Parallellogramisogonalitet

Marius Stensrud

11. juni 2017

Sammendrag

Vi utforsker en konfigurasjon som har opptredd flere ganger i olympiader de siste årene, i tillegg til å jakte vinkler ved hjelp av isogonale konjugater .

1 Introduksjon — isogonale konjugater

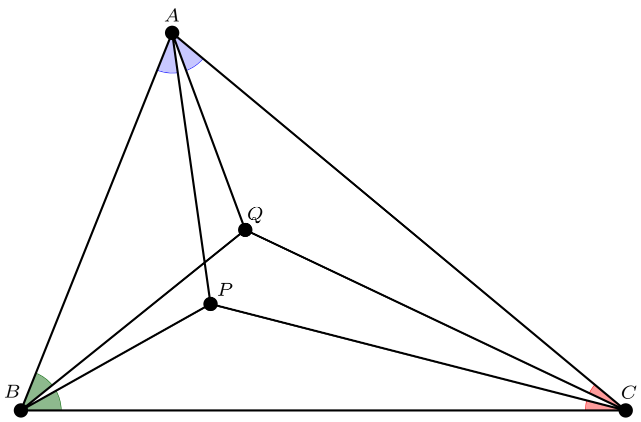
Vi starter med en definisjon:

Definisjon 1.1. La P være et punkt i samme plan som $\triangle ABC$. Vi reflekterer linjene AP, BP og CP over de indre vinkelhalveringslinjene til henholdsvis $\angle BAC, \angle CBA$ og $\angle ACB$. De reflekterte linjene skjærer hverandre i ett punkt Q, som vi kaller den isogonale konjugaten til P.

Bevis. (Prøv deg selv først!). At de reflekterte linjene er konkurrente følger umiddelbart av Cevas teorem i trigonometrisk form. Da er det også klart at den isogonale konjugaten til Q er P selv; derav navnet konjugater. ■

Spørsmål. Hva er den isogonale konjugaten til omsenteret i en trekant? Hvordan kan dette hjelpe deg med å løse geometrioppgaven fra Abelfinalen i år?

Vi kan også si at to linjer er isogonale: For eksempel så er AP og AQ isogonale med hensyn på $\angle BAC$ i figuren nedenfor.



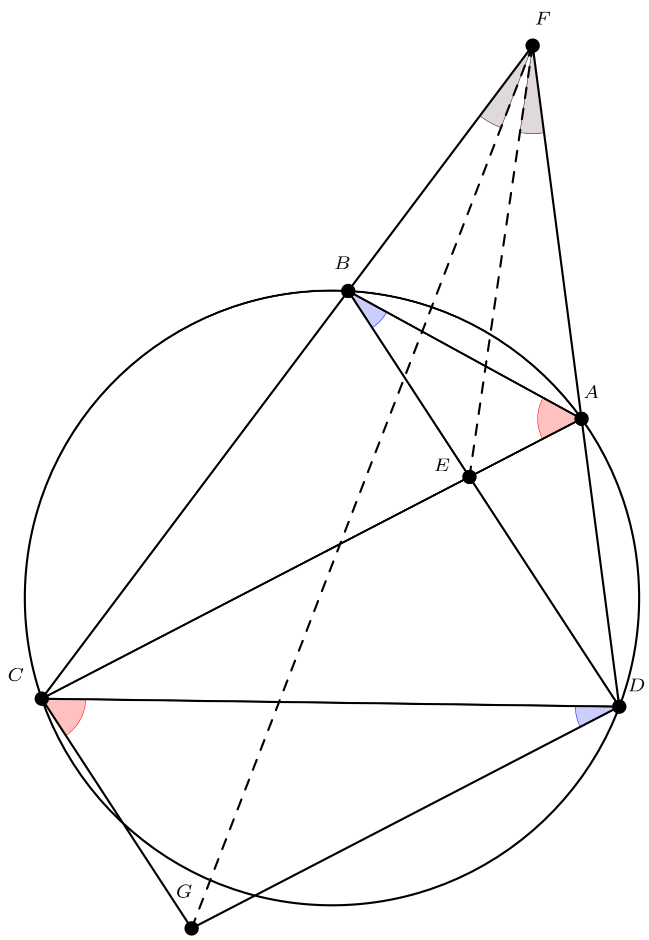
Figur 1: P og Q er isogonale konjugater.

Det som gjør isogonale konjugater til et nyttig konsept er at hvis du har to vinkellikheter, så får du en tredje på kjøpet. Dette kan være lurt å ha i bakhodet når man gjør vinkeljakt.

