Utdanningsdirektoratet

Eksamen

25.11.2016

REA3024 Matematikk R2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 3 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar
Hjelpemiddel på del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 7 oppgåver. Del 2 har 4 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing. Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast med utskrift eller gjennom ein IKT-basert eksamen.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i del 1 og del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar
Andre opplysningar:	Kjelder for bilete, teikningar osv.: • Befolkning: www.dagbladet.no (06.05.2016) • Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (4 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = 3\cos 2x$

b) $g(x) = e^{\sin x}$

c) $h(x) = \dfrac{x}{\sin x}$

Oppgåve 2 (5 poeng)

Bestem integrala

a) $\int (x^2 - 3x + 2)\ dx$

b) $\int x \cos x\ dx$

c) $\int 2x\ \sin x^2\, dx$

Oppgåve 3 (4 poeng)

Ei rett linje går gjennom $A(0, 0)$ og $B(h, r)$ der h og r er to positive tal.

a) Bestem likninga for linja, uttrykt ved h og r.

Linjestykket AB blir rotert $360°$ om x-aksen. Vi får da ein omdreiingslekam.

b) Bestem eit uttrykk for volumet til omdreiingslekamen.
Kva slags lekam har du rekna ut volumet til?

Oppgåve 4 (6 poeng)

Ein funksjon f er gitt ved

$$f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 5 \quad , \quad D_f = \langle 0\ ,\ 12 \rangle$$

a) Bestem perioden til f.

b) Bestem ekstremalverdiane y_{min} og y_{maks}.

c) Forklar kvifor grafen vil ha alle sine vendepunkt på likevektlinja.
Bestem koordinatane til vendepunkta.

d) Lag ei skisse av grafen til f.

Oppgåve 5 (5 poeng)

Vi har gitt differensiallikninga

$$y'' - 4y' - 5y = 0$$

a) Vis at $y = e^{rx}$ er ei løysing til differensiallikninga når $r^2 - 4r - 5 = 0$.

b) Bestem den generelle løysinga til differensiallikninga.

c) Bestem den spesielle løysinga som tilfredsstiller vilkåra $y(0) = 6$ og $y'(0) = 0$.

Oppgåve 6 (5 poeng)

Brøken B_n er definert ved at teljaren er summen av dei n første oddetala, medan nemnaren er summen av dei n neste oddetala.

a) Rekn ut $B_2 = \dfrac{1+3}{5+7}$, $B_3 = \dfrac{1+3+5}{7+9+11}$ og $B_4 = \dfrac{1+3+5+7}{9+11+13+15}$. Forkort svara.

b) Vis at summen av dei n første oddetala kan skrivast $S_n = n^2$.

c) Forklar at $B_n = \dfrac{S_n}{S_{2n} - S_n}$. Rekn ut denne brøken.

Oppgåve 7 (7 poeng)

Likninga til ei kuleflate er gitt ved

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 6z = 14$$

a) Vis at punktet $A(4,\ 3,\ 3)$ ligg på kuleflata.

b) Vis at kula har sentrum i $S(1,\ -1,\ 3)$. Bestem radien til kula.

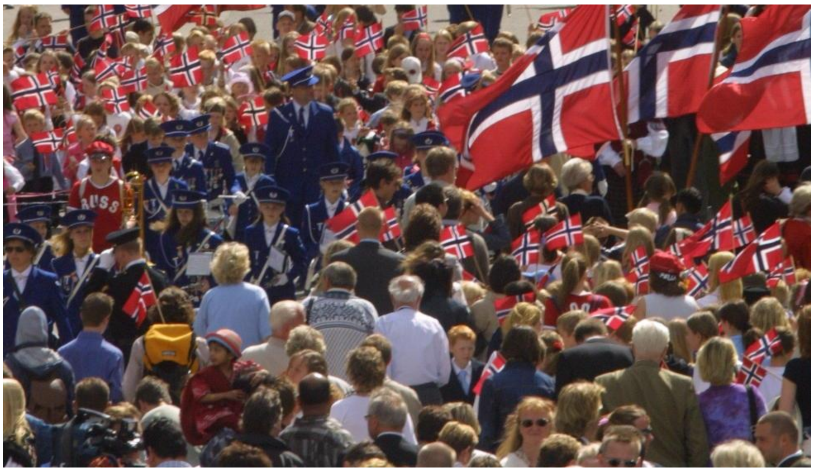
c) Bestem likninga for tangentplanet α til kuleflata i punktet A.

Eit anna plan β går gjennom S og $B(1,\ 0,\ 1)$ og står normalt på α .

d) Bestem likninga til β.

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (5 poeng)



Ved inngangen til 2015 var folketalet i Noreg 5 200 000. I ein modell for befolkningsveksten går vi ut frå at

- netto innvandring per år vil vere 44 000
- talet på dei som blir fødde per år, vil vere 1,1 % av folketalet
- talet på dei som døyr per år, vil vere 0,8 % av folketalet

Vi lar folketalet vere $y(t)$, der t er talet på år etter 2015.

a) Forklar at vi kan skrive

$$y' = 0{,}003y + 44000 \qquad , \qquad y(0) = 5200000$$

b) Løys differensiallikninga.

c) Når vil folketalet passere 7 millionar ifølgje denne modellen?
Kor stor er vekstfarten i folketalet da?

Oppgåve 2 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=\sqrt{x^2-x^4}$$

a) Bruk grafteiknar til å teikne grafen til f.

b) Bruk CAS til å bestemme dei eksakte koordinatane til toppunkta på grafen til f.

c) Bestem det samla arealet av områda som er avgrensa av grafen til f *og* x-aksen.

Grafen til f blir rotert 360° om x-aksen.

d) Bestem volumet av omdreiingslekamen som da kjem fram.

Oppgåve 3 (7 poeng)

To plan α og β er gitt ved

$$\alpha:\ x-y-3=0$$
$$\beta:\ x+pz-4=0\ ,\quad p\in\mathbb{R}$$

a) Vis at punktet $(4, 1, 0)$ ligg i begge plana.

b) Bestem p slik at vinkelen mellom α og β blir 60°.

c) Kva verdi for p vil gi den minste vinkelen mellom α og β? Kor stor er vinkelen da?

Dei to plana skjer kvarandre langs ei linje ℓ.

d) Bestem ei parameterframstilling for ℓ uttrykt ved p.

Oppgåve 4 (4 poeng)

Om ei uendeleg geometrisk rekkje veit vi at

- summen er 8
- summen av dei tre første ledda er 7

a) Set opp eit likningssystem som uttrykkjer opplysningane ovanfor.

b) Bruk CAS til å bestemme kvotienten k og det første leddet a_1 i rekkja.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler
Hjelpemidler på del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 7 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i del 1 og del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv.: • Befolkning: www.dagbladet.no (06.05.2016) • Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 3\cos 2x$

b) $g(x) = e^{\sin x}$

c) $h(x) = \dfrac{x}{\sin x}$

Oppgave 2 (5 poeng)

Bestem integralene

a) $\int (x^2 - 3x + 2)\, dx$

b) $\int x\cos x\, dx$

c) $\int 2x \sin x^2\, dx$

Oppgave 3 (4 poeng)

En rett linje går gjennom $A(0, 0)$ og $B(h, r)$ der h og r er to positive tall.

a) Bestem ligningen for linjen, uttrykt ved h og r.

Linjestykket AB roteres $360°$ om x-aksen. Vi får da et omdreiningslegeme.

b) Bestem et uttrykk for volumet til omdreiningslegemet.
Hva slags legeme har du regnet ut volumet til?

Oppgave 4 (6 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x)=3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+5 \qquad , \qquad D_f=\langle 0\ ,\ 12\rangle$$

a) Bestem perioden til f.

b) Bestem ekstremalverdiene y_{min} og y_{maks}.

c) Forklar hvorfor grafen vil ha alle sine vendepunkter på likevektlinjen.
Bestem koordinatene til vendepunktene.

d) Lag en skisse av grafen til f.

Oppgave 5 (5 poeng)

Vi har gitt differensialligningen

$$y''-4y'-5y=0$$

a) Vis at $y=\mathrm{e}^{rx}$ er en løsning til differensialligningen når $r^2-4r-5=0$.

b) Bestem den generelle løsningen til differensialligningen.

c) Bestem den spesielle løsningen som tilfredsstiller betingelsene $y(0)=6$ og $y'(0)=0$.

