Utdanningsdirektoratet

Eksamen

28.05.2018

REA3024 Matematikk R2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 3 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 8 oppgåver. Del 2 har 4 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing. Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar – vurderer om svar er rimelege
Andre opplysningar:	Kjelder for bilete, teikningar osv.: • Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (3 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = \cos(\pi x - 2)$

b) $g(x) = x \cdot \sin x$

Oppgåve 2 (5 poeng)

Bestem integrala

a) $\int (4x^2 + 3x)\,\mathrm{d}x$

b) $\int 4x^2 \cdot \ln x\,\mathrm{d}x$

c) $\int_0^{\sqrt{12}} \frac{2x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

Oppgåve 3 (3 poeng)

I ei aritmetisk rekkje $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ er $a_2 = 4$ og $a_5 = 13$.

Bestem ein eksplisitt formel for summen av denne rekkja.

Oppgåve 4 (3 poeng)

Ei differensiallikning er gitt ved

$$y' = (\sin x) \cdot y^2$$

a) Bestem den generelle løysinga av differensiallikninga.

b) Bestem den løysinga av differensiallikninga som er slik at $y(\pi) = 1$.

Oppgåve 5 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 1 - x^2$$

Eit flatestykke er avgrensa av x-aksen og grafen til f.

a) Bestem arealet av flatestykket.

Vi får ein omdreiingslekam ved å dreie flatestykket $360°$ om x-aksen.

b) Bestem volumet av omdreiingslekamen.

Oppgåve 6 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) \quad , \quad x \in \langle 1, 9 \rangle$$

a) Bestem eventuelle toppunkt og botnpunkt på grafen til f.

b) Bestem nullpunkta til f.

c) Lag ei skisse av grafen til f.

d) Løys likninga $f(x) = \sqrt{3}$

Oppgåve 7 (6 poeng)

Ei kuleflate er gitt ved

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y + z^2 - 8z - 20 = 0$$

a) Vis at sentrum i kula er $S(3,\,-2,\,4)$. Bestem radien til kuleflata.

Eit plan er gitt ved

$$6x - 3y + 2z - 4 = 0$$

b) Bestem avstanden frå sentrum S i kula til planet.

Skjeringa mellom kuleflata og planet er ein sirkel.

c) Bestem arealet av sirkelen.

Oppgåve 8 (4 poeng)

Ei uendeleg geometrisk rekkje er gitt ved

$$S(x) = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \ldots$$

a) Bestem konvergensområdet til rekkja.

b) For kva verdiar av a har likninga $S(x) = a$ løysing?

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (6 poeng)

Funksjonane f og g er gitt ved

$$f(x) = -x^2 + 3x + 3$$
$$g(x) = x^2 + 1$$

a) Bruk grafteiknar til å teikne grafane til f og g i same koordinatsystem.

Grafane til f og g avgrensar eit flatestykke med areal A.

b) Bestem A ved hjelp av CAS.

Tyngdepunktet T til flatestykket er $\left(\frac{M}{A}, \frac{N}{A}\right)$, der M og N er gitt ved

$$M = \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x))\ dx$$
$$N = \frac{1}{2}\int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\ dx$$

Tala a og b er x-koordinatane til skjeringspunkta mellom grafane til f og g, der $a < b$.

c) Bestem koordinatane til T ved hjelp av CAS.

Oppgåve 2 (6 poeng)

Gitt punkta $A(0, 0, 0)$, $B(1, t+2, 3t)$, $C(0, 4, t+1)$ og $D(t-3, 8, 1)$, der $0 \leq t \leq 10$.

a) Bestem arealet av trekanten *ABC* for $t = 2$.

b) Bruk CAS til å bestemme *t* slik at arealet av trekanten *ABC* blir lik 6.

c) Bestem t slik at volumet av pyramiden *ABCD* blir størst mogleg.

Oppgåve 3 (8 poeng)

I ein by med 12 000 innbyggjarar spreier det seg ein smittsam sjukdom. Det viser seg at vekstfarten i talet på smitta personar til kvar tid er proporsjonal med talet på personar som enno ikkje er smitta. Vi lar *k* vere proporsjonalitetskonstanten.

a) Set opp ei differensiallikning som beskriv talet på smitta personar $y(t)$, der *t* er talet på veker etter at sjukdommen blei oppdaga.

Da sjukdommen blei oppdaga, var 100 personar smitta.

b) Vis at $y(t) = 12000 - 11900 \cdot e^{-kt}$

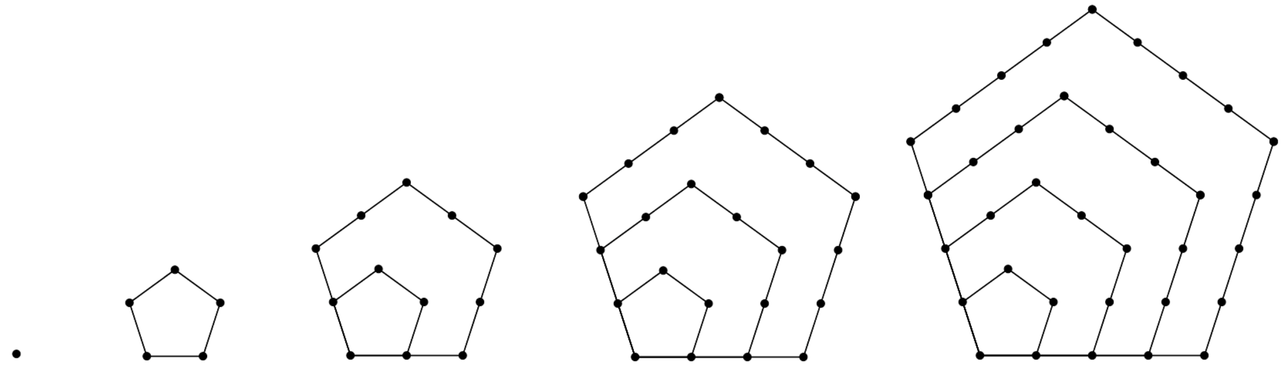
Etter 10 veker var 4 000 personar smitta.

c) Bruk dette til å bestemme k.

d) Ved kva tidspunkt var halvparten av innbyggjarane i byen smitta av sjukdommen?

Oppgåve 4 (4 poeng)

Figuren nedanfor viser korleis femkanttala er bygde opp.



$P_1 = 1$ $\quad$ $P_2 = 5$ $\quad$ $P_3 = 12$ $\quad$ $P_4 = 22$ $\quad$ $P_5 = 35$

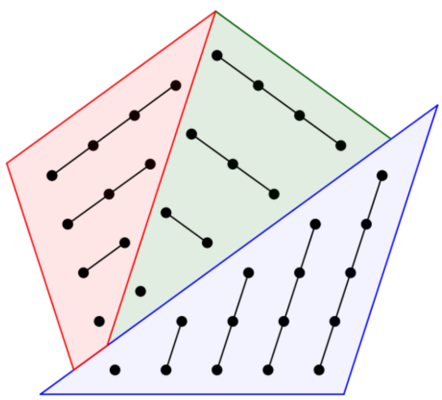
Femkanttala er gitt ved den rekursive formelen

$$P_{n+1} = P_n + 3n + 1 \ , \ P_1 = 1$$

a) Vis ved induksjon at

$$P_n = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Mathias observerer at det er mogleg å rekne ut P_n som summen av tre trekanttal, der trekanttal nummer n er $T_n = 1 + 2 + \cdots + n$. Sjå figuren nedanfor. Han brukte dette til å vise at $P_n = \dfrac{3n^2 - n}{2}$



Mathias' oppdeling av P_5

b) Bruk ideen til Mathias til å utleie formelen for P_n.

Bokmål

Eksamensinformasjon

Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 8 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger – vurderer om svar er rimelige
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv.: • Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = \cos(\pi x - 2)$

b) $g(x) = x \cdot \sin x$

Oppgave 2 (5 poeng)

Bestem integralene

a) $\int (4x^2 + 3x)\,\mathrm{d}x$

b) $\int 4x^2 \cdot \ln x\,\mathrm{d}x$

c) $\int_0^{\sqrt{12}} \frac{2x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

Oppgave 3 (3 poeng)

I en aritmetisk rekke $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ er $a_2 = 4$ og $a_5 = 13$.

Bestem en eksplisitt formel for summen av denne rekken.

Oppgave 4 (3 poeng)

En differensiallikning er gitt ved

$$y' = (\sin x) \cdot y^2$$

a) Bestem den generelle løsningen av differensiallikningen.

b) Bestem den løsningen av differensiallikningen som er slik at $y(\pi) = 1$.

Oppgave 5 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 1 - x^2$$

Et flatestykke er avgrenset av x-aksen og grafen til f.

a) Bestem arealet av flatestykket.

Vi får et omdreiningslegeme ved å dreie flatestykket 360° om x-aksen.

b) Bestem volumet av omdreiningslegemet.

Oppgave 6 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) \quad , \quad x \in \langle 1, 9 \rangle$$

a) Bestem eventuelle toppunkter og bunnpunkter på grafen til f.

b) Bestem nullpunktene til f.

c) Lag en skisse av grafen til f.

d) Løs likningen $f(x) = \sqrt{3}$

Oppgave 7 (6 poeng)

En kuleflate er gitt ved

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y + z^2 - 8z - 20 = 0$$

a) Vis at sentrum i kulen er $S(3,\ -2,\ 4)$. Bestem radien til kuleflaten.

Et plan er gitt ved

$$6x - 3y + 2z - 4 = 0$$

b) Bestem avstanden fra kulens sentrum S til planet.

Skjæringen mellom kuleflaten og planet er en sirkel.

c) Bestem arealet av sirkelen.

Oppgave 8 (4 poeng)

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$S(x) = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \ldots$$

a) Bestem konvergensområdet til rekken.

b) For hvilke verdier av a har likningen $S(x) = a$ løsning?

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Funksjonene f og g er gitt ved

$$f(x) = -x^2 + 3x + 3$$
$$g(x) = x^2 + 1$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafene til f og g i samme koordinatsystem.

Grafene til f og g avgrenser et flatestykke med areal A.

b) Bestem A ved hjelp av CAS.

Tyngdepunktet T til flatestykket er $\left(\dfrac{M}{A}, \dfrac{N}{A}\right)$, der M og N er gitt ved

$$M = \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x)) \, \mathrm{d}x$$
$$N = \frac{1}{2}\int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) \, \mathrm{d}x$$

Tallene a og b er x-koordinatene til skjæringspunktene mellom grafene til f og g, der $a < b$.

c) Bestem koordinatene til T ved hjelp av CAS.

Oppgave 2 (6 poeng)

Gitt punktene $A(0, 0, 0)$, $B(1, t+2, 3t)$, $C(0, 4, t+1)$ og $D(t-3, 8, 1)$, der $0 \le t \le 10$.

a) Bestem arealet av trekanten *ABC* for $t = 2$.

b) Bruk CAS til å bestemme *t* slik at arealet til trekanten *ABC* blir lik 6.

c) Bestem t slik at volumet av pyramiden *ABCD* blir størst mulig.

Oppgave 3 (8 poeng)

I en by med 12 000 innbyggere sprer det seg en smittsom sykdom. Det viser seg at vekstfarten i antall smittede personer til enhver tid er proporsjonal med antall personer som ennå ikke er smittet. Vi lar *k* være proporsjonalitetskonstanten.

a) Sett opp en differensiallikning som beskriver antall smittede personer $y(t)$, der *t* er antall uker etter at sykdommen ble oppdaget.

Da sykdommen ble oppdaget, var 100 personer smittet.

b) Vis at $y(t) = 12000 - 11900 \cdot e^{-kt}$

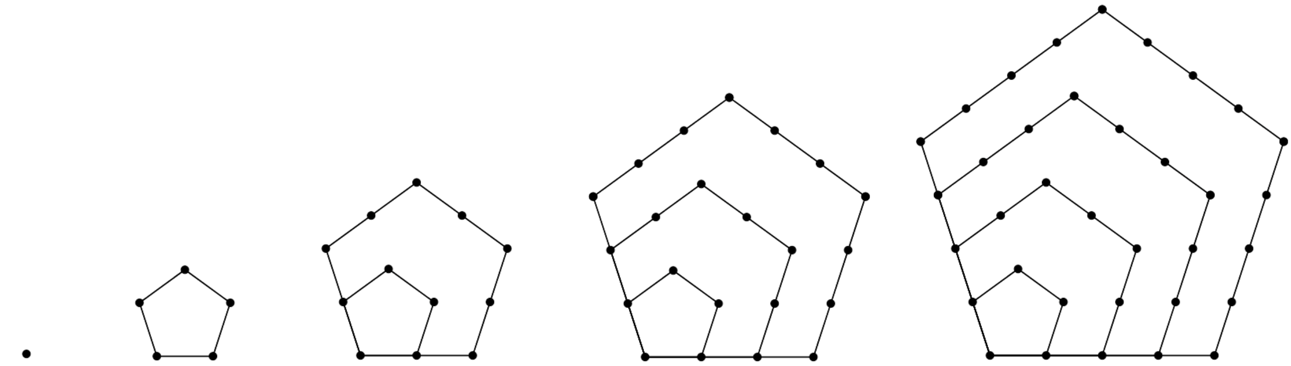
Etter 10 uker var 4 000 personer smittet.

c) Bruk dette til å bestemme k.

d) Ved hvilket tidspunkt var halvparten av innbyggerne i byen smittet av sykdommen?

Oppgave 4 (4 poeng)

Figuren nedenfor viser hvordan femkanttallene er bygd opp.



$P_1 = 1$ $\quad$ $P_2 = 5$ $\quad$ $P_3 = 12$ $\quad$ $P_4 = 22$ $\quad$ $P_5 = 35$

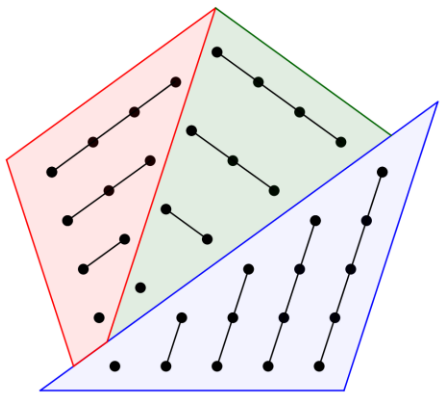
Femkanttallene er gitt ved den rekursive formelen

$$P_{n+1} = P_n + 3n + 1 \ , \ P_1 = 1$$

a) Vis ved induksjon at

$$P_n = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Mathias observerer at det er mulig å regne ut P_n som summen av tre trekanttall, der trekanttall nummer n er $T_n = 1 + 2 + \cdots + n$. Se figuren nedenfor. Han brukte dette til å vise at $P_n = \dfrac{3n^2 - n}{2}$



Mathias' oppdeling av P_5

b) Bruk ideen til Mathias til å utlede formelen for P_n .

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet