Eksamen R2 Høsten 2016 - Løsning

av Dennis Christensen

1. desember 2016

Del 1 - Uten hjelpemidler

Oppgave 1

(a) $f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot (-\sin(2x)) = -6\sin(2x)$

(b) $g'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$

(c) $h'(x) = \dfrac{1 \cdot \sin x - x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$

Oppgave 2

(a) $\displaystyle\int \left(x^2 - 3x + 2\right) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C, \qquad \text{der } C \in \mathbb{R}.$

(b) Vi bruker delvis integrasjon. La $u(x) = x$ og la $v'(x) = \cos x$. Fra regelen

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v + C$$

får vi at

$$\begin{aligned}\int x\cos x \, dx &= x\sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx + C \\ &= x\sin x + \cos x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(c) Vi bruker substitusjon. La $u(x) = x^2$. Da er $\dfrac{du}{dx} = 2x$, så

$$
\begin{aligned}
\int 2x \sin\left(x^2\right) dx &= \int \sin u \, du \\
&= -\cos u + C \\
&= -\cos\left(x^2\right) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Oppgave 3

(a) Linjen går gjennom origo og har stigningstall $\frac{r}{h}$, så den tilfredsstiller likningen

$$y = \frac{r}{h}x$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\text{Volum} &= \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx \\
&= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} \left[x^3\right]_0^h \\
&= \frac{\pi r^2}{3h} \cdot h^3 \\
&= \frac{\pi r^2 h}{3},
\end{aligned}
$$

hvilket er formelen for volumet av en kjegle med radius r og høyde h, som forventet.

Oppgave 4

(a) Perioden p til f er gitt ved

$$p = \frac{2\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{4\pi}{\pi} = 4.$$

(b) Amplituden a til f er $a = 3$ og likevektslinjen til f er gitt ved $y = 5$, så ekstremalverdiene til f er gitt ved

$$
\begin{aligned}
y_{\text{min}} &= 5 - 3 = 2 \text{ og} \\
y_{\text{maks}} &= 5 + 3 = 8.
\end{aligned}
$$

(c) Deriverer:

$$f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 5$$
$$f'(x) = \frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$
$$f''(x) = -\frac{3\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

Vendepunktene til f er bestemt av likningen

$$f'(x) = 0,$$

altså

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0.$$

Dermed ser vi at dersom x_0 er x-koordinaten til et vendepunkt til f så har vi at

$$f(x_0) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x_0\right) + 5 = 0 + 5 = 5,$$

så punktet $(x_0, f(x_0))$ ligger på likevektslinjen $y = 5$. For å finne dem eksplisitt løser vi likningen

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0, \qquad x \in (0, 12)$$

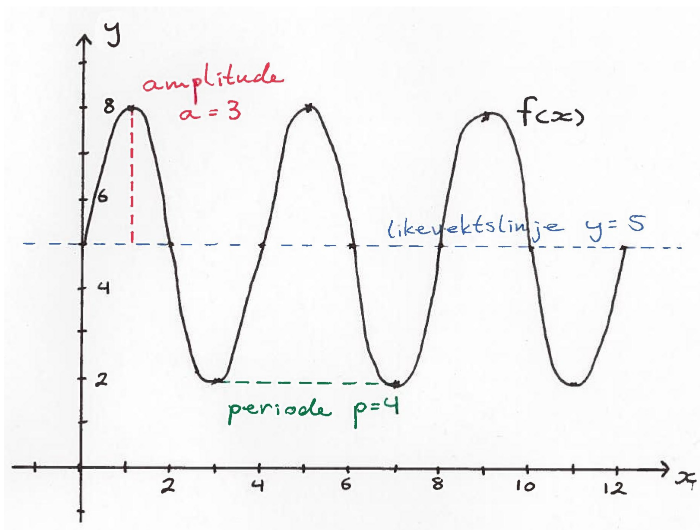
som har løsningene

$$x = 2k, \quad k = 1, \ldots, 5.$$

Dermed er koordinatene til vendepunktene gitt ved

$$(2k, 5), \qquad k = 1, \ldots, 5.$$

(d)



Oppgave 5

(a) I dette tilfellet får vi at

$$\begin{aligned} y'' - 4y' - 5y &= \frac{d^2}{dx^2}e^{rx} - 4\frac{d}{dx}e^{rx} - 5e^{rx} \\ &= r^2e^{rx} - 4re^{rx} - 5e^{rx} \\ &= \left(r^2 - 4r - 5\right)e^{rx} \\ &= 0 \quad \text{ettersom } r^2 - 4r - 5 = 0. \end{aligned}$$

Altså er $y = e^{rx}$ en løsning til differensiallikningen.

(b) Den karakteristiske likningen

$$r^2 - 4r - 5 = (r-5)(r+1) = 0$$

har løsningene $r_1 = -1, r_2 = 5$, så den generelle løsningen er gitt ved

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} = c_1e^{-x} + c_2e^{5x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) $y(0) = 6$, så

$$c_1 + c_2 = 6$$

. $y'(0) = 0$, så

$$-c_1 + 5c_2 = 0$$

. Hvis vi adderer disse likningene eliminerer vi c_1 og får at $6c_2 = 6$, så $c_2 = 1$. Dermed får vi at $c_1 = 6 - c_2 = 6 - 1 = 5$, så den spesielle løsningen blir

$$y = 5e^{-x} + 6e^{5x}.$$

Oppgave 6

(a)

$$B_2 = \frac{1+3}{5+7} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$
$$B_3 = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$
$$B_4 = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}.$$

(b) **Metode 1:** Vi kan bruke formelen for n-te ledd av en aritmetisk sum. Differensen i summen av oddetall er 2, og første ledd er 1, så

$$S_n = 1 \cdot n^2 = n^2.$$

Metode 2: Vi kan bevise dette ved induksjon.

I basistilfellet er $n = 1$ og det er tydelig at formelen gjelder.

I induksjonssteget antar vi at $S_{n-1} = (n-1)^2, \quad n \geq 2$. Da får vi at

$$S_n = S_{n-1} + 2n - 1 = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2,$$

så påstanden er bevist ved induksjon.

(c) Merk at telleren i B_n er lik $(2n+1) + \cdots + (4n-1)$. Nå,

$$\begin{aligned}
&(2n+1) + \cdots + (4n-1) \\
&= [1 + \cdots + (2n-1)] - [1 + \cdots + (2n-1)] + (2n+1) + \cdots + (4n-1) \\
&= [1 + \ldots (2n-1) + (2n+1) + \ldots (4n-1)] - [1 + \ldots (2n-1)] \\
&= S_{2n} - S_n,
\end{aligned}$$

så derfor får vi at

$$B_n = \frac{S_n}{S_{2n} - S_n}.$$

Dermed ser vi at

$$B_n = \frac{S_n}{S_{2n} - S_n} = \frac{n^2}{(2n)^2 - n^2} = \frac{n^2}{4n^2 - n^2} = \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3}.$$

Oppgave 7

(a) Ettersom

$$4^2 - 2 \cdot 4 + 3^2 + 2 \cdot 3 + 3^2 - 6 \cdot 3 = 16 - 8 + 9 + 6 + 9 - 18 = 14,$$

har vi at A ligger på kuleflaten.

(b) Vi fullfører kvadratene for å forenkle kulelikningen:

$$\begin{gathered} x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 6z = 14 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 = 14 + 1 + 1 + 9 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 25 \end{gathered}$$

Dermed ser vi at kulen har sentrum i $S = (1, -1, 3)$ og at kulens radius er $r = \sqrt{25} = 5$.

(c) Planet α har normalvektor

$$\vec{n}_\alpha = \vec{SA} = [4-1, 3+1, 3-3] = [3, 4, 0]$$

og går gjennom punktet $A = (4, 3, 3)$, så vi får likningen

$$\begin{aligned} \alpha: \ \vec{n}_\alpha \cdot [x-4, y-3, z-3] &= 0 \\ [3,4,0] \cdot [x-4, y-3, z-3] &= 0 \\ 3(x-4) + 4(y-3) &= 0 \\ 3x - 12 + 4y - 12 &= 0 \\ 3x + 4y &= 24 \end{aligned}$$

(d) Planet β har normalvektor $\vec{n}_\beta = [a, b, c]$, hvor

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = [3, 4, 0] \cdot [a, b, c] = 3a + 4b = 0 \tag{1}$$

ettersom β står normalt på α. Videre vet vi at β går gjennom $S = (1, -1, 3)$ og $B = (1, 0, 1)$, så vi får at likningen til β,

$$\beta : a(x-1) + by + c(z-1) = 0,$$

tilfredsstiller

$$a(1-1) + b(-1) + c(3-1) = 2c - b = 0. \tag{2}$$

Ingen av likningene (1) eller (2) sier eksplisitt at $c = 0$, så vi velger eksmpelvis å sette $c = -3$ og får da fra (1) og (2) at $b = -6$ og derfor at $a = \frac{24}{3} = 8$. Dermed er likningen til planet β gitt ved

$$\begin{aligned} \beta :\ & 8(x-1) - 6y - 3(z-1) = 0 \\ & 8x - 8 - 6y - 3z + 3 = 0 \\ & 8x - 6y - 3z = 5 \end{aligned}$$

Del 2 - Med hjelpemidler

Oppgave 1

(a) Innvandringen er konstant (uavhengig av folktetallet), så

$$
\begin{aligned}
y' &= \text{ endring i folketallet} \\
&= (\text{antall fødte per år}) - (\text{antall døde per år}) + (\text{netto innvandring}) \\
&= 0.011y - 0.008y + 44000 \\
&= 0.003y + 44000.
\end{aligned}
$$

I 2015 ($t = 0$) var folketallet i Norge 5 200 000, så

$$y(0) = 5200000.$$

(b) Vi introduserer en integrerende faktor:

$$
\begin{aligned}
y' &= 0.003y + 44000 \\
y' - 0.003y &= 44000 \\
y' \cdot e^{-0.003t} - 0.003y \cdot e^{-0.003t} &= 44000e^{-0.003t} \\
\frac{d}{dt}\left(y \cdot e^{-0.003t}\right) &= 44000e^{-0.003t} \\
y \cdot e^{-0.003t} &= -\frac{44000}{0.003}e^{-0.003t} + C, \qquad C \in \mathbb{R} \\
y(t) &= Ce^{0.003t} - \frac{44000000}{3}
\end{aligned}
$$

Nå, $y(0) = 5200000$, så

$$
\begin{aligned}
5200000 &= C - \frac{44000000}{3} \\
C = 5200000 + \frac{44000000}{3} &= \frac{59600000}{3}
\end{aligned}
$$

Dermed får vi at

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{3}\left(59600000e^{0.003t} - 44000000\right) \\
&= \frac{400000}{3}\left(149e^{0.003t} - 110\right).
\end{aligned}
$$

(c)

$$y(t) = 7000000$$

$$\frac{400000}{3}\left(149e^{0.003t} - 110\right) = 7000000$$

$$\frac{4}{3}\left(149e^{0.003t} - 110\right) = 70$$

$$149e^{0.003t} = \frac{3 \cdot 70}{4} + 110 = \frac{325}{2}$$

$$e^{0.003t} = \frac{325}{2 \cdot 149} = \frac{325}{298}$$

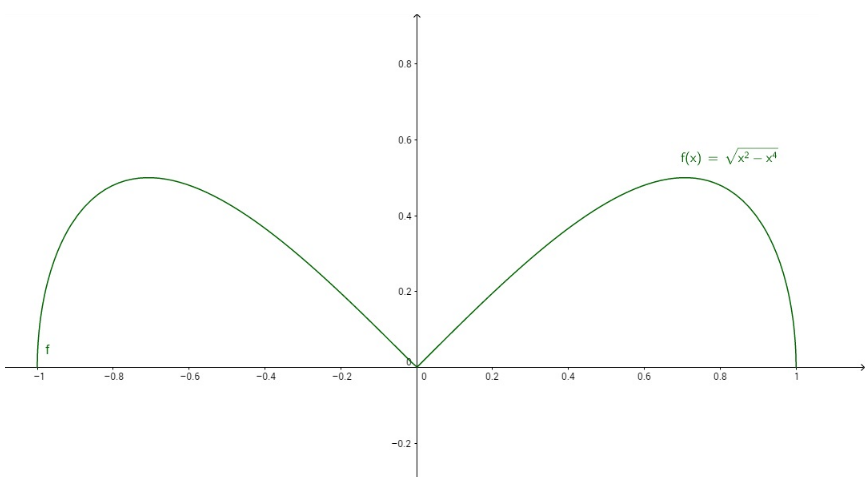
$$0.003t = \ln\left(\frac{325}{298}\right)$$

$$t = \frac{1000}{3}\ln\left(\frac{325}{298}\right) \approx 28.91$$

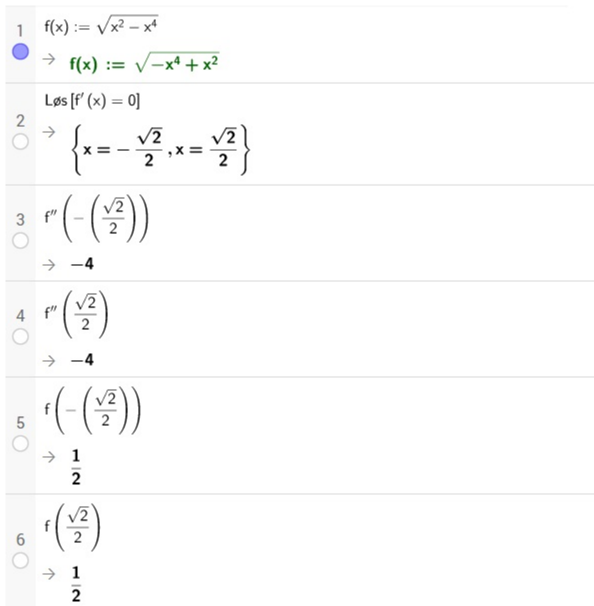
Dermed forteller modellen at folketallet vil passere 7 millioner ca. 28.91 år etter 2015, altså mot slutten av 2043.

Oppgave 2

(a) Vi tegner grafen i GeoGebra:



(b)



Rad 1: Definerer funksjonen f.
Rad 2: Setter den deriverte av f lik 0 for å lokalisere ekstremalpunkter.
Rad 3 og 4: Evaluerer om de respektive ekstremalpunktene er toppunkter eller bunnpunkter. Ettersom

$$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4 < 0 \text{ og } f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4 < 0$$

har vi at begge ekstremalpunktene er toppunkter.
Rad 5 og 6: Finner y-koordinatene til toppunktene.

Altså er koordinatene til toppunktene på grafen til f gitt ved

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ og } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

(c) Finner nullpunktene til f:

$$f(x) = 0$$

$$\sqrt{x^2 - x^4} = 0$$

$$x^2 - x^4 = x^2(1-x^2) = x^2(1-x)(1+x) = 0$$

Dermed ser vi at $(-1,0),(0,0)$ og $(1,0)$ er de eneste nullpunktene til f. Vi vet at

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x^4} \geq 0, \qquad x \in [-1,1]$$

og at f er udefinert for $x \notin [-1,1]$. Merk også at ettersom

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - (-x)^4} = \sqrt{x^2 - x^4} = f(x) \text{ for alle } x \in [-1,1],$$

så er

$$\begin{aligned}
\text{Areal } &= \int_{-1}^{0} \sqrt{x^2 - x^4}\, dx + \int_{0}^{1} \sqrt{x^2 - x^4}\, dx \\
&= 2\int_0^1 \sqrt{x^2 - x^4}\, dx \\
&= 2\int_0^1 \sqrt{x^2(1-x^2)}\, dx \\
&= 2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx \qquad (\star).
\end{aligned}$$

Vi bruker substitusjon. La $u = 1 - x^2$. Da er $\dfrac{du}{dx} = -2x$, så

$$\begin{aligned}
(\star) &= 2\int_{1-0^2}^{1-1^2} \left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{u}\, du \\
&= 2\left(-\frac{1}{2}\right)\int_1^0 u^{\frac{1}{2}}\, du \\
&= -\int_1^0 u^{\frac{1}{2}}\, du \\
&= \int_0^1 u^{\frac{1}{2}}\, du \\
&= \frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(d) Igjen, ettersom

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - (-x)^4} = \sqrt{x^2 - x^4} = f(x) \text{ for alle } x \in [-1,1],$$

får vi at

$$\begin{aligned}
\text{Volum} &= \pi\left[\int_{-1}^{0}\left(\sqrt{x^2-x^4}\right)^2 dx + \int_{0}^{1}\left(\sqrt{x^2-x^4}\right)^2 dx\right] \\
&= 2\pi\int_0^1\left(\sqrt{x^2-x^4}\right)^2 dx \\
&= 2\pi\int_0^1\left(x^2-x^4\right) dx \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 \\
&= 2\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) \\
&= 2\pi\cdot\frac{2}{15} \\
&= \frac{4\pi}{15}.
\end{aligned}$$

Oppgave 3

(a) For α har vi at

$$4-1-3=0$$

og for β har vi at

$$4+p\cdot 0-4=4-4=0,$$

hvilket bekrefter at punktet $(4,1,0)$ ligger i begge planene.

