Løsningsforslag R2-eksamen vår 2018

Del 1

Oppgave 1

a) $f'(x) = (\cos u)' \cdot u'$ der $u = \pi x - 2$

$u' = \pi$

$= -\sin u \cdot u'$

$= -\sin(\pi x - 2) \cdot \pi$

$= \underline{\underline{-\pi \sin(\pi x - 2)}}$

b) $g'(x) = (x)' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)'$

$= 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x$

$= \underline{\underline{\sin x + x \cos x}}$

Oppgave 2

a) $\int (4x^2 + 3x)\, dx = 4 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} x^2 + C$

$= \underline{\underline{\frac{4}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + C}}$

b) $\int 4x^2 \cdot \ln x \, dx$

Delvis integrasjon:

$u' = 4x^2 \Rightarrow u = \frac{4}{3} x^3$

$v = \ln x \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$

$= \frac{4}{3} x^3 \cdot \ln x - \int \frac{4}{3} x^{\cancel{3}\,2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\, dx$

$= \frac{4}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} x^3 + C = \underline{\underline{\frac{4}{9} x^3 (3 \ln x - 1) + C}}$

c) Regner først det ubestemte integralet ved variabelskifte.

$$u = x^2 + 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \int \frac{\cancel{2x}}{u} \cdot \frac{du}{\cancel{2x}} = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$$

$$= \ln|x^2+4| + C = \underline{\ln(x^2+4) + C}$$

$$\int_0^{\sqrt{12}} \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \Big[\ln(x^2+4)\Big]_0^{\sqrt{12}}$$

$$= \ln(12+4) - \ln 4$$

$$= \ln 16 - \ln 4 = \ln\frac{16}{4} = \underline{\underline{\ln 4}}$$

Oppgave 3

$$a_2 + 3 \cdot d = a_5 \qquad \Rightarrow \qquad a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

$$4 + 3 \cdot d = 13 \qquad\qquad = 1 + (n-1)\cdot 3$$

$$3d = 9 \qquad\qquad = \underline{3n-2}$$

$$\underline{d = 3}$$

Sumformel: $$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = \frac{(1 + 3n - 2)\cdot n}{2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3n^2 - n}{2}}}$$

Oppgave 4

a) $$\frac{dy}{dx} = (\sin x) \cdot y^2$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \sin x \, dx$$

$$\int y^{-2} dy = -\cos x + C$$

$$\frac{1}{-1} \cdot y^{-1} = -\cos x + C \qquad \Big| \cdot (-1)$$

$$\frac{1}{y} = \cos x - C$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{\cos x - C}}}$$

b) $$y(\pi) = \frac{1}{\cos \pi - C} = 1$$

$$\Rightarrow \cos \pi - C = 1$$

$$C = \cos \pi - 1 = (-1) - 1 = \underline{-2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\cos x - (-2)} = \underline{\underline{\frac{1}{\cos x + 2}}}$$

Oppgave 5

a) f skjærer x-aksen i ±1.

$$A = \int_{-1}^{1} 1-x^2 \, dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\cdot 1^3\right) - \left((-1) - \frac{1}{3}(-1)^3\right)$$

$$= \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

b) $$V = \pi \cdot \int_{-1}^{1} (1-x^2)^2 \, dx$$

$$= \pi \cdot \int_{-1}^{1} 1 - 2x^2 + x^4 \, dx$$

$$= \pi \cdot \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1}$$

$$= \pi\left(\left(1 - \frac{2}{3}\cdot 1^3 + \frac{1}{5}\cdot 1^5\right) - \left((-1) - \frac{2}{3}(-1)^3 + \frac{1}{5}(-1)^5\right)\right)$$

$$= \pi\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)$$

$$= \pi\left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right) = \pi\left(\frac{30-20+6}{15}\right) = \underline{\underline{\frac{16\pi}{15}}}$$

Oppgave 6

a) Toppunkter når $\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = 1$

$$\frac{\pi}{2}(x-1) = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \qquad \Big| \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$x - 1 = 1 + 4k$$

$$\underline{x = 2 + 4k}$$

Innenfor definisjonsmengden: 2, 6

Maksimalverdi: $2 \cdot 1 = 2$

Toppunkter: $\underline{\underline{(2, 2)}}$ og $\underline{\underline{(6, 2)}}$

Bunnpunkter når $\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = -1$

$$\frac{\pi}{2}(x-1) = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \qquad \Big| \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$x - 1 = 3 + 4k$$

$$\underline{x = 4 + 4k}$$

Innenfor definisjonsmengden: 4, 8

Minimalverdi: $2(-1) = -2$

Bunnpunkter: $\underline{\underline{(4, -2)}}$ og $\underline{\underline{(8, -2)}}$

b) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = 0$

$$\frac{\pi}{2}(x-1) = 0 + k\cdot\pi \quad \Big| \cdot \frac{2}{\pi}$$

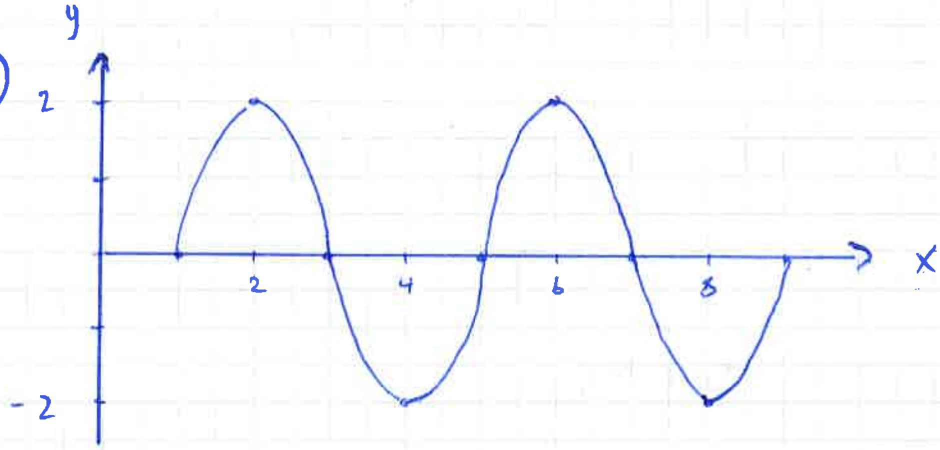
$$x-1 = 2k$$

$$\underline{x = 2k+1}$$

Nullpunkter innenfor definisjonsmengden:

$\underline{\underline{x=3}}$, $\underline{\underline{x=5}}$, $\underline{\underline{x=7}}$

c)



d) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = \sqrt{3}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}(x-1) = \frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi \quad \vee \quad \frac{\pi}{2}(x-1) = \frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi$$

$$x-1 = \frac{2}{3} + 4k \quad \vee \quad x-1 = \frac{4}{3} + 4k$$

$$x = \frac{5}{3} + 4k \quad \vee \quad x = \frac{7}{3} + 4k$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{L = \left\{ \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{17}{3}, \frac{19}{3} \right\}}}$$

Oppgave 7

a) $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 8z + 16 = 20 + 9 + 4 + 16$

$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 49 = 7^2$

Dermed er S sentrum, radien er $\underline{\underline{7}}$

b) Finner linja gjennom S som står normalt på planet, denne har $[6, -3, 2]$ som retningsvektor.

$$l : \begin{cases} x = 3 + 6t \\ y = -2 - 3t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

Finner hvor denne skjærer planet, kaller punktet P:

$6(3+6t) - 3(-2-3t) + 2(4+2t) - 4 = 0$

$18 + 36t + 6 + 9t + 8 + 4t - 4 = 0$

$49t = 28$

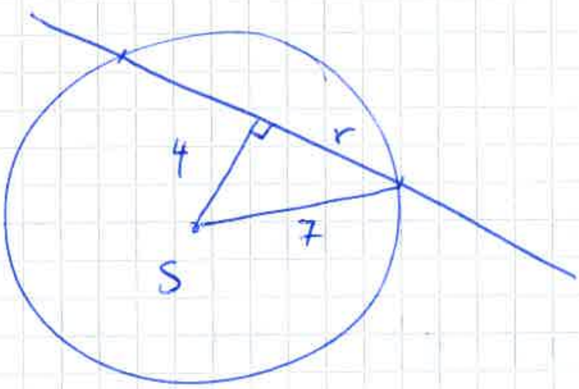
$t = \frac{28}{49} = \underline{\frac{4}{7}}$

$\Rightarrow \overrightarrow{SP} = \left[\left(3 + 6 \cdot \frac{4}{7}\right) - 3, \left(-2 - 3 \cdot \frac{4}{7}\right) - (-2), \left(4 + 2 \cdot \frac{4}{7}\right) - 4\right]$

$= \frac{4}{7}[6, -3, 2]$.

$\Rightarrow |\overrightarrow{SP}| = \frac{4}{7} \cdot \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = \frac{4}{7} \cdot \sqrt{49} = \underline{\underline{4}}$

c)



Radien i sirkelen er $\sqrt{7^2-4^2} = \sqrt{33}$

$\Rightarrow$ Arealet er $\pi\left(\sqrt{33}\right)^2 = \underline{\underline{33\pi}}$

Oppgave 8

a) Kvotienten er $-2x$. Rekka konvergerer når

$$-1 < -2x < 1 \qquad \Big| : (-2)$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2} > x > -\frac{1}{2}}}$$

b) $S(x) = \dfrac{1}{1-(-2x)} = \dfrac{1}{1+2x} = a$

$\Rightarrow 1+2x = \dfrac{1}{a} \Rightarrow 2x = \dfrac{1}{a} - 1 = \dfrac{1-a}{a}$

$\Rightarrow \underline{x = \dfrac{1-a}{2a}}$.

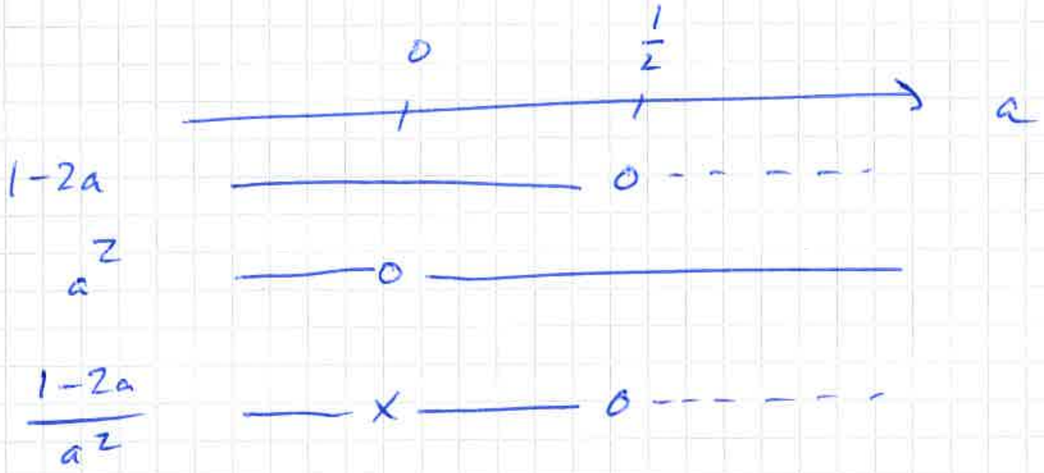
Rekka konvergerer kun når $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$,

som tilsvarer $\left(\dfrac{1-a}{2a}\right)^2 < \dfrac{1}{4}$

$$\frac{(1-a)^2}{4a^2} - \frac{1}{4} < 0 \qquad \Big| \cdot 4$$

$$\frac{(1-2a+a^2) - a^2}{a^2} < 0$$

$$\frac{1-2a}{a^2} < 0$$

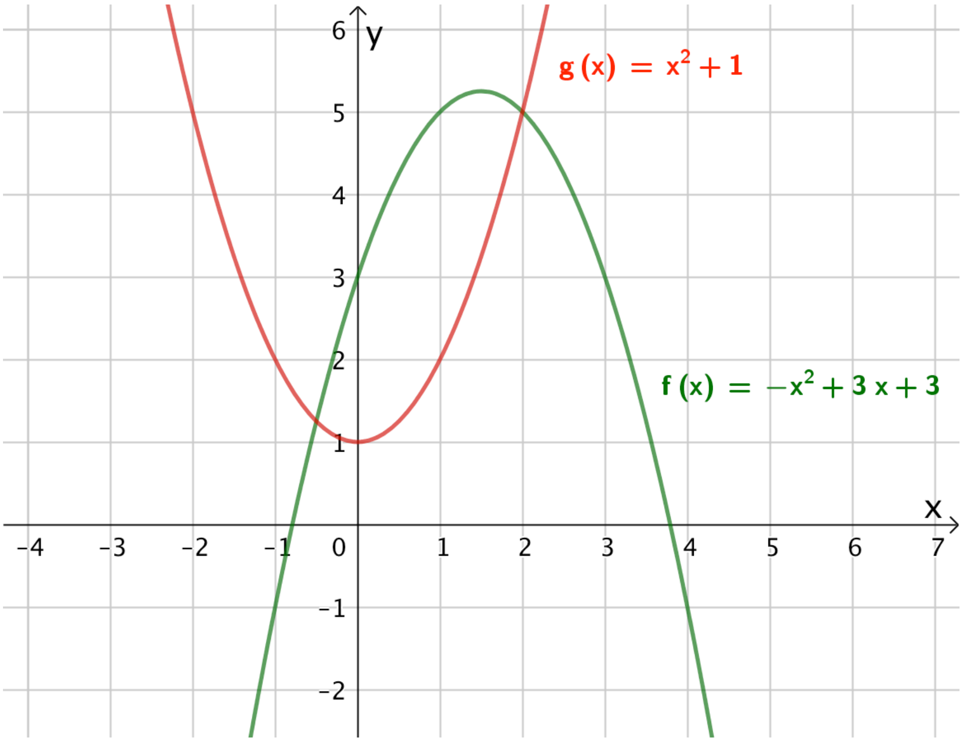


Rekka konvergerer altså når summen er $\underline{\underline{\frac{1}{2} \text{ eller mer}}}$

Del 2

Oppgave 1

a) Tegnet i Geogebra:



b) Løst i CAS i Geogebra, arealet er $\frac{125}{24}$.

c) Løst i CAS (se under), koordinatene til T er $\left(\frac{3}{4}, \frac{25}{8}\right)$.

1	f(x)=g(x) Løs: $\left\{x = -\frac{1}{2}, x = 2\right\}$
2	A := IntegralMellom(f, g, −1/2, 2) $\to$ $A := \frac{125}{24}$
3	M := Integral(x*(f−g), −1/2, 2) $\to$ $M := \frac{125}{32}$
4	N := 1/2*Integral(f²−g², −1/2, 2) $\to$ $N := \frac{3125}{192}$
5	T := (M/A,N/A) $\to$ $T := \left(\frac{3}{4}, \frac{25}{8}\right)$

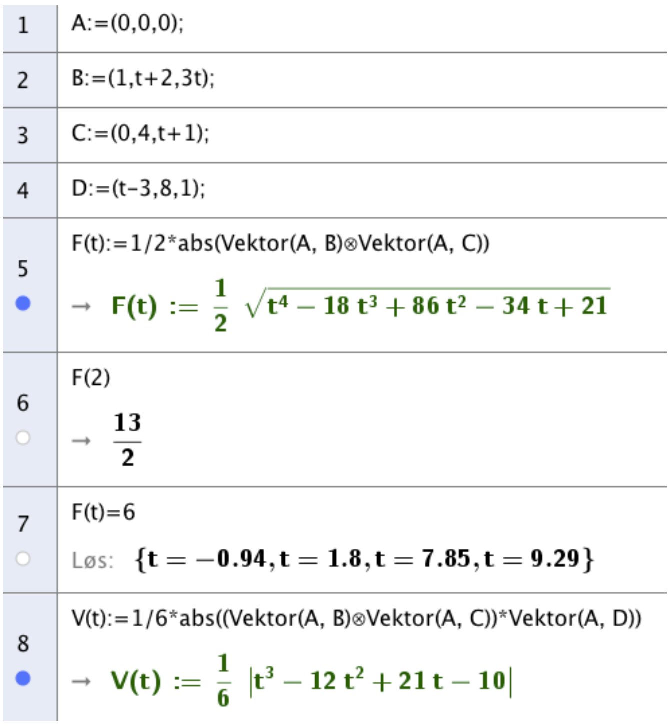
Oppgave 2

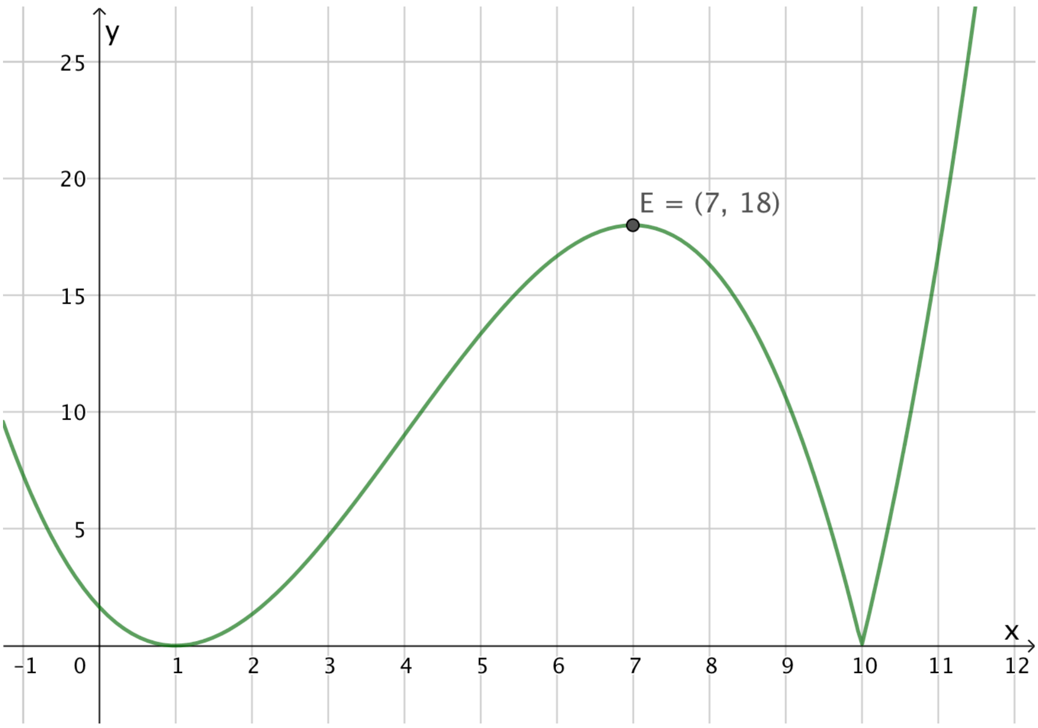
a) Oppgaven er løst i CAS, til høyre.

Arealet er $\frac{13}{2}$.

b) Oppgaven er løst i CAS, til høyre. Arealet er 6 for tre verdier av t innenfor definisjonsmengden: 1,8, 7,85 og 9,29.

c) Vi ser på grafen til V, som viser volumet til pyramiden, at vi har en maksimalverdi innenfor definisjonsmengden. Finner denne ved kommandoen *Ekstremalpunkt* og får punktet E. Volumet er størst når $t = 7$.





Oppgave 3

a) Antall personer som ikke er smittet vil være $12000 - y$, dermed får vi differensiallikningen $y' = k(12000 - y)$.

b) Opplysningene i teksten gir oss at $y(0) = 100$. Løst i CAS, se under.

c) Løst i CAS, se under. Proporsjonalitetskonstanten er $k = 0{,}0397$.

d) Løst i CAS, se under. Det tar litt over 17 uker før halvparten av befolkningen er smittet.

1	LøsODE(y'=k*(12000-y), y, t, (0,100)) → $y = -11900\,e^{-kt} + 12000$
2	ByttUt($1,{t, y},{10, 4000}) → $4000 = -11900\,e^{-10k} + 12000$
3	Løs($2,k) ≈ $\{k = 0.0397\}$
4	12000-11900*e^(-0.0397*t)=6000 → $-11900\,e^{-\frac{397}{10000}t} + 12000 = 6000$
5	Løs($4,t) ≈ $\{t = 17.2488\}$

Oppgave 4

a) Tester først at formelen stemmer for $n = 1$:

$P_1 = \dfrac{3 \cdot 1^2 - 1}{2} = 1$. OK.

Antar så at formelen stemmer for $n = k$, og ønsker å vise at den stemmer for $n = k + 1$:

$$P_{k+1} = P_k + 3k + 1 = \frac{3k^2 - k}{2} + 3k + 1$$
$$= \frac{3k^2 - k + 6k + 2}{2} = \frac{3k^2 + 5k + 2}{2}$$
$$= \frac{3\left(k^2 + 2k + 1\right) - \left(k + 1\right)}{2} = \frac{3\left(k + 1\right)^2 - \left(k + 1\right)}{2}$$

Ser at dette også stemmer. Da er formelen vist ved induksjon.

b) Trekanttallene er en aritmetisk rekke med $a_n = n$ og $d = 1$.

Sumformelen for de n første trekanttallene er dermed

$$T_n = \frac{\left(a_1 + a_n\right) \cdot n}{2} = \frac{\left(1 + n\right)n}{2} = \frac{n\left(n + 1\right)}{2}.$$

Vi ser fra figuren at P_5 kan deles opp i T_5 og to ganger T_4 , generelt får vi at

$$P_n = 2 \cdot T_{n-1} + T_n$$
$$= 2 \cdot \frac{\left(n - 1\right)n}{2} + \frac{n\left(n + 1\right)}{2}$$
$$= \frac{2n^2 - 2n + n^2 + n}{2}$$
$$= \frac{3n^2 - n}{2}$$

som var det vi skulle vise.