2 Lemmaet

Konfigurasjonen opptrer naturlig på følgende måte:

Lemma 2.1 (Parallellogramisogonalitet)**.** *La $ABCD$ være en syklisk firkant der hvor diagonalene krysser hverandre i E. Vi setter $F = AD \cap BC$ og kaller refleksjonen av E over midtpunktet på CD for G. Da er FE og FG isogonale med hensyn på $\angle AFB$.*



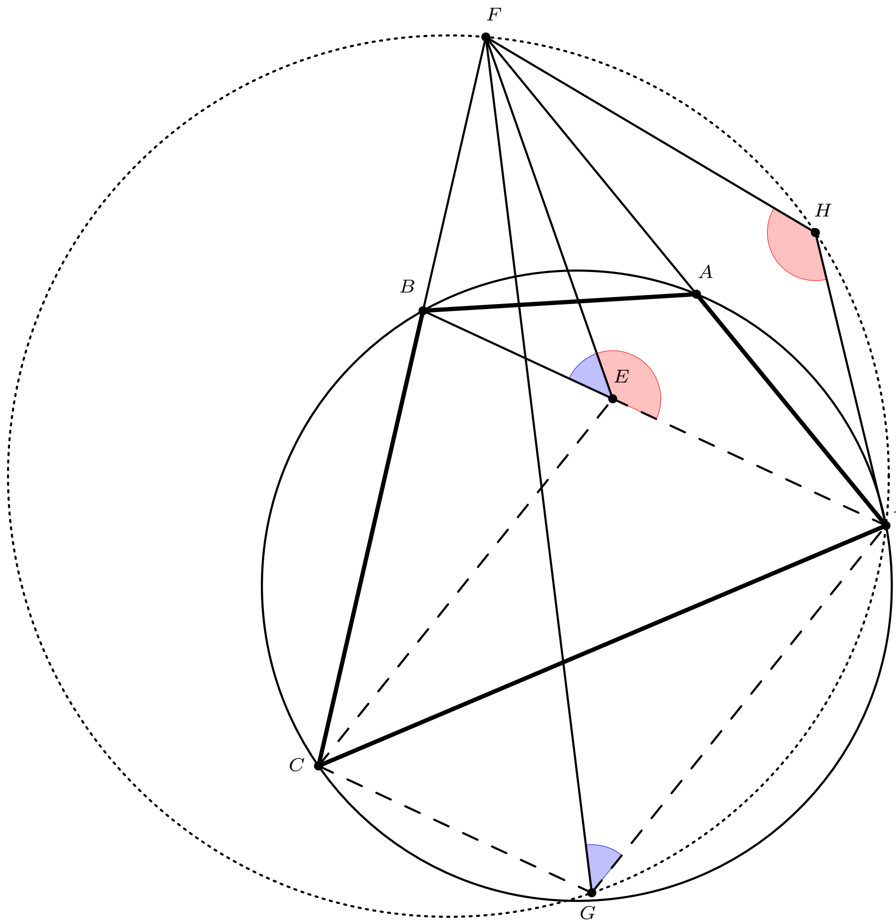
Bevis. Vi har trivielt at $\triangle FAB \sim \triangle FCD$. La T være sammensetningen av en homoteti og en refleksjon om vinkelhalveringslinjen til $\angle BAF$, som sender A til C og B til D. Hvis vi klarer å vise at T sender E til G vil vi være ferdige. Men $\triangle ABE \sim \triangle DCE \sim \triangle CDG$, som betyr at firkantene $FAEB$ og $FCGD$ er formlike. Siden T bevarer formlikhet må $T(E) = G$, som ønsket. ■

I flere bevis så hender det at løsningen innebærer å konstruere et nytt punkt som ingen noensinne hadde tenkt på — uten lemma 2.1 så ville kanskje konstruksjonen av et tilsvarende punkt som G sett veldig umotivert ut. Alt virker mindre tryllete når vi har sett hva som egentlig foregår.

Nå går vi over til en oppgave som ble gitt på Viking Battle i 2013. Prøv gjerne å løse den selv først!

2.1 Et eksempel fra Viking Battle

Oppgave (IMO Shortlist 2012)**.** Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral whose diagonals AC and BD meet at E. The extensions of the sides AD and BC beyond A and B meet at F. Let G be the point such that $ECGD$ is a parallelogram, and let H be the image of E under reflection in AD. Prove that D, H, F, G are concyclic.



Bevis. Vi gjenkjenner umiddelbart lemmaet vårt, og tegner inn linjene FG og FE. Siden dette gir oss et par like vinkler virker det som vinkeljakt kanskje vil føre frem. Kan vi gjøre noen andre observasjoner? H er litt klønete definert, og det virker mer naturlig å bruke vinkelen $\angle DEF$ istedenfor $\angle FHD$ - de er trivielt like. Da gjenstår det bare å vise at $\angle DGF = \angle FEB$, men transformasjonen vi brukte til å bevise lemmaet kan igjen brukes her for å vise at $\triangle FGD \sim \triangle FEB$, og vi er ferdige. ■

Kommentar. Hadde vi ikke kjent til parallellogramisogonaliteten ville det vært mye vanskeligere å jakte vinkler, for å ikke snakke om å komme på lemmaet selv underveis! Her var det ganske enkelt å gjenkjenne konfigurasjonen, men det er dessverre ikke alltid slik.

3 Oppgaver

Oppgavene under er ikke nødvendigvis i stigende vanskelighetsgrad, men rekkefølgen er gjennomtenkt. Poenget med oppgavene er at det skal bli enklere å gjenkjenne hvor teknikkene ovenfor kan anvendes etter at man har gjort de. Det er ikke gitt at alle kan løses med lemmaet vårt.

Oppgave 1 (British Mathematical Olympiad 2013 Round 2)**.** The point P lies inside triangle ABC so that $\angle ABP = \angle PCA$. The point Q is such that $PBQC$ is a parallelogram. Prove that $\angle QAB = \angle CAP$.

Oppgave 2 (Taiwan TST 2014)**.** Let P be a point inside triangle ABC, and suppose lines AP, BP, CP meet the circumcircle again at T, S, R (here $T \neq A$, $S \neq B$, $R \neq C$). Let U be any point in the interior of PT. A line through U parallel to AB meets CR at W, and the line through U parallel to AC meets BS again at V. Finally, the line through B parallel to CP and the line through C parallel to BP intersect at point Q. Given that RS and VW are parallel, prove that $\angle CAP = \angle BAQ$.

Oppgave 3 (EGMO 2016)**.** Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral, and let diagonals AC and BD intersect at X.Let C_1, D_1 and M be the midpoints of segments CX, DX and CD, respecctively. Lines AD_1 and BC_1 intersect at Y, and line MY intersects diagonals AC and BD at different points E and F, respectively. Prove that line XY is tangent to the circle through E, F and X.

Oppgave 4 (IMO Shortlist 2009)**.** Given a cyclic quadrilateral $ABCD$, let the diagonals AC and BD meet at E and the lines AD and BC meet at F. The midpoints of AB and CD are G and H, respectively. Show that EF is tangent at E to the circle through the points E, G and H.

Oppgave 5 (ELMO 2012/5)**.** Let ABC be an acute triangle with $AB < AC$, and let D and E be points on side BC such that $BD = CE$ and D lies between B and E. Suppose there exists a point P inside ABC such that $PD \parallel AE$ and $\angle PAB = \angle EAC$. Prove that $\angle PBA = \angle PCA$.

Oppgave 6 (All-Russian Olympiad 2011)**.** Let N be the midpoint of arc ABC of the circumcircle of triangle ABC, let M be the midpoint of AC and let I_1, I_2 be the incentres of triangles ABM and CBM. Prove that points I_1, I_2, B, N lie on a circle.

Hint på neste side.

4 Hint

Oppgave 1. Denne klarer du selv.

Oppgave 2. (Spiller det noen rolle hvor på PTU ligger?). Det er tydelig at de isogonale linjene skal møtes i A. Definerer vi $E = BP \cap AC$ og $F = CP \cap AB$ vil $BCEF$ være den sykliske firkanten i lemmaet vårt. Nå gjenstår det bare å vise at $RS \parallel VW \implies$ at $BCEF$ er syklisk.

Oppgave 3. YX og YM er isogonale. Et ganske avslørende hint er at det holder å vise at firkantene YD_1MC_1 og $YBXA$ er formlike.

Oppgave 4. La X være punktet som er slik at $CXDE$ er et parallellogram. FX er parallell med GH.

Oppgave 5. Her må du også forlenge noen linjer, slik som i oppgave 2. Tegn også inn parallellogrammet som mangler. Jakt noen vinkler.

Oppgave 6. $\angle I_2BI_1$ burde være grei å finne, og da mangler du bare én vinkel. Hvor er de isogonale linjene? Finn to isogonale konjugater med disse to, sammen med det faktum at $\angle I_1MI_2 = 90°$. Denne oppgaven er ganske vanskelig.