(b) Likningene for planene gir oss normalvektorer $\vec{n}_\alpha=[1,-1,0]$ og $\vec{n}_\beta=[1,0,p]$ for α og β, respektivt. Dermed har vi at

$$\begin{aligned}
&\text{vinkelen mellom } \alpha \text{ og } \beta \text{ er } 60^\circ \\
\iff\ &\text{den minste vinkelen mellom } \vec{n}_\alpha \text{ og } \vec{n}_\beta \text{ er } 60^\circ \\
\iff\ &\cos\left(\text{vinkelen mellom } \vec{n}_\alpha \text{ og } \vec{n}_\beta\right)=\pm\frac{1}{2} \\
\iff\ &\frac{\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta}{|\vec{n}_\alpha|\cdot|\vec{n}_\beta|}=\pm\frac{1}{2} \\
\iff\ &\frac{1}{\sqrt{1^2+p^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\pm\frac{1}{2} \\
\iff\ &\pm 2=\sqrt{1+p^2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2(1+p^2)}
\end{aligned}$$

Ettersom $\sqrt{2(1+p^2)} \geq 0$ ser vi at vi må ha at $\sqrt{2(1+p^2)} = 2$. Vi får derfor løsningen

$$\begin{aligned} 2\left(1+p^2\right) &= 2^2 = 4 \\ 1+p^2 &= 2 \\ p^2 &= 1 \\ p &= \pm 1. \end{aligned}$$

(c) En vinkel $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ minimeres når $\cos\theta$ maksimeres. Definer funksjonen f ved

$$\begin{aligned} f(p) &= \cos\left(\text{vinkelen mellom } \vec{n}_\alpha \text{ og } \vec{n}_\beta\right) \\ &= \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1^2+p^2} \cdot \sqrt{1^2+(-1)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\left(1+p^2\right)}} \end{aligned}$$

Vi ser at f maksimeres når $\sqrt{2\left(1+p^2\right)}$ minimeres, altså når $1+p^2$ minimeres. Ettersom $p^2 \geq 0$ skjer dette når $p = 0$.

Altså er vinkelen mellom $\vec{n}_\alpha$ og $\vec{n}_\beta$, og derfor også vinkelen mellom α og β, minimert når $p = 0$.

$\cos\left(\text{vinkelen mellom } \alpha \text{ og } \beta\right)$ er da lik $\dfrac{1}{\sqrt{2\left(1+0^2\right)}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

så vinkelen er 45°.

(d) Vi begynner med en generell vektorfunksjon for en rett linje

$$\vec{r}(t) = [x_0, y_0, x_0] + [at, bt, ct],$$

der (x_0, y_0, z_0) er et punkt på linjen og $[a, b, c]$ er linjens retningsvektor. Vi vet at punktet $(4, 1, 0)$ ligger på linjen l (ettersom det ligger i begge planene), så vi lar $(x_0, y_0, z_0) = (4, 1, 0)$ og får derfor vektorfunksjonen

$$\vec{r}(t) = [4, 1, 0] + [at, bt, ct].$$

Ettersom ethvert punkt på linjen l ligger i begge planene og $[a, b, c]$ er en retningsvektor for l, må vi nødvendigvis ha at

$$[a, b, c] \cdot \vec{n}_\alpha = 0$$

og

$$[a, b, c] \cdot \vec{n}_\beta = 0,$$

altså at

$$a - b = 0, \text{ så } a = b$$

og

$$a + pc = 0.$$

Ingen av disse likningene sier eksplisitt at $a = 0$, så vi kan velge $a = -p$ og får da at Løser vi disse likningene simultant får vi at $a = b = -p$ og $c = 1$. Dermed er vektorfunksjonen vår gitt ved

$$\vec{r}(t) = [4, 1, 0] + [-pt, -pt, t] = [4 - pt, 1 - pt, t],$$

som er ekvivalent med parameterframstillingen

$$l: \begin{cases} x = 4 - pt \\ y = 1 - pt \\ z = t \end{cases}.$$

Oppgave 4

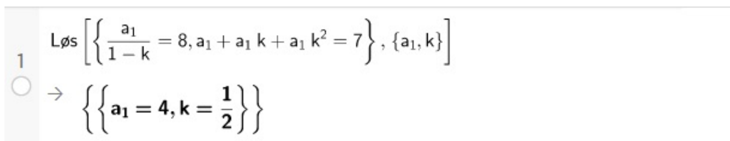
(a) Summen S av en geometrisk rekke er gitt ved

$$S = \frac{a_1}{1 - k},$$

der a_1 er første ledd i rekken og k er kvotienten, $|k| < 1$.
Utifra opplysningene i oppgaven får vi likningssystemet

$$\begin{cases} \frac{a_1}{1-k} = 8 \\ a_1 + ka_1 + k^2 a_1 = 7 \end{cases}.$$

(b)



Vi bruker Løs-funksjonen for å løse likningene. Vi skriver inn likningene som skal løses og markerer hvilke variabler (nemlig a_1 og k) vi ønsker å løse med hensyn på.

Dermed ser vi at kvotienten $k = \dfrac{1}{2}$ og første ledd i rekken $a_1 = 4$.