Utdanningsdirektoratet

Eksamen

24.11.2017

REA3028 Matematikk S2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 3 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 8 oppgåver. Del 2 har 3 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing. Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast med utskrift eller gjennom ein IKT-basert eksamen.
Vedlegg 1:	Tabell over standard normalfordeling.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar – vurderer om svar er rimelege
Andre opplysningar:	Kjelder for bilete, teikningar osv.: • Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (5 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = 2x^2 - 4x^3$

b) $g(x) = x^2 e^x$

c) $h(x) = \ln(x^3 + 3x + 1)$

Oppgåve 2 (4 poeng)

a) Utfør divisjonen

$$(x^3 - 5x^2 - 4x + 20) : (x - 5)$$

b) Bestem t slik at divisjonen under går opp.

$$(x^3 + t\,x^2 + 5x - 2t) : (x + 1)$$

Oppgåve 3 (2 poeng)

Løys likningssystemet

$$\begin{bmatrix} x + y + 2z = -3 \\ x + 3y + z = 2 \\ 2x + y + z = 2 \end{bmatrix}$$

Oppgåve 4 (2 poeng)

Skriv så enkelt som mogleg

$$\ln\left(\frac{e^2}{2}\right) + 2\ln 2 - \ln\left(\frac{2}{e^4}\right)$$

Oppgåve 5 (4 poeng)

Ei aritmetisk rekkje er gitt ved $3+7+11+15+\cdots+119$

a) Bestem ein formel for ledd nummer n i denne rekkja.

b) Bestem summen av rekkja.

Oppgåve 6 (4 poeng)

Totalkostnaden K i kroner for å produsere ei vare er gitt ved

$$K(x)=x^2+50x+6400$$

Her er x talet på produserte einingar per veke.

a) Bestem grensekostnaden når det blir produsert 50 einingar. Kva fortel dette svaret oss?

b) Bestem den produksjonsmengda x som gir lågast kostnad per produserte eining.

Oppgåve 7 (7 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=(x-2)e^x$$

a) Bestem eventuelle nullpunkt til f.

b) Bestem eventuelle toppunkt og botnpunkt på grafen til f.

c) Bestem eventuelle vendepunkt på grafen til f.

d) Lag ei skisse av grafen til f.

Oppgåve 8 (8 poeng)

I eit lotteri gjeld dette:

- Kvart lodd kostar 10 kroner.
- Halvparten av lodda gir ein gevinst på 10 kroner.
- 10 % av lodda gir ein gevinst på 50 kroner.
- Resten av lodda gir ingen gevinst.

Den stokastiske variabelen *X* er nettogevinsten (gevinst minus loddpris) på eit tilfeldig lodd.

a) Vis at $\mathrm{E}(X) = 0$ og $\mathrm{Var}(X) = 200$.

La *S* vere den stokastiske variabelen $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_{50}$ som gir nettogevinsten ved kjøp av 50 lodd.

b) Grunngi at *S* er tilnærma normalfordelt.

c) Vis at $\mathrm{E}(S) = 0$ og $\mathrm{SD}(S) = 100$.

Anja ønskjer å kjøpe seg ei jakke til 650 kroner, men har berre 500 kroner. Ho vurderer derfor å kjøpe lodd for alle pengane.

d) Bestem sannsynet for at Anja får nok pengar til å kjøpe jakka dersom ho satsar alle pengane i lotteriet. Du kan få bruk for standard normalfordelingstabellen i vedlegg 1.

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (10 poeng).

Julie har fått seg ny jobb. Funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 400\,000 \cdot 1{,}05^x$$

er ein god modell for årslønna (i kroner) til Julie x år etter at ho starta i jobben.

a) Bruk grafteiknar for å teikne grafen til f for $0 \leq x \leq 35$.

b) Når vil årslønna hennar passere 800 000 kroner?

c) Bruk CAS til å bestemme kor mange år det går før lønnsauken per år passerer 50 000 kroner .

Julie reknar med å jobbe i bedrifta i 30 år.

d) Bestem ein tilnærmingsverdi for kor mykje ho vil tene i løpet av denne perioden, ved å rekne ut eit integral.

e) Bestem kor mykje ho vil tene i løpet av denne perioden, ved å summere ledda i ei rekkje.

Oppgåve 2 (8 poeng)

Annette vurderer å ta opp eit bustadlån på 1 500 000 kroner. Renta er 0,3 % per månad. Lånet skal nedbetalast som eit annuitetslån med 180 månadlege terminar. Første innbetaling er éin månad etter låneopptak.

a) Vis at terminbeløpet Annette må betale, er 10 797 kroner.

Annette reknar med å ha litt trong økonomi dei nærmaste åra. Banken tilbyr henne derfor ei ordning der ho betaler 8000 kroner per månad dei første fem åra. Etter dette aukar terminbeløpet slik at lånet er heilt nedbetalt 15 år etter at ho tok opp lånet.

b) Vis at Annette har 1 270 289 kroner igjen av lånet etter dei fem første åra dersom ho vel denne ordninga.

c) Bestem det månadlege terminbeløpet dei siste 120 terminane dersom Annette går inn for denne ordninga.

Annette liker ordninga med redusert terminbeløp dei første fem åra, men synest det nye terminbeløpet i c) er litt for høgt. Ho ønskjer å betale 11 000 kroner i terminbeløp etter dei fem første åra.

d) Bruk CAS til å bestemme kor mykje dette vil forlengje tida det tek å nedbetale lånet.

Oppgåve 3 (6 poeng)

På ein frøpose står det at spireevna er 85 %. Det er 200 frø i kvar pose. La X vere talet på frø som spirer, i ein tilfeldig frøpose. Går ut frå at X er binomisk fordelt.

a) Bestem $P(X \geq 175)$.

Nora hadde mistanke om at spireevna var lågare enn 85 %. Ho ville derfor utføre ein hypotesetest. Ho ville teste nullhypotesen

$$H_0: \quad p = 0{,}85$$

mot den alternative hypotesen

$$H_1: \quad p < 0{,}85$$

Ho sådde derfor 200 frø. Det viste seg at 160 av frøa spirte.

b) Avgjer om Nora hadde rett i mistanken, ved å utføre hypotesetesten. Bruk eit signifikansnivå på 5 %.

Nora har ikkje programvare til å utføre binomiske berekningar. Ho må derfor gjere ein hypotesetest med ei normaltilpassing av X.

c) Gå ut frå at X er tilnærma normalfordelt. Bruk dette til å utføre hypotesetesten.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 8 oppgaver. Del 2 har 3 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.
Vedlegg 1:	Tabell over standard normalfordeling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger – vurderer om svar er rimelige
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv.: • Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x)=2x^2-4x^3$

b) $g(x)=x^2e^x$

c) $h(x)=\ln(x^3+3x+1)$

Oppgave 2 (4 poeng)

a) Utfør divisjonen

$$(x^3-5x^2-4x+20):(x-5)$$

b) Bestem t slik at divisjonen nedenfor går opp.

$$(x^3+t\,x^2+5x-2t):(x+1)$$

Oppgave 3 (2 poeng)

Løs likningssystemet

$$\begin{bmatrix} x+y+2z=-3 \\ x+3y+z=2 \\ 2x+y+z=2 \end{bmatrix}$$

Oppgave 4 (2 poeng)

Skriv så enkelt som mulig

$$\ln\left(\frac{e^2}{2}\right)+2\ln 2-\ln\left(\frac{2}{e^4}\right)$$

Oppgave 5 (4 poeng)

En aritmetisk rekke er gitt ved $3+7+11+15+\cdots+119$

a) Bestem en formel for ledd nummer n i denne rekken.

b) Bestem summen av rekken.

Oppgave 6 (4 poeng)

Totalkostnaden K i kroner for å produsere en vare er gitt ved

$$K(x)=x^2+50x+6400$$

Her er x antall produserte enheter per uke.

a) Bestem grensekostnaden når det produseres 50 enheter. Hva forteller dette svaret oss?

b) Bestem den produksjonsmengden x som gir lavest kostnad per produserte enhet.

Oppgave 7 (7 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x$$

a) Bestem eventuelle nullpunkter til f.

b) Bestem eventuelle toppunkter og bunnpunkter på grafen til f.

c) Bestem eventuelle vendepunkter på grafen til f.

d) Lag en skisse av grafen til f.

Oppgave 8 (8 poeng)

I et lotteri gjelder følgende:

- Hvert lodd koster 10 kroner.
- Halvparten av loddene gir en gevinst på 10 kroner.
- 10 % av loddene gir en gevinst på 50 kroner.
- Resten av loddene gir ingen gevinst.

Den stokastiske variabelen *X* er nettogevinsten (gevinst minus loddpris) på et tilfeldig lodd.

a) Vis at $\mathrm{E}(X) = 0$ og $\mathrm{Var}(X) = 200$.

La *S* være den stokastiske variabelen $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_{50}$ som gir nettogevinsten ved kjøp av 50 lodd.

b) Begrunn at *S* er tilnærmet normalfordelt.

c) Vis at $\mathrm{E}(S) = 0$ og $\mathrm{SD}(S) = 100$.

Anja ønsker å kjøpe seg en jakke til 650 kroner, men har bare 500 kroner. Hun vurderer derfor å kjøpe lodd for alle pengene.

d) Bestem sannsynligheten for at Anja får nok penger til å kjøpe jakken dersom hun satser alle pengene i lotteriet. Du kan få bruk for standard normalfordelingstabellen i vedlegg 1.

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (10 poeng).

Julie har fått seg ny jobb. Funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 400\,000 \cdot 1{,}05^x$$

er en god modell for årslønnen (i kroner) til Julie x år etter at hun startet i jobben.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f for $0 \leq x \leq 35$.

b) Når vil årslønnen hennes passere 800 000 kroner?

c) Bruk CAS til å bestemme hvor mange år det går før lønnsøkningen per år passerer 50 000 kroner.

Julie regner med å jobbe i bedriften i 30 år.

d) Bestem en tilnærmingsverdi for hvor mye hun vil tjene i løpet av denne perioden, ved å regne ut et integral.

e) Bestem hvor mye hun vil tjene i løpet av denne perioden, ved å summere leddene i en rekke.

Oppgave 2 (8 poeng)

Annette vurderer å ta opp et boliglån på 1 500 000 kroner. Renten er 0,3 % per måned. Lånet skal nedbetales som et annuitetslån med 180 månedlige terminer. Første innbetaling er én måned etter låneopptak.

a) Vis at terminbeløpet Annette må betale, er 10 797 kroner.

Annette regner med å ha litt trang økonomi de nærmeste årene. Banken tilbyr henne derfor en ordning der hun betaler 8000 kroner per måned de første fem årene. Etter dette økes terminbeløpet slik at lånet er helt nedbetalt 15 år etter at hun tok opp lånet.

b) Vis at Annette har 1 270 289 kroner igjen av lånet etter de fem første årene dersom hun velger denne ordningen.

c) Bestem det månedlige terminbeløpet de siste 120 terminene dersom Annette går inn for denne ordningen.

Annette liker ordningen med redusert terminbeløp de første fem årene, men synes det nye terminbeløpet i c) er litt for høyt. Hun ønsker å betale 11 000 kroner i terminbeløp etter de fem første årene.

d) Bruk CAS til å bestemme hvor mye dette vil forlenge tiden det tar å nedbetale lånet.

Oppgave 3 (6 poeng)

På en frøpose står det at spireevnen er 85 %. Det er 200 frø i hver pose. La X være antall frø som spirer, i en tilfeldig frøpose. Vi antar at X er binomisk fordelt.

a) Bestem $P(X \geq 175)$.

Nora hadde mistanke om at spireevnen var lavere enn 85 %. Hun ville derfor utføre en hypotesetest. Hun ville teste nullhypotesen

$$H_0: \quad p = 0,85$$

mot den alternative hypotesen

$$H_1: \quad p < 0,85$$

Hun sådde derfor 200 frø. Det viste seg at 160 av frøene spirte.

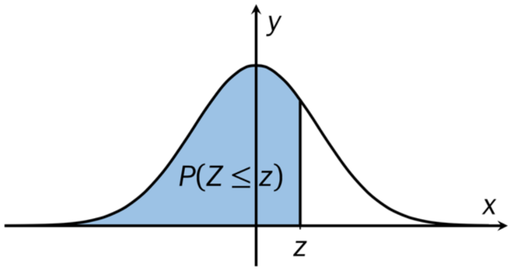
b) Avgjør om Noras mistanke er berettiget, ved å utføre hypotesetesten. Bruk et signifikansnivå på 5 %.

Nora har ikke programvare til å utføre binomiske beregninger. Hun må derfor gjøre en hypotesetest med en normaltilpasning av X.

c) Gå ut fra at X er tilnærmet normalfordelt. Bruk dette til å utføre hypotesetesten.

Vedlegg 1

Standard normalfordeling



Tabellen viser $P(Z \le z)$ for $-3{,}09 \le z \le 3{,}09$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Blank side.

Blank side.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet