Eksamen R1 Høsten 2016 - Løsning

av Dennis Christensen

29. november 2016

Del 1 - Uten hjelpemidler

Oppgave 1

(a) $f'(x) = 4x - 5$

(b) $g'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$

(c) $h'(x) = \dfrac{2e^{2x}(x-3) - e^{2x}}{(x-3)^2} = \dfrac{e^{2x}(2x-6-1)}{(x-3)^2} = \dfrac{e^{2x}(2x-7)}{(x-3)^2}$

Oppgave 2

(a)

$$
\begin{aligned}
f(x) = (x+1)^2(x-2) &= 0 \\
\therefore x + 1 = 0 \text{ eller } x &= 2 \\
\therefore x = -1 \text{ eller } x &= 2
\end{aligned}
$$

Vi får følgende nullpunkter: $(-1, 0)$ og $(2, 0)$.

(b) Finner ekstremalpunkter:

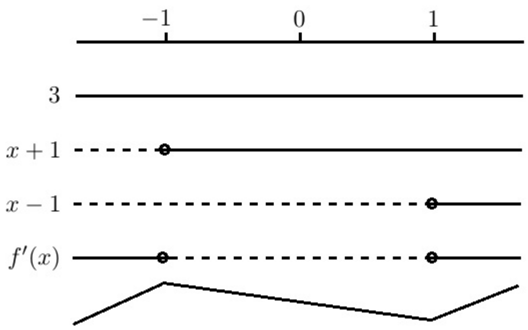
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2(x+1)(x-2) + (x+1)^2 \\
&= (x+1)(2x-4+x+1) \\
&= (x+1)(3x-3) \\
&= 3(x+1)(x-1)
\end{aligned}
$$

Så $f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$.

Vi får følgende ekstremalpunkter:

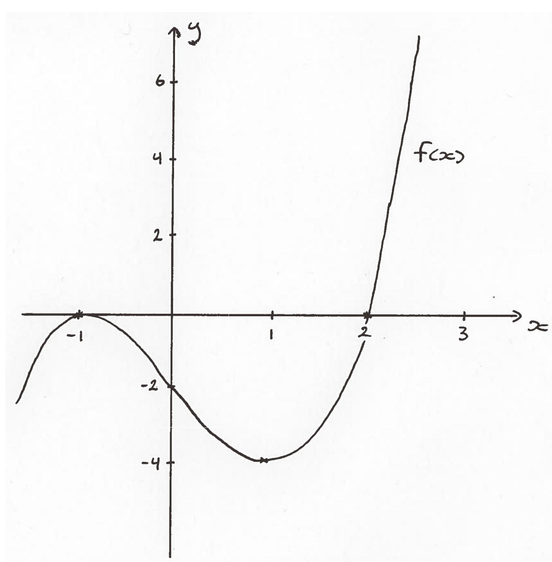
$$P_1 = (-1, f(-1)) = (-1, 0)$$
$$P_2 = (, 1, f(1)) = \big(1, 2^2(-1)\big) = (1, -4)$$

Fortegnslinjer:



Altså er P_1 er toppunkt og P_2 et bunnpunkt.

(c) Tegner først inn nullpunkter og ekstremalpunkter, tegner deretter grafen til f.



Oppgave 3

(a)
$$\frac{2x+10}{x^2-25}+\frac{x}{x+5}-\frac{4}{2x-10} = \frac{2(x+5)}{(x-5)(x+5)}+\frac{x}{x+5}-\frac{2}{x-5}$$
$$= \frac{2(x+5)+x(x-5)-2(x+5)}{(x-5)(x+5)}$$
$$= \frac{x(x-5)}{(x-5)(x+5)}$$
$$= \frac{x}{x+5}$$

(b) Flytter over høyre side:

$$\begin{aligned} \frac{2x-10}{x^2-25}+\frac{x}{x+5} &= \frac{4}{2x-10} \\ \frac{2x-10}{x^2-25}+\frac{x}{x+5}-\frac{4}{2x-10} &= 0 \end{aligned}$$

Fra **(a)** vet vi at dette er ekvivalent med likningen

$$\frac{x}{x+5}=0,$$

hvilket har løsningen $x=0$. Ettersom denne løsningen ikke gir 0 i nevner i den originale likningen, er $x=0$ en gyldig løsning.