Oppgave 6 (5 poeng)

Brøken B_n er definert ved at telleren er summen av de n første oddetallene, mens nevneren er summen av de n neste oddetallene.

a) Regn ut $B_2 = \dfrac{1+3}{5+7}$, $B_3 = \dfrac{1+3+5}{7+9+11}$ og $B_4 = \dfrac{1+3+5+7}{9+11+13+15}$. Forkort svarene.

b) Vis at summen av de n første oddetallene kan skrives $S_n = n^2$.

c) Forklar at $B_n = \dfrac{S_n}{S_{2n} - S_n}$. Regn ut denne brøken.

Oppgave 7 (7 poeng)

Ligningen til en kuleflate er gitt ved

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 6z = 14$$

a) Vis at punktet $A(4,\ 3,\ 3)$ ligger på kuleflaten.

b) Vis at kulen har sentrum i $S(1,\ -1,\ 3)$. Bestem radien til kulen.

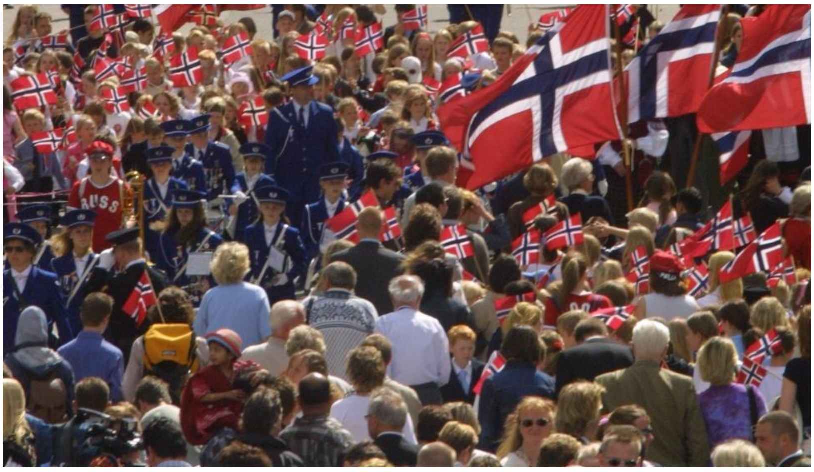
c) Bestem ligningen for tangentplanet α til kuleflaten i punktet A.

Et annet plan β går gjennom S og $B(1,\ 0,\ 1)$ og står normalt på α.

d) Bestem ligningen til β.

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)



Ved inngangen til 2015 var folketallet i Norge 5 200 000. I en modell for befolkningsveksten antar vi at

- netto innvandring per år vil være 44 000
- antall som blir født per år, vil være 1,1 % av folketallet
- antall som dør per år, vil være 0,8 % av folketallet

Vi lar folketallet være $y(t)$, der t er antall år etter 2015.

a) Forklar at vi kan skrive

$$y' = 0{,}003y + 44000 \qquad , \qquad y(0) = 5200000$$

b) Løs differensialligningen.

c) Når vil folketallet passere 7 millioner ifølge denne modellen?
Hvor stor er vekstfarten i folketallet da?

Oppgave 2 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f.

b) Bruk CAS til å bestemme de eksakte koordinatene til toppunktene på grafen til f.

c) Bestem det samlede arealet av områdene som er avgrenset av grafen til f *og* x-aksen.

Grafen til f roteres 360° om x-aksen.

d) Bestem volumet av omdreiningslegemet som da framkommer.

Oppgave 3 (7 poeng)

To plan α og β er gitt ved

$$\alpha:\ x - y - 3 = 0$$
$$\beta:\ x + pz - 4 = 0 \quad , \quad p \in \mathbb{R}$$

a) Vis at punktet $(4, 1, 0)$ ligger i begge planene.

b) Bestem p slik at vinkelen mellom α og β blir 60°.

c) Hvilken verdi for p vil gi den minste vinkelen mellom α og β? Hvor stor er vinkelen da?

De to planene skjærer hverandre langs en linje ℓ.

d) Bestem en parameterframstilling for ℓ uttrykt ved p.

Oppgave 4 (4 poeng)

Om en uendelig geometrisk rekke vet vi at

- summen er 8
- summen av de tre første leddene er 7

a) Sett opp et ligningssystem som uttrykker opplysningene ovenfor.

b) Bruk CAS til å bestemme kvotienten k og det første leddet a_1 i rekken.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet