x) = (1)' - \frac{(1)'(x-1)^2 - 1((x-1)^2)'}{((x-1)^2)^2} = \frac{2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$$

$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = 0 \Longleftrightarrow L = \emptyset$. . Har ingen vendepunkter

c)

$$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{(x-1)^2}\right)' = (1)' - \left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)' = 0 - \frac{(1)' * (x-1)^2 - 1 * ((x-1)^2)'}{((x-1^2))^2} = \frac{0 * (x-1)^2 - 1(2x-2) * 1}{(x-1)^4} = \frac{-2x+2}{(x-1)^4} = \frac{-2(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2}{(x-1)^3}$$

$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow -\dfrac{2}{(x-1)^3} = 0 \Longrightarrow L = \theta$

$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow -\dfrac{2}{(x-1)^3} > 0 \Longleftrightarrow x < 1$

$f''(x) < 0 \Longleftrightarrow -\dfrac{2}{(x-1)^3} < 0 \Longleftrightarrow x > 1$

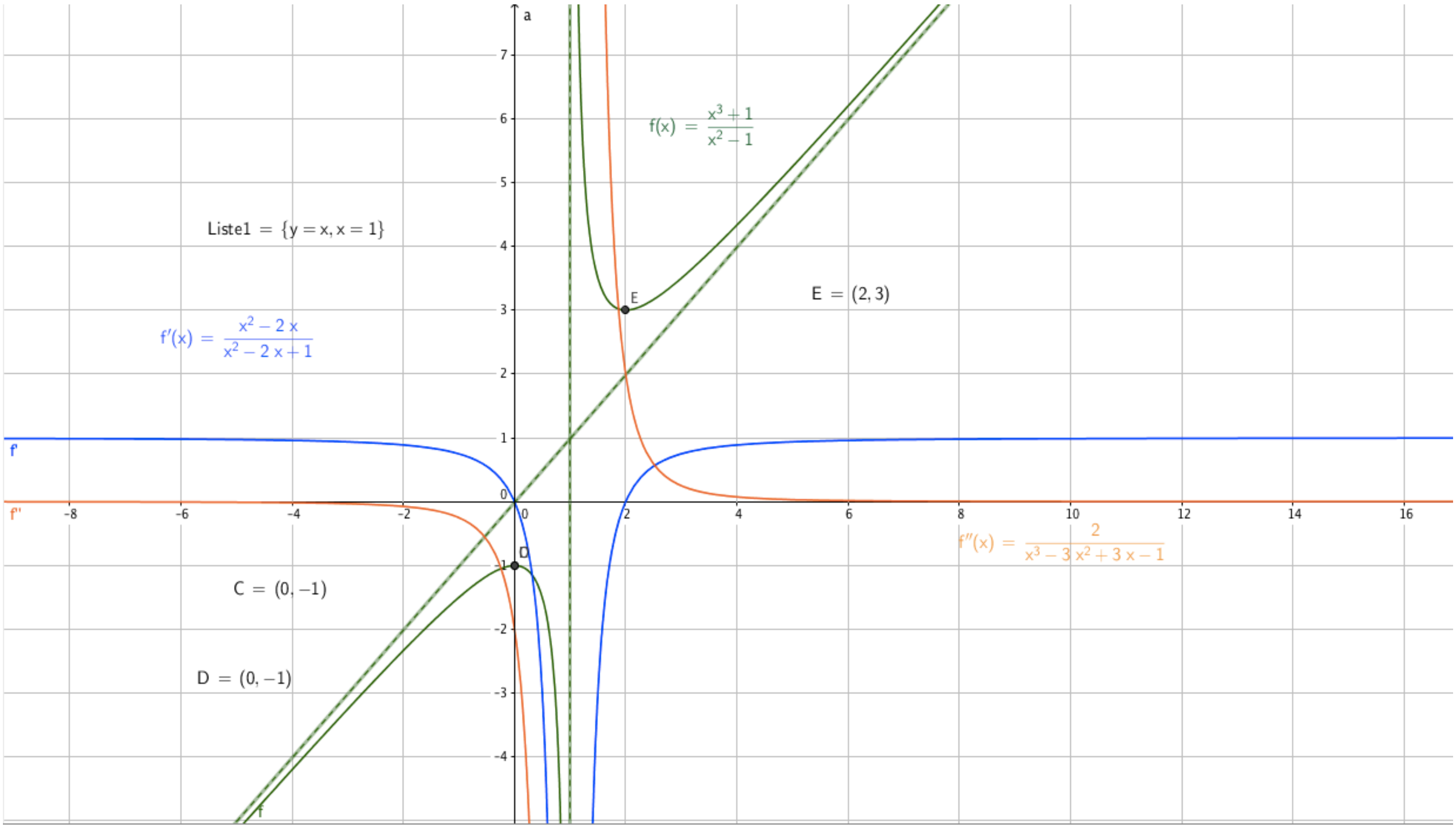
(Drøftet ut i fra fortegnslinjer)

f er konveks (hul side opp) for $x < 1$ og konkav (hul side ned) for $x > 1$

d)

Dette er ingen skisse, men jeg har tatt i bruk dynamisk programvare for å illustrere hvordan grafen bør se ut. Det kan være smart å tegne inn f'(x) og f''(x) i samme koordinatsystem slik at det blir lettere å tegne f(x) ut i fra de to andre grafene.

Det er lurt å avsette punkter som ekstremalpunkter, skjæring med y-aksen og asymptoter (selv om det ikke er nevnt i oppgaveteksten). Krumming er også viktig å få med seg.



e)

$$g(x) = f(e^x) = \frac{e^{3x}+1}{e^{2x}-1}$$

$$g'(x) = f'(u), \quad u = e^x$$

$$g'(x) = f'(u) * u'(x) = \left(1 - \frac{1}{(u-1)^2}\right) * e^x = \frac{(u-1)^2 - 1}{(u-1)^2} * e^x = \frac{u\,(u-2)}{(u-1)^2}e^x = \frac{e^{2x}\,(e^x-2)}{(e^x-1)^2}$$

$$g'(x) = 0 \iff \frac{e^{2x}\,(e^x-2)}{(e^x-1)^2} = 0 \iff e^x = 2 \iff x = ln2$$

$$ln2 \approx 0.69$$

For å skjekke om ekstremalpunktet er et bunnpunkt eller toppunkt tar vi "stikkprøver"

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e^3}+1}{e-1} \approx 3.19$$

$$g\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt[4]{e^9}+1}{\sqrt{e^3}-1} \approx 3.01$$

$$g\,(ln(2)) = \frac{e^{3ln(2)}+1}{e^{2ln(2)}-1} \approx 3.0$$

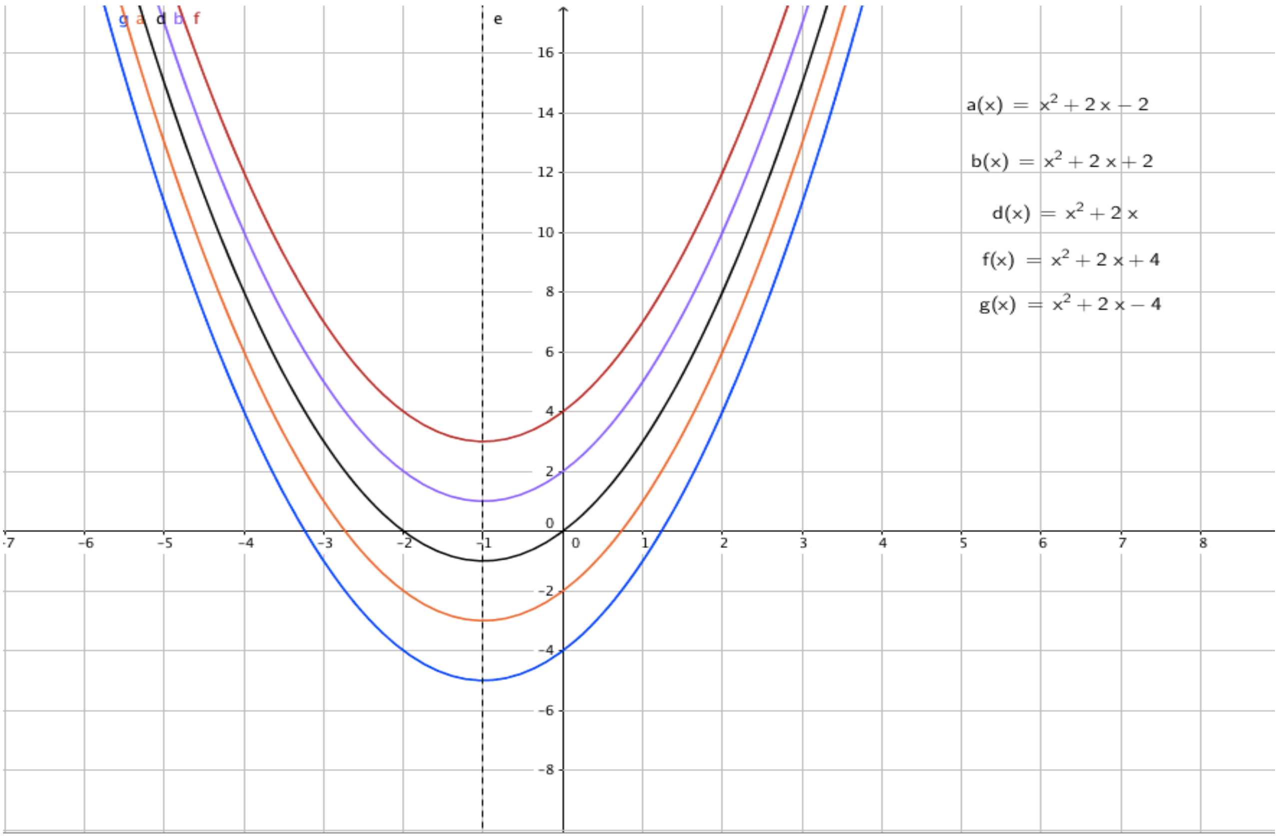
$$Bunnpunkt \quad ---> \quad (ln(2), g(ln(2))) \approx (0,69, 3)$$