Oppgave 4

(a)

$$\begin{aligned} 2^{3x-2}-13 &= 3 \\ 2^{3x-2} &= 16 \\ 2^{3x-2} &= 2^4 \\ \ln\left(2^{3x-2}\right) &= \ln 2^4 \\ (3x-2)\ln 2 &= 4\ln 2 \\ 3x-2 &= 4 \\ 3x &= 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{gathered}
(\lg x)^2 + \lg x - 2 = 0 \\
(\lg x + 2)(\lg x - 1) = 0 \\
\lg x + 2 = 0 \text{ eller } \lg x - 1 = 0 \\
\lg x = -2 \text{ eller } \lg x = 1 \\
x = 10^{-2} = \frac{1}{100} \text{ eller } x = 10
\end{gathered}
$$

Oppgave 5

(a) Retningsvektoren $\vec{r_l}$ for linjen l må være parallell med $\vec{AB} = [3-(-3), 4-(-2)] = [6,6]$, så normaliserer og velger $\vec{r_l} = [1,1]$. Vi får en parameterframstilling

$$
l : \begin{cases} x(t) = t + a \\ y(t) = t + b \end{cases}
$$

Vi velger $(x(0), y(0)) = C = (-4, 5)$, og får at $a = -4$ og $b = 5$. Vi får da den endelige parameterframstillingen for l:

$$
l : \begin{cases} x(t) = t - 4 \\ y(t) = t + 5 \end{cases}
$$

(b) l skjærer x-aksen når $y(t) = 0$, altså når $t + 5 = 0$. $\therefore t = -5$, så x-koordinaten til D er gitt ved $x(-5) = -5 - 4 = -9$. $\therefore D = (-9, 0)$.

(c) $\angle BAE = 90^\circ \iff \vec{AB} \cdot \vec{AE} = 0 \iff \vec{r_l} \cdot \vec{AE} = 0 \iff [1,1] \cdot \vec{AE} = 0$. Skriv $E = [E_1, E_2]$. Da har vi at $\vec{AE} = [E_1 + 3, E_2 + 2]$, så vi trenger at $[1,1] \cdot [E_1 + 3, E_2 + 2] = E_1 + 3 + E_1 + 2 = E_1 + E_2 + 5 = 0$. $\quad (\star)$

Videre vet vi at E ligger på linjen l, så det finnes $t \in \mathbb{R}$ slik at $E_1 = t - 4$ og $E_2 = t + 5$. Subtraherer vi disse likningene for å eliminere t får vi at $E_2 - E_1 = 5 + 4 = 9$. Vi kan nå addere dette med $(\star)$ for å eliminere E_1. Da får vi $2E_2 + 5 = 9$, så $E_2 = 2$. Fra $(\star)$ igjen får vi så at $E_1 = -5 - E_2 = -5 - 2 = -7$. Dermed er $E = (-7, 2)$.

Oppgave 6

La D være hendelsen at en tilfeldig utvalgt nøkkel er defekt, og la A være hendelsen at en tilfeldig utvalgt nøkkel er produsert av maskin A. Merk at A^C da blir hendelsen at en tilfeldig utvalgt nøkkel er produsert av maskin B. Den tredje opplysningen i oppgaven forteller oss at $\mathbb{P}(A^C) = 2\mathbb{P}(A)$. Vi har også at $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^C) = 1$, så $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{3}$ og $\mathbb{P}(A^C) = \dfrac{2}{3}$.

(a) Fra loven om total sannsynlighet har vi at
$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D|A^C) \cdot \mathbb{P}(A^C) = 0.04 \cdot \dfrac{1}{3} + 0.01 \cdot \dfrac{2}{3}$
$= \dfrac{1}{3}(0.04 + 0.02) = \dfrac{1}{3} \cdot 0.06 = 0.02.$
Dermed er det 2% sannsynlighet for at nøkkelen er defekt.

(b) Bayes' setning gir at $\mathbb{P}(A|D) = \dfrac{\mathbb{P}(D|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(D)} = \dfrac{0.04 \cdot \frac{1}{3}}{0.02} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4}{2} = \dfrac{2}{3}$.
Dermed er sannsynligheten for at nøkkelen ble produsert av maskin A lik $\dfrac{2}{3}$.

Oppgave 7

(a) Vi kalkulerer $\angle ACP$ på to forskjellige måter: Merk at $\angle ECP$ er periferivinkelen til en 180°-vinkel, så $\angle ECP = 90°$. Videre ser vi at ettersom $BC = PC$ (de måler begge sirkelens radius) får vi at $\triangle BCP$ er likebeint, så $\angle BCP = \angle CPB = v$. Dermed har vi at $\angle ACE + 90°$
$= \angle ACE + \angle EBP = \angle AC = \angle ACB + \angle BCP = 90° + v$.
$\therefore \angle ACE = v$.

Vi vet at $\angle CPA = v = \angle ACE$ og ser at $\angle PAC = \angle EAC$, så $\triangle ACP$ og $\triangle ACE$ har to felles vinkler, og er derfor formlike.

(b) Vi ser at $BC = BE$ (de måler begge sirkelens radius), så AE
$= AB - BE = AB - BC = c - a$. Vi har også at $BC = BP$ (de måler begge sirkelens radius), så $AP = AB + BP = AB + BC = c + a$.

(c) Fra formlikheten i oppgave **(a)** har vi at forholdene mellom respektive sider av $\triangle ACP$ og $\triangle ACE$ er like. Altså får vi at

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AC}{AE} = \frac{CP}{CE}.\text{ Især får vi at } \frac{AP}{AC} = \frac{AC}{AE}. \therefore \frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}.$$

(d) Kryssmultipliserer vi i identiteten fra **(c)** får vi at $b^2 = (c+a)(c-a) = c^2 - a^2$. $\therefore a^2 + b^2 = c^2$. Ettersom a og b er lengdene av trekantens kateter og c er lengden av trekantens hypotenus, bekrefter dette Pytagoras' setning.

Oppgave 8

Vi går gjennom de mulige alternativene:

Hvis (i) viser grafen til f så forventer vi enten at f er stigende eller har et terrassepunkt i origo. Dermed forventer vi $f'(0) \geq 0$, så (iii) må nødvendigvis vise grafen til f'. Men da gir $x = 0$ et bunnpunkt for f', så vi forventer $f''(0) = 0$, så (ii) kan umulig vise grafen til f''. Dermed kan vi eliminere dette alternativet.

Hvis (ii) viser grafen til f så gir $x = 0$ et bunnpunkt for f, så vi må nødvendigvis ha $f'(0) = 0$. Dette betyr at (i) må vise grafen til f'. Vi forventer så at f' enten er stigende eller har et terrassepunkt i origo. Dermed forventer vi $f''(0) \geq 0$. Ettersom (iii) tilfredstiller dette kravet, er dette alternativet konsekvent.

Hvis (iii) viser grafen til f så gir $x = 0$ et bunnpunkt for f, så vi trenger $f'(0) = 0$. Dermed må (i) vise grafen til f'. Dog forventer vi fra dette at $f''(0) \geq 0$, hvilket (ii) ikke tilfredstiller. Dermed kan vi eliminere dette alternativet.

Det eneste konsekvente alternativet er altså at (i) viser grafen til f', (ii) viser grafen til f og (iii) viser grafen til f''. Dermed må dette være det korrekte svaret.

Del 2 - Med hjelpemidler

Oppgave 1

(a) Tallenes rekkefølge er irrelevant, så vi har $\binom{34}{7} = 5\ 379\ 616$ forskjellige kombinasjoner.

(b) Trekningen skjer uten tilbakelegging, så vi har en hypergeometrisk sannsynlighetsfordeling. Dermed får vi at

$$\mathbb{P}\,(\text{Tore får nøyaktig 5 rette}) = \frac{\binom{7}{5}\binom{27}{2}}{\binom{34}{7}} = \frac{21 \cdot 351}{5379616} \approx 0.0014.$$

(c) På likt vis som i oppgaven ovenfor får vi at

$$\mathbb{P}\,(\text{Sju rette, gitt at fire første er rette}) = \frac{\binom{3}{3}\binom{27}{0}}{\binom{30}{3}} = \frac{1}{4060}.$$

Oppgave 2

(a) En sirkellikning er på formen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

hvor (x_0, y_0) er sirkelens sentrum og $r \geq 0$ er sirkelens radius.

Dermed ser vi at sentrum S_1 i c_1 er gitt ved $S_1 = (-5, 0)$ og radius r_1 i c_1 er gitt ved $r_1 = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$. For c_2 fullfører vi kvadratet:

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + y^2 + 5 &= 0 \\ x^2 - 10x + 25 + y^2 &= -5 + 25 \\ (x-5)^2 + y^2 &= 20 \end{aligned}$$

Dermed ser vi at sentrum S_2 i c_2 er gitt ved $S_2 = (5, 0)$ og radius r_2 i c_2 er gitt ved $r_2 = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$.

(b) For å finne skjæringspunktene mellom sirklene må vi løse begge sirkellikningene simultant. Vi subtraherer likningene for c_1 og c_2 for å eliminere y:

$$\begin{aligned}(x+5)^2-(x-5)^2&=80-20\\ x^2+10x+25-\left(x^2-10x+25\right)&=60\\ 20x&=60\\ x&=3\end{aligned}$$

Vi kan nå finne y-koordinaten til skjæringspunktet:

$$\begin{aligned}(3+5)^2+y^2&=80\\ 8^2+y^2&=80\\ y^2&=80-64\\ y^2&=16\\ y&=\pm 4\end{aligned}$$

Dermed er skjæringspunktene $(3,-4)$ og $(3,4)$.

(c) Vi bruker $A=(3,4)$ slik skissen antyder. Nå, $\vec{AS_1}=[-5-3,0-4]$ $=[-8,-4]=-4\,[2,1]$ og $\vec{AS_2}=[5-3,0-4]=[2,-4]=2\,[1,-2]$.

$\vec{AS_1}\perp\vec{AS_2} \iff \vec{AS_1}\cdot\vec{AS_2}=0 \iff [2,1]\cdot[1,-2]=0$, så ettersom $[2,1]\cdot[1,-2]=2-2=0$, har vi at c_1 og c_2 er ortogonale.

Oppgave 3

(a)

$$\begin{aligned}t(x)&=\frac{\text{lengde av strekning } PB}{\text{hastighet på strekning } PB}+\frac{\text{lengde av strekning } BH}{\text{hastighet på strekning } BH}\\ &=\frac{PB}{5}+\frac{BH}{3}\\ &=\frac{x}{5}+\frac{\sqrt{2^2+(5-x)^2}}{3},\end{aligned}$$

hvor telleren til det siste leddet kommer av Pytagoras' læresetning anvendt på $\triangle BCH$.

(b) Vi ønsker å minimere $t(x)$.

$$\begin{aligned}
t'(x) &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2(5-x)(-1)}{2\sqrt{2^2+(5-x)^2}} \\
&= \frac{1}{5} + \frac{x-5}{3\sqrt{2^2+(5-x)^2}} \\
&= \frac{3\sqrt{2^2+(5-x)^2} + 5(x-5)}{3\sqrt{2^2+(5-x)^2}}
\end{aligned}$$

Vi finner så bunnpunktet ved å løse $t'(x) = 0, x \in [0,5]$:

$$\begin{aligned}
t'(x) &= 0 \\
\frac{3\sqrt{2^2+(5-x)^2} + 5(x-5)}{3\sqrt{2^2+(5-x)^2}} &= 0 \\
3\sqrt{2^2+(5-x)^2} + 5(x-5) &= 0 \\
3\sqrt{2^2+(5-x)^2} &= 5(5-x) \\
9\left(4+(5-x)^2\right) &= 25(5-x)^2 \\
36 + 9(5-x)^2 &= 25(5-x)^2 \\
36 &= 16(5-x)^2 \\
16(5-x)^2 &= 36 \\
(5-x)^2 &= \frac{9}{4} \\
5-x &= \pm\frac{3}{2} \\
x &= 5 \mp \frac{3}{2} \\
x &= 5 - \frac{3}{2} \qquad \text{(husk } x \in [0,5]) \\
x &= \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Altså bør Anne velge å svinge ut i terrenget når $x = \frac{7}{2}$.
Tiden hun vil bruke da er gitt ved

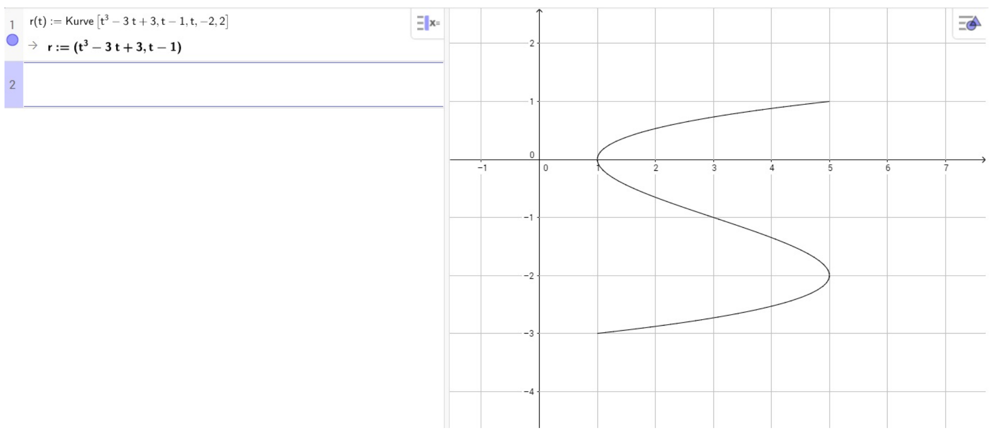
$$t(\frac{7}{2}) = \frac{7}{10} + \frac{\sqrt{4+\frac{9}{4}}}{3} = \frac{7}{10} + \frac{\sqrt{\frac{25}{4}}}{3} = \frac{7}{10} + \frac{5}{6} = \frac{23}{15} \approx 1.53.$$

Den korteste tiden hun kan bruke er altså 1.53 timer $\approx$ 1 time og

32 minutter.

Oppgave 4

(a)



(b) Vi har at

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \left[t^3 - 3t + 3, t - 1\right] \\ \vec{r}'(t) &= \left[3t^2 - 3, 1\right] \\ \vec{r}''(t) &= [6t, 0]\,,\end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned}\text{posisjonsvektor } &= \vec{r}(1) = \left[1^3 - 3 \cdot 1 + 3, 1 - 1\right] = [1, 0] \\ \text{banefart } &= \left|\vec{r}'(1)\right| = \left|\left[3 \cdot 1^2 - 3, 1\right]\right| = |[0, 1]| = 1 \\ \text{akselerasjon } &= \left|\vec{r}''(1)\right| = |[6 \cdot 1, 0]| = |[6, 0]| = 6\end{aligned}$$

(c)

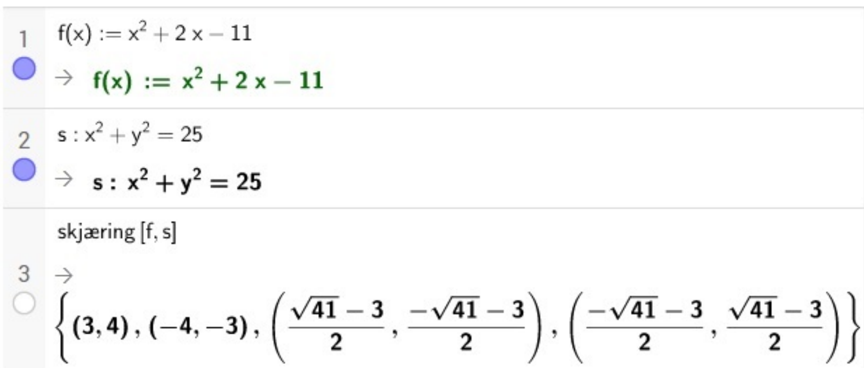
$$\begin{aligned}& \vec{v}(t) = \vec{r}'(t) \text{ er parallell med } y\text{-aksen} \\ \Longleftrightarrow\; & \vec{r}'(t) \cdot [1, 0] = 0 \\ \Longleftrightarrow\; & 3t^2 - 3 = 0 \\ \Longleftrightarrow\; & 3t^2 = 3 \\ \Longleftrightarrow\; & t^2 = 1 \\ \Longleftrightarrow\; & t = \pm 1\end{aligned}$$

Dermed er punktene vi ønsker gitt ved posisjonsvektorene

$$\vec{r}(-1) = \left[(-1)^3 - 3(-1) + 3, -1 - 1\right] = [5, -2] \text{ og } \vec{r}(1) = [1, 0].$$

Oppgave 5

Rad 1: Skriver inn uttrykket for f.
Rad 2: Skriver inn sirkellikningen for en sirkel s med sentrum i origo og radius 5.
Rad 3: Punktene på grafen til f som har avstand 5 fra origo er nøyaktig skjæringspunktene mellom s og f.



Fra dette leser vi av x-koordinatene til punktene:

$$x = -4, \qquad x = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}, \qquad x = \frac{\sqrt{41}}{2} - \frac{3}{2}, \qquad x = 3.$$

For kompletthetens skyld er det inkludert en metode for å finne disse punktene ved regning:

Substituerer uttrykket for f inn i sirkellikningen:

$$\begin{aligned} x^2 + f(x)^2 &= 25 \\ x^2 + (x^2 + 2x - 11)^2 &= 25 \\ x^2 + (x^2 + 2x - 11)(x^2 + 2x - 11) &= 25 \\ x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 44x + 96 &= 0 \end{aligned}$$

Ved inspeksjon ser vi at $x = -4$ og $x = 3$ er løsninger. Det impliserer at $x + 4$ og $x - 3$ går opp i venstre side av likningen. Vi kan nå utføre polynomdivisjon for å faktorisere:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
x^4 & +4x^3 & -17x^2 & -44x & +96 & = \big(x+4\big)\big(x^3-17x+24\big) \\
\underline{-x^4} & \underline{-4x^3} & & & & \\
 & & -17x^2 & -44x & & \\
 & & \underline{17x^2} & \underline{+68x} & & \\
 & & & 24x & +96 & \\
 & & & \underline{-24x} & \underline{-96} & \\
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Faktoriserer videre:

$$
\begin{array}{rrrrl}
x^3 & & -17x & +24 & = \big(x-3\big)\big(x^2+3x-8\big) \\
\underline{-x^3} & \underline{+3x^2} & & & \\
 & 3x^2 & -17x & & \\
 & \underline{-3x^2} & \underline{+9x} & & \\
 & & -8x & +24 & \\
 & & \underline{8x} & \underline{-24} & \\
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Så

$$x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 44x + 96 = (x-3)(x+4)(x^2+3x-8).$$

Det gjenstår å faktorisere uttrykket $x^2 + 3x - 8$. Annengradsformelen gir

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-8)}}{2} \\
&= \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}
\end{aligned}
$$

Dermed har vi at

$$x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 44x + 96 = (x-3)(x+4)(x + \frac{3}{3} + \frac{\sqrt{41}}{2})(x - \frac{\sqrt{41}}{2} + \frac{3}{2}),$$

så skjæringspunktene har respektive x-koordinater gitt ved

$$x = -4, \qquad x = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}, \qquad x = \frac{\sqrt{41}}{2} - \frac{3}{2}, \qquad x = 3.$$