DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 3\sin x + \cos x$

b) $g(x) = x^2 \cos 2x$

c) $h(x) = \dfrac{2\cos x}{1+\sin x}$. Skriv svaret så enkelt som mulig.

Oppgave 2 (4 poeng)

Bestem integralene

a) $\int \left(x^2 - \dfrac{2}{x} \right) dx$

b) $\int x\cos(2x^2)\, dx$

Oppgave 3 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2\sin(2x) - 1 \quad , \quad x \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

a) Bestem eventuelle topp- og bunnpunkt på grafen til f.

b) Bestem nullpunktene til f.

c) Lag en skisse av grafen til f.

Oppgave 4 (3 poeng)

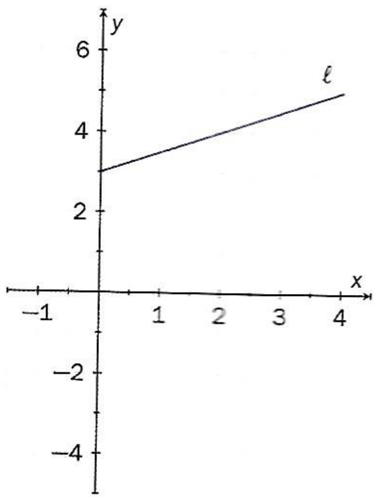
Differensiallikningen $y' = x \cdot y$ er gitt.

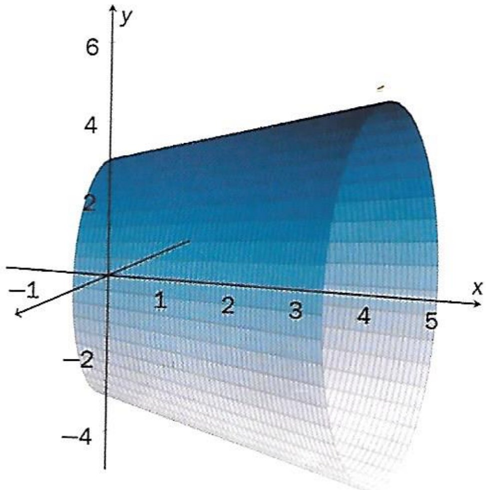
a) Bestem den generelle løsningen av differensiallikningen.

b) Bestem den spesielle løsningen når $y(2) = 5$

Oppgave 5 (3 poeng)

Figuren til venstre nedenfor viser et linjestykke ℓ tegnet i et koordinatsystem. Vi dreier linjestykket $360°$ om x-aksen. Vi får da en avkortet kjegle som vist på figuren til høyre nedenfor.





Bestem volumet av den avkortede kjeglen.

Oppgave 6 (6 poeng)

En kule har sentrum i $S(1, 3, 5)$. Punktet $P(4, -1, 5)$ ligger på kuleflaten.

a) Bestem en likning for kuleflaten.

Et plan α tangerer kuleflaten i punktet P.

b) Vis at $3x - 4y = 16$ er en likning for planet α.

En annen kule har sentrum i $Q(2, 0, 7)$. Planet α tangerer også denne kuleflaten.

c) Bestem likningen til den nye kuleflaten.

Oppgave 7 (7 poeng)

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$S(x) = 1 + \ln x + (\ln x)^2 + (\ln x)^3 + \dots$$

a) Bestem konvergensområdet til rekken.

b) Bestem et enklere uttrykk for $S(x)$ når rekken konvergerer.

c) Bestem x slik at summen av rekken blir 3.

d) For hvilke verdier av r har likningen $S(x) = r$ løsning?

Oppgave 8 (3 poeng)

Vis ved hjelp av induksjon at

$$P(n): \quad \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = \frac{n!-1}{n!} \quad , \quad n \in \{2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Du får bruk for at $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$ og at $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 9x$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f.

Grafen til f har to vendepunkter, A og B. Linjen gjennom A og B har likningen $y = g(x)$.

b) Bestem uttrykket $g(x)$.

Linjen skjærer grafen til f også i to andre punkter: $C(a, f(a))$ og $D(b, f(b))$.

c) Bestem integralet $\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$. Gi en geometrisk tolkning av svaret.

Oppgave 2 (4 poeng)

Vi har gitt punktene $A(3, 2, t)$, $B(4, -3, 3)$ og $C(8, 3, 5)$ der $t \in \mathbb{R}$.

a) Bruk CAS til å vise at arealet av $\triangle ABC$ kan uttrykkes som

$$f(t) = \sqrt{13(t^2 - 8t + 30)}$$

b) Bestem det minste arealet som $\triangle ABC$ kan ha.

Oppgave 3 (3 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) + d \quad , \quad 1 \leq x \leq 2 \quad \text{og} \quad d \in \mathbb{R}$$

Grafen til f roteres 360° om x-aksen.

Bruk CAS til å bestemme mulige verdier for d slik at volumet av omdreiningslegemet blir 6π

Oppgave 4 (4 poeng)

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$S = a + a\cdot k + a\cdot k^2 + \ldots \quad , \quad a \neq 0 \, , \; k \in \mathbb{R}$$

En annen uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$T = a + a\cdot 2k + a\cdot 4k^2 + \ldots \quad , \quad a \neq 0 \, , \; k \in \mathbb{R}$$

a) Bruk CAS til å bestemme a og k når du får vite at $S = 6$ og $T = 12$.

b) Undersøk om det er mulig å finne en verdi for k slik at $S = -2T$.

Oppgave 5 (7 poeng)

En pasient får tilført en medisin kontinuerlig. Dosen er 3,0 mg per time. Samtidig blir en del av medisinen skilt ut av kroppen. Vi antar at det skjer ved at kroppen skiller ut 30 % av den totale medisinmengden per time. Pasienten har ikke noe medisin i kroppen ved oppstarten av behandlingen.

Vi lar $y(t)$ mg være den totale medisinmengden i kroppen ved tiden t, målt i timer, etter at behandlingen startet.

a) Forklar at situasjonen ovenfor gir differensiallikningen

$$y' = -0{,}30y + 3{,}0 \quad , \quad y(0)=0$$

b) Bruk CAS til å løse differensiallikningen i oppgave a).

c) Hvor mye medisin har pasienten i kroppen når behandlingen har pågått i lang tid?

En annen pasient får samme dose av medisinen. Da behandlingen startet, hadde hun en ukjent mengde, y_0 mg, av medisinen i kroppen. Seks timer etter at behandlingen startet, hadde hun 9,17 mg av medisinen i kroppen. Gå ut fra at medisinen også hos denne pasienten skilles ut med 30 % per time.

d) Bestem y_0

NoRDi