Alternativ II

a)

Dette måtte sikkert gjøres manuelt når denne eksamenen kom ut, men jeg tar meg friheten til å bruke dynamisk programvare:

Taster inn $f(x)=x^2+2x+c$ *i algebrafeltet og lager en glider for parameteren c. Studerer verdiene hvor* $c\in\{-4,-2,0,2,4\}$

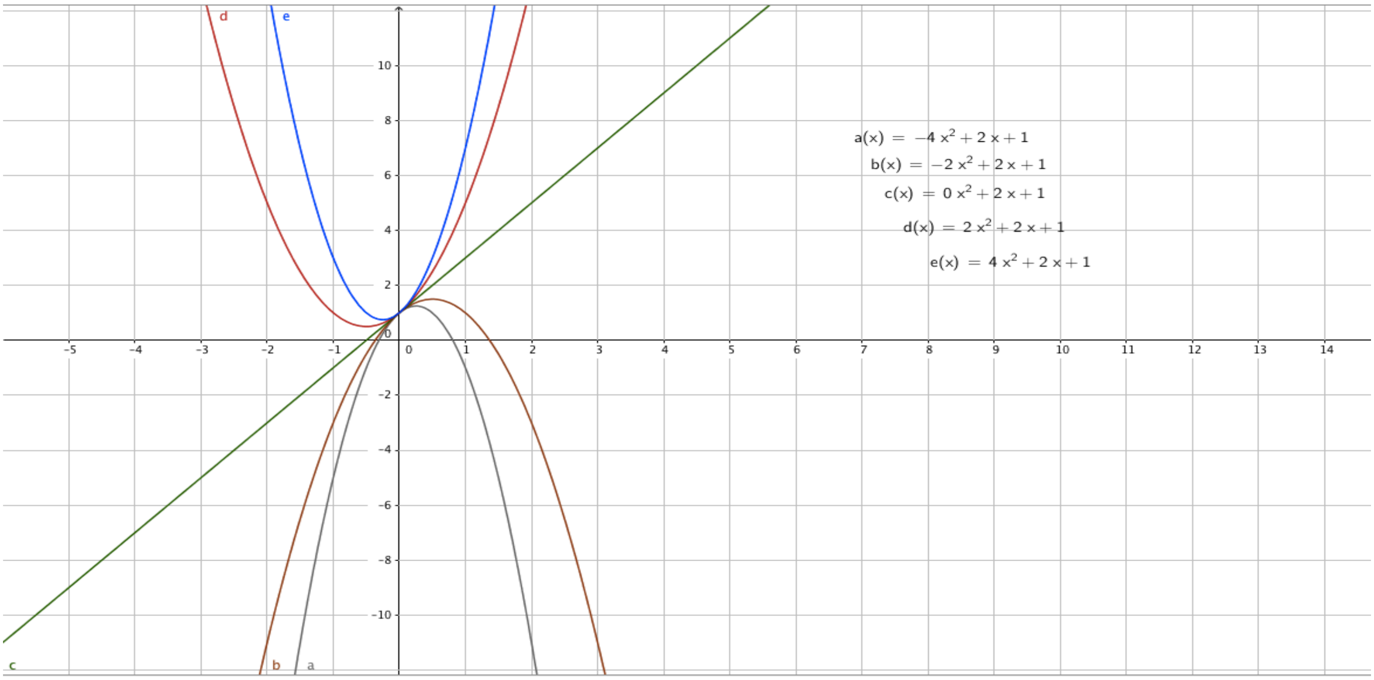


Legger merke til x-verdien til ekstremalpunktet (i dette tilfellet bunnpunktet) er lik for alle grafer. Konstantleddet, C *, forteller om hvor grafen til andregradsfunksjonen skjærer y-aksen. Ettersom*

$$f(0)=a*0^2+b*0+c=0+0+c=c.$$

b)

Gjør tilsvarende som i deloppgave a). Taster inn $f\left(x\right)=a*x^2+2*x+1$ *i algebrafeltet for verdiene* $a\in\left\{-4,-2,0,2,4\right\}$ *og studerer de ulike grafene.*



a- leddet forteller om stigningstallet til grafen. Den kan fortelle om "tykkelsen på grafen" og stigningen.
Hvis tallet a er positivt $a>0$ *vil grafen ha et bunnpunkt og grafen er konveks (vender sin hule side opp). Hvis a er derimot negativ* $a<0$ *vil andregradsfunksjonen ha et toppunkt hvor f har sin største verdi. Grafen vil være konkav (vender den hule side ned)*

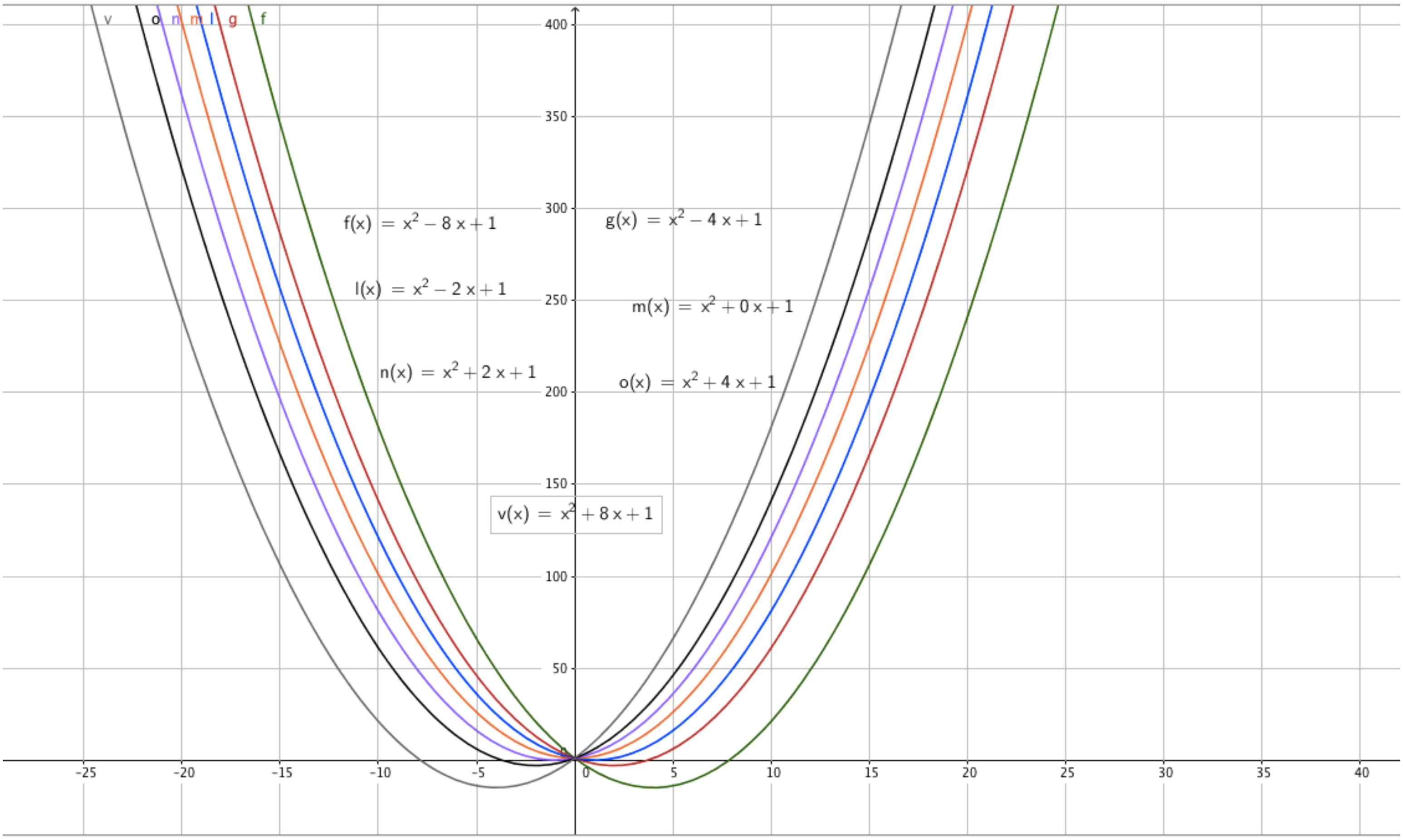
Hvis $|a|$ *øker →* *andregradsfunksjon blir "smalere" i bredden. Hvis* $|a|$ *derimot minker →* *andregradsfunksjonen blir "bredere".*

Det er viktig å legge merke til at når a=0 → lineær linje på formen (y=ax+b)

Legg også merke til at grafen er symmetrisk om en linje som er parallell med y-aksen og går gjennom ekstremalpunktet (symmetrilinjen)

c)

Taster inn $f(x)=x^2+b*x+1$ *i inntastingsfeltet i Geogebra for* $b\in\{-8,-4,-2,0,2,4,8\}$



Ser at fortegnet til b forteller oss hvordan grafen er forskjøvet langs x-aksen.

Vi oppnår 4 ulike scenarioer med grafene (ved å ta i bruk informasjon fra deloppgave a), b) og c).

Tilfelle 1 :

a>0 b=negativ → graf blir forskjøvet mot høyre og bunnpunktet vil følgelig være på høyre side av y-aksen. (1.kvadrant)

Tilfelle 2:

a>0 og b>0 → graf forskjøvet mot venstre, og bunnpunktet blir da følgelig flyttet mot venstre side av y-aksen (2.kvadrant)

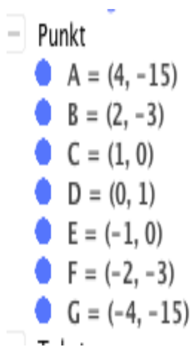
Tilfelle 3:

a<0 og b<0 → graf er forskjøvet mot venstre, og bunnpunktet er på venstre side av y-aksen

Tilfelle 4:

a<0 og b>0 → graf flyttet mot venstre og toppunktet er på venstre side av y-aksen (2.kvadrant).

d) *Kurven er en parabel som er en type kjeglesnitt. I dette tilfellet er det snakk om en "sur parabel" som er konkav ettersom den er rotert 180° om symmetriaksen.*

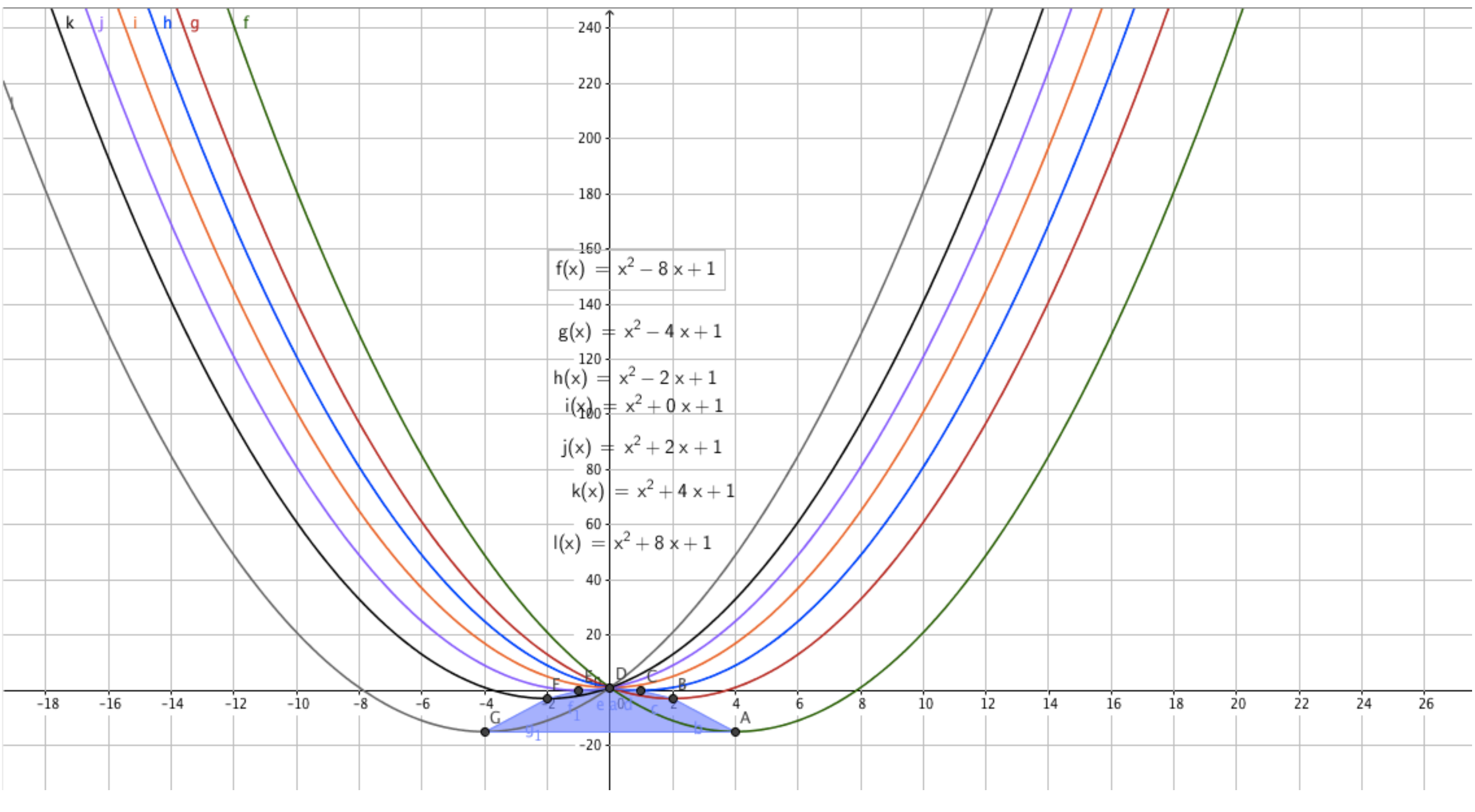


Koordinatene til ekstremalpunktet ligger på symmetrilinjen og like langt i fra begge nullpunktene:

$$x_{ekstremalpunkt}\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{2}=-\frac{b}{2a}$$

Funksjonsverdien finner vi ved å plotte inn for $=-\frac{b}{2a}$ *i andregradsfunksjonen (parabel)*

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=-\frac{b^2}{4a}+c=c-\frac{1}{4a}b^2$$



e) *Grafen til en andregradsfunksjon er en parabel. Slik at den generelle formelen kan skrives som* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *og siden vi har en "sur parabel" er* $a < 0$. *Vi legger merke til at parabelen er symmetrisk om linjen som går gjennom toppunktet. Denne symmetrilinjen er gitt ved* $x = \frac{-b}{2a}$

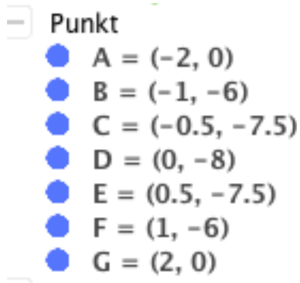
Finner den eksplisitte formelen for b-parameteren:

$$x = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow b = -2ax$$

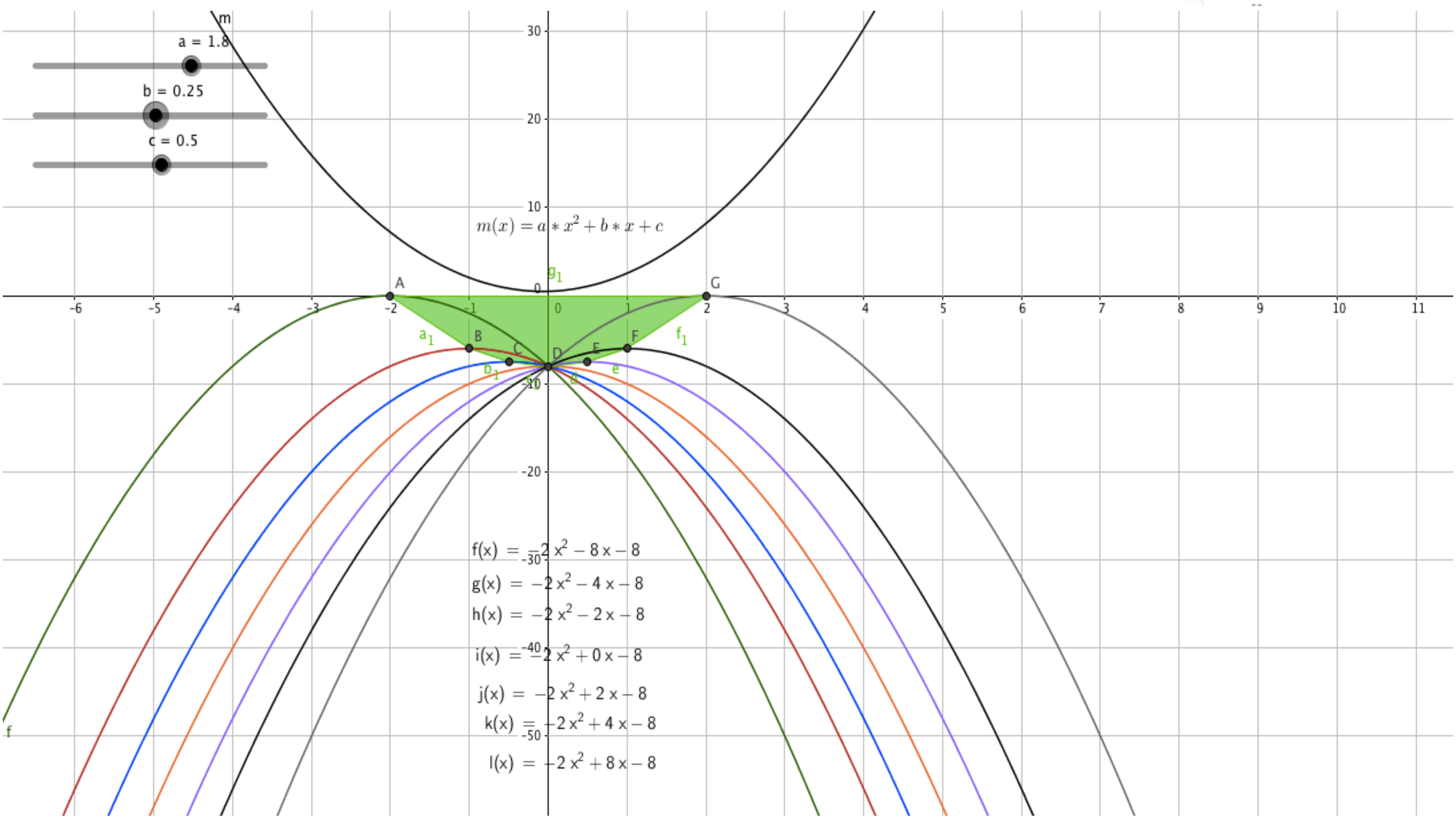
$$f_2(x) = c - \frac{1}{4a}b^2 = c - \frac{1}{4a}(-2ax)^2 = c - \frac{4a^2x^2}{4a} = c - ax^2$$

$$f_2(x) = c - \frac{1}{4a}b^2 = c - \frac{1}{4a}(-2ax)^2 = c - \frac{4a^2x^2}{4a} = c - ax^2$$

f) Taster inn $f(x) = -2x^2 + b * x - 8$ i inntastningsfeltet i Geogebra for verdiene hvor: $b \in \{-8,-4,-2,0,2,4,8\}$. I tillegg skriver jeg inn $f(x) = a * x^2 + b * x + c$.
Markerer ekstremalpunktene med kommandoen Ekstremalpunkt[<Polynom>] og lager en mangekant.



Resultat:



Ekstremalpunktene danner en "smilende parabel" ettersom $a > 0$ slik at vi får en konveks kurve. Se oppgave e) for mer informasjon.

Oppgave 5

a)

$$\vec{AB} = [4-0, 0-0] = [4, 0]$$
$$\vec{AC} = [1-0, 4-0] = [1, 4]$$
$$\vec{BC} = [1-4, 4-0] = [-3, 4]$$

b)

$$\vec{AM_1} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}[4, 0] \Longrightarrow M_1(2, 0)$$

$$\vec{AM_2} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}[1, 4] = \left[\frac{1}{2}, 2\right] \Longrightarrow M_2\left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

c)

$$k * \vec{CM_1} = \vec{CB} + t * \vec{BM_2} \iff k * [2-1, 0-4] = -[-3, 4] + t * \left[\frac{1}{2} - 4, 2 - 0\right] \iff [k, -4k] = [3, -4] + \left[-\frac{7t}{2}, 2t\right] \iff [k, -4k] = \left[3 + \left(-\frac{7t}{2}\right) - 4 + 2t\right] [k, -4k] = \left[3 + \left(-\frac{7t}{2}\right) - 4 + 2t\right] \iff k = 3 - \frac{7t}{2} \wedge -4k = -4 + 2t$$

d)

$$[k,-4k]=\left[3-\frac{7t}{2},-4+2t\right]\iff k=3-\frac{7t}{2}\ \wedge\ -4k=-4+2t-4k=$$
$$-4+2t\Rightarrow -4\left(3-\frac{7t}{2}\right)=-4+2t\Leftrightarrow -12+14t=-4+2t\Leftrightarrow 14t-2t=$$
$$-4+12\Leftrightarrow t=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}-4k=-4+2t\Rightarrow k=\frac{-4+2t}{-4}=1-\frac{t}{2}=$$
$$1-\frac{\frac{2}{3}}{2}=\frac{2}{3}\vec{CS}=k*\vec{CM_1}=\frac{2}{3}[1,.4]=\left[\frac{2}{3},-\frac{8}{3}\right]\vec{CS}=\vec{CB}+t*\vec{BM_2}\Longrightarrow$$
$$[3,-4]+\frac{2}{3}\left[-\frac{7}{2},2\right]=[3,-4]+\left[-\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right]=\left[\frac{2}{3},-\frac{8}{3}\right]$$

e)

$$\vec{CS}=\left[\frac{2}{3},-\frac{8}{3}\right]\Longrightarrow\vec{CS}+C=S\Leftrightarrow\left[\frac{2}{3},-\frac{8}{3}\right]+[1,4]=\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$$

Se i tillegg deloppgave d)

f)

$$\vec{AM_3}=\vec{AB}+\vec{BM_3}=\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{BC}=[4,0]+\frac{1}{2}[-3,4]=\left[\frac{5}{2},2\right]$$

Skjæringspunktet mellom medianene i en vilkårlig trekant vil skjære linjestykkene i forholdet $2:1$

Punktet S kan utrykkes som posisjonsvektoren til skjæringspunktet: \vec{OS}. Siden punktet $A(0,0)--> origo$
$$\vec{OS}\ \|\ \vec{AM_3}\iff\vec{OS}=t*\vec{AM_3}\Longrightarrow\ \vec{OS}=\left[\frac{5t}{2},2t\right]$$

Vi kan ikke bruke koordinatet til S, men vi kan bruke at medianene skjærer hverandre i forholdet $2:1$, slik at $\vec{OS}$ er $\frac{2}{3}$ ganger så lang som $\vec{AM_3}$

$$\vec{OS}=\left[\frac{5t}{2},2t\right]=\left[\frac{5*\frac{2}{3}}{2},2*\frac{2}{3}\right]=\left[\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right]-->s\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$$

Q.E.D