DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = \cos(\pi x - 2)$

b) $g(x) = x \cdot \sin x$

Oppgave 2 (5 poeng)

Bestem integralene

a) $\int (4x^2 + 3x)\,dx$

b) $\int 4x^2 \cdot \ln x\,dx$

c) $\int_0^{\sqrt{12}} \frac{2x}{x^2 + 4}\,dx$

Oppgave 3 (3 poeng)

I en aritmetisk rekke $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ er $a_2 = 4$ og $a_5 = 13$.

Bestem en eksplisitt formel for summen av denne rekken.

Oppgave 4 (3 poeng)

En differensiallikning er gitt ved

$$y' = (\sin x) \cdot y^2$$

a) Bestem den generelle løsningen av differensiallikningen.

b) Bestem den løsningen av differensiallikningen som er slik at $y(\pi) = 1$.

Oppgave 5 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 1 - x^2$$

Et flatestykke er avgrenset av x-aksen og grafen til f.

a) Bestem arealet av flatestykket.

Vi får et omdreiningslegeme ved å dreie flatestykket 360° om x-aksen.

b) Bestem volumet av omdreiningslegemet.

Oppgave 6 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) \quad , \quad x \in \langle 1, 9 \rangle$$

a) Bestem eventuelle toppunkter og bunnpunkter på grafen til f.

b) Bestem nullpunktene til f.

c) Lag en skisse av grafen til f.

d) Løs likningen $f(x) = \sqrt{3}$

Oppgave 7 (6 poeng)

En kuleflate er gitt ved

$$x^2-6x+y^2+4y+z^2-8z-20=0$$

a) Vis at sentrum i kulen er $S(3, -2, 4)$. Bestem radien til kuleflaten.

Et plan er gitt ved

$$6x-3y+2z-4=0$$

b) Bestem avstanden fra kulens sentrum S til planet.

Skjæringen mellom kuleflaten og planet er en sirkel.

c) Bestem arealet av sirkelen.

Oppgave 8 (4 poeng)

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$S(x)=1-2x+4x^2-8x^3+\dots$$

a) Bestem konvergensområdet til rekken.

b) For hvilke verdier av a har likningen $S(x)=a$ løsning?

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Funksjonene f og g er gitt ved

$$f(x) = -x^2 + 3x + 3$$
$$g(x) = x^2 + 1$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafene til f og g i samme koordinatsystem.

Grafene til f og g avgrenser et flatestykke med areal A.

b) Bestem A ved hjelp av CAS.

Tyngdepunktet T til flatestykket er $\left(\frac{M}{A}, \frac{N}{A}\right)$, der M og N er gitt ved

$$M = \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x))\,dx$$
$$N = \frac{1}{2}\int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\,dx$$

Tallene a og b er x-koordinatene til skjæringspunktene mellom grafene til f og g, der $a < b$.

c) Bestem koordinatene til T ved hjelp av CAS.

Oppgave 2 (6 poeng)

Gitt punktene $A(0, 0, 0)$, $B(1, t+2, 3t)$, $C(0, 4, t+1)$ og $D(t-3, 8, 1)$, der $0 \leq t \leq 10$.

a) Bestem arealet av trekanten ABC for $t=2$.

b) Bruk CAS til å bestemme t slik at arealet til trekanten ABC blir lik 6.

c) Bestem t slik at volumet av pyramiden $ABCD$ blir størst mulig.

Oppgave 3 (8 poeng)

I en by med 12 000 innbyggere sprer det seg en smittsom sykdom. Det viser seg at vekstfarten i antall smittede personer til enhver tid er proporsjonal med antall personer som ennå ikke er smittet. Vi lar k være proporsjonalitetskonstanten.

a) Sett opp en differensiallikning som beskriver antall smittede personer $y(t)$, der t er antall uker etter at sykdommen ble oppdaget.

Da sykdommen ble oppdaget, var 100 personer smittet.

b) Vis at $y(t) = 12000 - 11900 \cdot e^{-kt}$

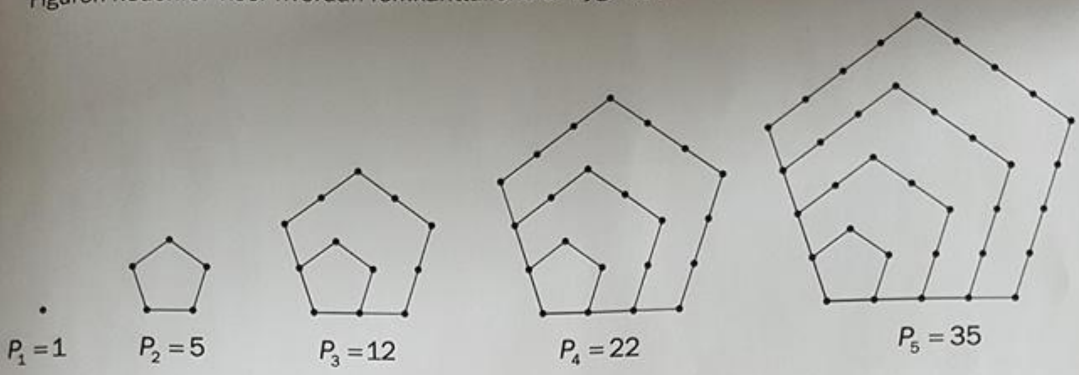
Etter 10 uker var 4 000 personer smittet.

c) Bruk dette til å bestemme k.

d) Ved hvilket tidspunkt var halvparten av innbyggerne i byen smittet av sykdommen?

Oppgave 4 (4 poeng)

Figuren nedenfor viser hvordan femkanttallene er bygd opp.



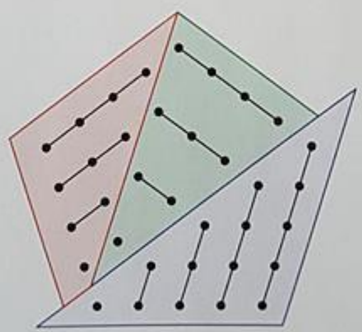
Femkanttallene er gitt ved den rekursive formelen

$$P_{n+1} = P_n + 3n + 1 \;,\; P_1 = 1$$

a) Vis ved induksjon at

$$P_n = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Mathias observerer at det er mulig å regne ut P_n som summen av tre trekanttall, der trekanttall nummer n er $T_n = 1 + 2 + \cdots + n$. Se figuren nedenfor. Han brukte dette til å vise at $P_n = \dfrac{3n^2 - n}{2}$



Mathias' oppdeling av P_5

b) Bruk ideen til Mathias til å utlede formelen for P_n .