Løsningsforslag Eksamen vår 2018

Del 1 – Uten hjelpemidler + forslag poengfordeling

Oppgave 1 (1+2poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = \cos(\pi x - 2)$

$\underline{\underline{f'(x) = -\pi \sin(\pi x - 2)}}$

b) $g(x) = x \cdot \sin x$ $\quad u = \sin x\,, u' = \cos x\; v = x, v' = 1$

$g'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = x \cdot \cos x + \sin x \cdot 1 =$

$\underline{\underline{= x \cdot \cos x + \sin x}}$

Oppgave 2 (1+1+2 poeng)

Bestem integralene

a) $\int 4x^2 + 3x\, dx$

$= \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C$

b) $\int 4x^2 \ln x\, dx$

Bruker delvis integrasjon

$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$

$v' = 4x^2 \Rightarrow v = \frac{4}{3}x^3$

$$\int u \cdot v'\; dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\; dx$$

$$\int 4x^2 \ln x\, dx = \ln x \cdot \frac{4}{3}x^3 - \int \frac{4}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \ln x \cdot \frac{4}{3}x^3 - \int \frac{4}{3}x^2 dx = \ln x \cdot \frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{9}x^3 + C$$

c) $\int_0^{\sqrt{12}} \frac{2x}{x^2+4}\, dx$ $\qquad$ Bruker variabelskifte :$u = x^2 + 4, \frac{du}{dx} = 2x\,, dx = \frac{du}{2x}$

$$\int_0^{\sqrt{12}} \frac{2x}{x^2+4}\, dx = \int_4^{16} \frac{2x}{u}\frac{du}{2x} = [\ln|u|]_4^{16} = [\ln|x^2+4|]_0^{\sqrt{12}} = \ln\left|\sqrt{12}^2 + 4\right| - \ln|0-4| =$$
$$\ln 16 - \ln 4 = \ln\frac{16}{4} = \ln 4 = 2\ln 2$$

Her er det også mulig å sette inn sette 16 og 4 direkte inn for $\ln|u|$

Oppgave 3

I en aritmetisk rekke $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots a_n \; er \; a_2 = 4 \; og \; a_5 = 13$

Bestem en eksplisitt formel for summen av rekka

$$I: a_2 = a_1 + d = 4$$

$$II: a_5 = a_1 + 4 \cdot d = 13$$

$$II - I \; gir \; (a_1 + 4 \cdot d) - a_1 + d = 13 - 4$$

$$3d = 9 \Leftrightarrow d = 3$$

$$d = 3 \; i \; I \; gir \;\; a_1 + 3 = 4 \Leftrightarrow a_1 = 1$$

$$S_n = \frac{\big(2a_1 + d(n-1)\big)n}{2} = \frac{\big(2 + 3(n-1)\big)n}{2} = \frac{(3n-1)n}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Oppgave 4(2+1 poeng)

Løs differensiallikningene

a) $y' = (\sin x)y^2 \;\; , y(\pi) = 1.$

$$\frac{y'}{y^2} = (\sin x)$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int (\sin x) dx$$

$$-\frac{1}{y} = -\cos x + C$$

$$y = \frac{1}{\cos x + C}$$

b)

$$1 = \frac{1}{\cos \pi + C}$$

$$C = 1 - \cos \pi = 2$$

$$y = \frac{1}{\cos x + 2}$$

Oppgave 5 (2+2 poeng)

En funksjon er gitt ved

$$f(x) = 1 - x^2$$

a) Bestem arealet av flatestykket F som er begrenset av grafen til f, (x-aksen)

$f(x)$ vil være positiv i hele definisjonsmengden.

$$Finner \; skjæring \; først \quad f(x) = 0 \, , \;\; x = \pm 1$$

$$A = \int_{-1}^{1} 1 - x^2 \, dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 - \frac{1}{3}(-1)^3\right) = 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

b) Finn volumet av figuren som framkommer ved å rotere flatestykket *F* 360° om *x*-aksen.

Omdreiningslegemet vil ha volumet gitt ved

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)^2\ dx = \pi \int_{-1}^{1} 1 - 2x^2 + x^4\ dx = \pi \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1}$$

$$= \pi\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - \pi\left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{16}{15}\pi$$

$$\boldsymbol{V = \frac{16}{15}\pi}$$

Oppgave 6

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) \quad , \qquad x \in \langle 1,9 \rangle$$

a) Topppunkt f(x)=2 når $\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = 1$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = 1$$

$$\frac{\pi}{2}(x-1) = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$$

$$x = \pi \cdot \frac{2}{\pi} + n\cdot 2\pi \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$x = 2 + n\cdot 4$$

$x \in \langle 1,9 \rangle$ gir Topppunkt $(2,2)$ og $(6,2)$

Bunnpunkt $f(x) = -2$ når $\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = -1$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = -1$$

$$\frac{\pi}{2}(x-1) = -\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2}x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$$

$$x = n\cdot 2\pi \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$x = n \cdot 4$$

Bunnpunkt $(4,-2), (8,-2)$

b) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = 0$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = 0$$

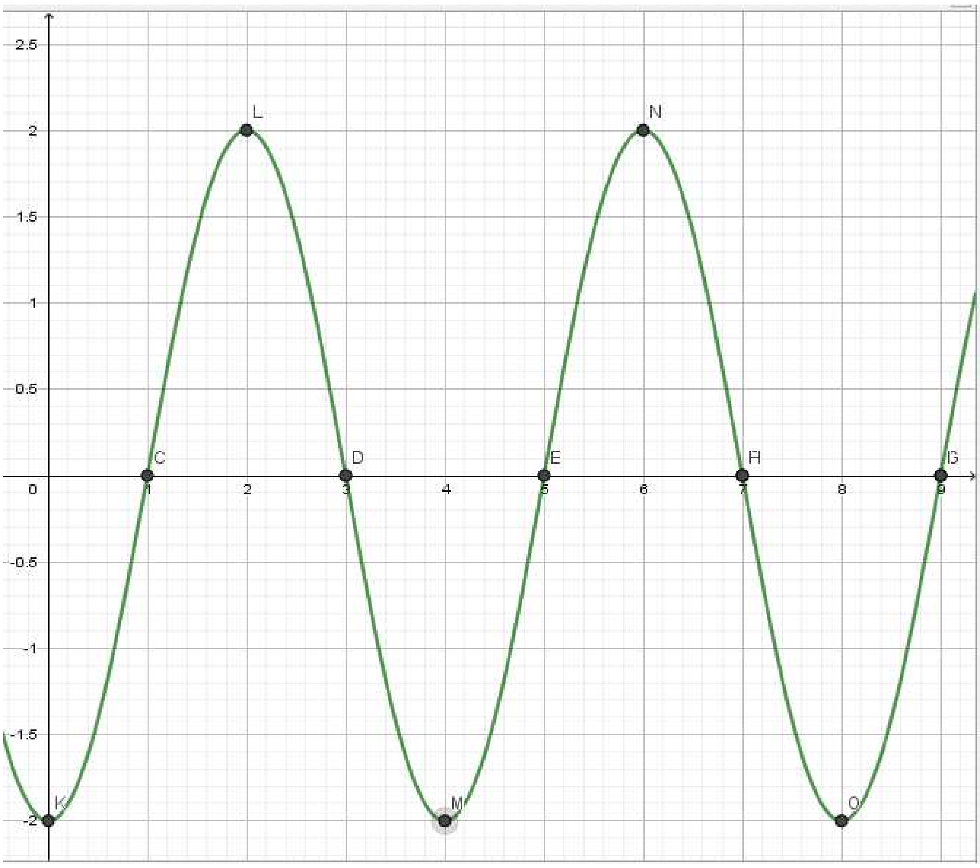
$$\frac{\pi}{2}(x-1) = n\cdot\pi \qquad (snarvei =))$$

$\frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$

$$x = 1 + n \cdot 2$$

Null punkt for $x = 3$, $x = 5$, $x = 7$ (x=1 og x=9 er utenfor)

$$L = \{3,5,7\}$$



c)

d) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = \sqrt{3}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{2}(x-1) = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \vee \quad \frac{\pi}{2}(x-1) = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$

$\frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad \vee \quad \frac{\pi}{2}x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$

$x = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{2}{\pi} + n \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{\pi} \quad \vee \quad x = \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{2}{\pi} + n \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{\pi}$

$x = \frac{5}{3} + 4n \quad \vee \quad x = \frac{7}{3} + 4n$

$$L = \left\{\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{17}{3}, \frac{19}{3}\right\}$$

Oppgave 7

En kuleflate er gitt ved $\qquad x^2 - 6x + y^2 + 4y + z^2 - 8z - 20 = 0$

a) Vis at kuleflaten har sentrum $S(3, -2, 4)$ og bestem radius

Likningen for en kuleflate kan skrives som $(x - x_0)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

der (x_0, y_0, z_0) er sentrum i kula og r er radius.

Skriver likninga $x^2 - 6x + y^2 + 4y + z^2 - 8z - 20 = 0$ ved hjelp av kvadrater:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 20 + 9 + 4 + 16$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 7^2$$

Denne likningsformen viser at kula har sentrum i $S = (3, -2, 4)$ og radius lik 7.

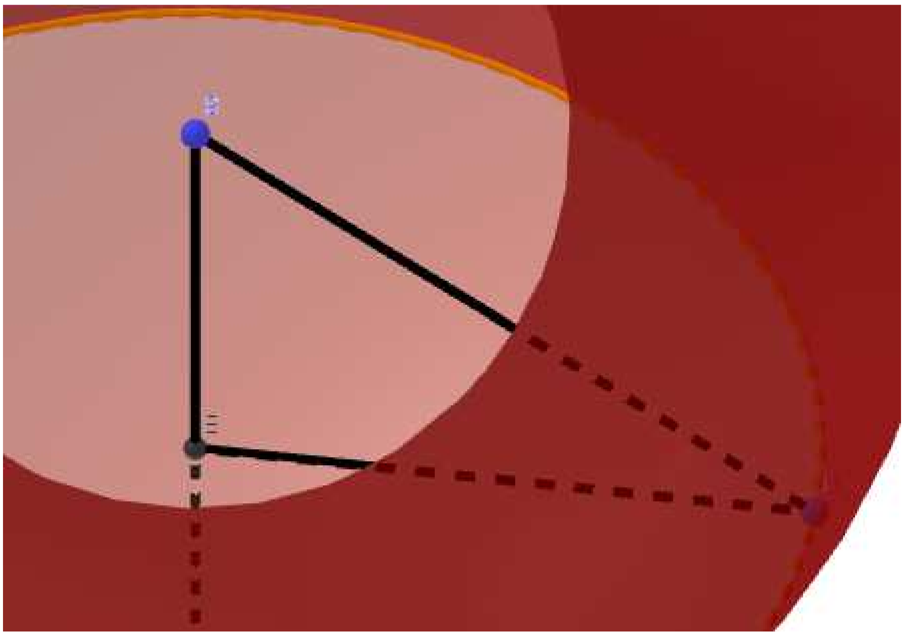
Et plan er gitt ved $6x - 3y + 2z - 4 = 0$

b) Bestem avstanden fra S til planet

$$h = \frac{|6 \cdot 3 - 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 - 4|}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{|18 + 6 + 8 - 4|}{\sqrt{49}} = \frac{28}{7} = 4$$

Skjæringen mellom planet og kula lager en sirkel.

c) Bestem arealet av sirkelen



Vi kjenner radius i kula =7 og avstans fra S til plan =4

Bruker pytagoras for å finne radius i sirkelen

$$7^2 - 4^2 = r^2 = 33$$

Arealet av sirkelen blir $A = \pi r^2 = 33\pi$

Oppgave 8

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved $S(x) = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \cdots$..

a) Avgjør når rekka konvergerer.
Rekka konvergerer når :

$-1 < k < 1$ der k er$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -2x.$

$$-1 < -2x < 1 \; gir \; -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

$S(x) = \dfrac{1}{1-k} = \dfrac{1}{1+2x}$

b) For hvilke verdier av a har $S(x) = a$ løsning ?

$S(x) = a \; gir \quad \dfrac{1}{1+2x} = a \quad ,$

$tar \; x < \frac{1}{2} \; først \; , S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ S Øker $mot \; uendelig \; når \; x \to -\frac{1}{2}$ det $betyr \; at$

$$a \in \langle \frac{1}{2}, \infty \rangle$$

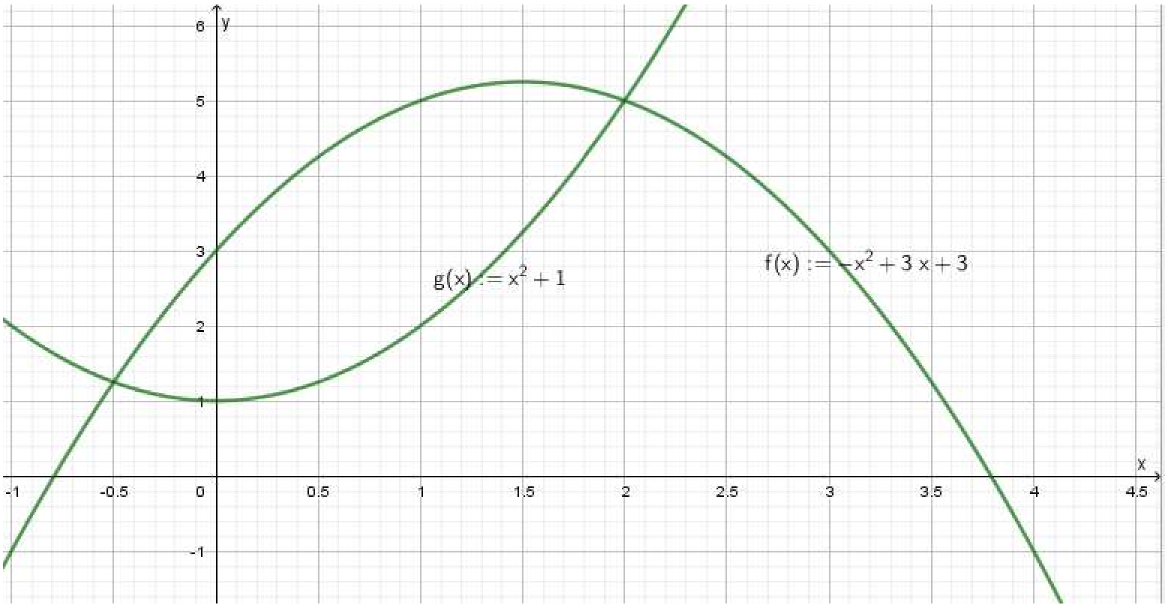
Del 2 – Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Funksjonene til f og g er gitt ved

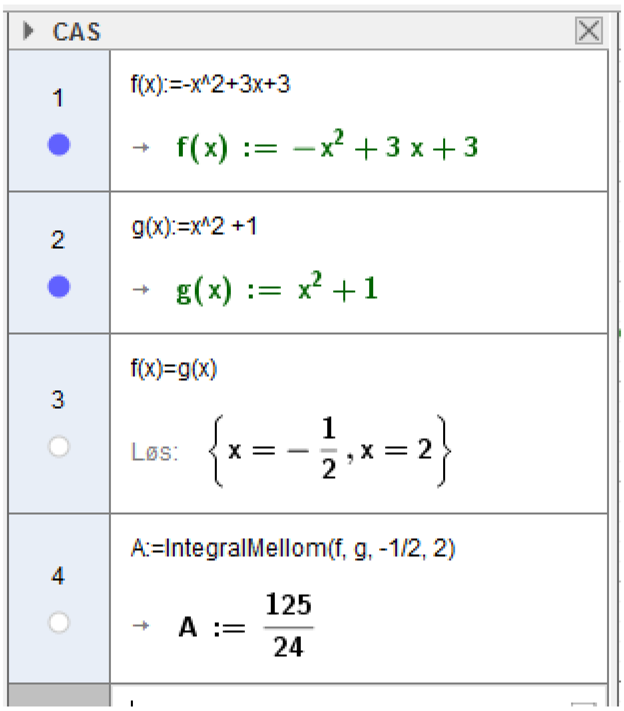
$$f(x) = -x^2 + 3x + 3$$
$$g(x) = x^2 + 1$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafene til f og g i samme koordinatsystem



Grafene avgrenser et flatestykke A

b) Bestem A med CAS



Arealet er $\frac{125}{24}$ linje 4 cas

Tyngdepunktet er gitt ved $\left(\frac{M}{A}, \frac{N}{A}\right)$ $der\ M\ og\ N\ er\ gitt\ ved$

$$M = \int_a^b x(f(x) - g(x))dx$$

$$M = \frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2 - (g(x))^2 dx$$

Der a og b er x- koordinatene til skjæringspunktene mellom f og g og $a < b$

c) Bestem Koordinaten til T ved hjelp av CAS

4	A:=IntegralMellom(f, g, -1/2, 2) → $A := \frac{125}{24}$
5	M:=Integral(x(f(x)-g(x)), -1/2, 2) → $M := \frac{125}{32}$
6	N:=1/2Integral((f(x))^2-(g(x))^2, -1/2, 2) → $N := \frac{3125}{192}$
7	T:=(M/A,N/A) → $T := \left(\frac{3}{4}, \frac{25}{8}\right)$

Oppgave 2 (6 poeng)

Gitt punktene $A(0,0,0)$ og $B(1, t+2, 3t), C(0,4,t+1) og\ D(t-3,8,1)$

a) Besten arealet av trekanten ABC

CAS

1	A:=(0,0,0) → $A := (0,0,0)$
2	B:=(1,t+2,3t) → $B := (1, t+2, 3t)$
3	C:=(0,4,t+1) → $C := (0, 4, t+1)$
4	D:=(t-3,8,1) → $D := (t-3, 8, 1)$
5	E(t):=1/2abs(Vektor(A, B)⊗Vektor(A, C)) → $E(t) := \frac{1}{2}\sqrt{t^4 - 18t^3 + 86t^2 - 34t + 21}$
6	E(2) → $\frac{13}{2}$

b) Bruk CAS til å bestemme t slik at arealet til ABC blir 6

7	E(t)=6 → $\frac{1}{2}\sqrt{t^4 - 18t^3 + 86t^2 - 34t + 21} = 6$
8	\$7 Løs: $\{t = -0.94, t = 1.8, t = 7.85, t = 9.29\}$

Arealet blir 6 for 4 ulike verdier av t Linje 8 CAS

c) Bestem t slik at volumet av Pyramiden ABCD blir størst mulig

9	V(t):=1/6abs((Vektor(A, B)⊗Vektor(A, C)) Vektor(A, D)) → $V(t) := \frac{1}{6} \left\|t^3 - 12t^2 + 21t - 10\right\|$
10	V'(t)=0 Løs: $\{t = 7\}$
11	V''(7) → -3
12	V(7) → 18

Største volum er 18. Cas linje 12. CAS 11 (7,18) er maks

Oppgave 3 (8 poeng)

I en by med 12000 innbyggere sprer det seg en smittsom sykdom. Det viser seg at vekstfarten i antall smittede personer til enhver tid er proporsjonal med antall personer som ennå ikke er smittet. Vi lar k være proporsjonaliteteskonstanten

a) Sett opp en differensiallikning som beskriver antall smittede personer $y(t)$, der t er antall uker atter at sykdommen ble oppdaget.

$$y' = k(12000 - y)$$

b) Vis at $y(t) = 12000 - 11900e^{kt}$

1	f(x):=LøsODE(y' =k (12000-y),(0,100)) → $f(x) := -11900\,e^{-kx} + 12000$

Etter 10 uker var 4000 personer smittet

c) Bruk dette til å bestemme k.

CAS	
1	f(x):=LøsODE(y' =k (12000-y),(0,100)) → $f(x) := -11900\,e^{-kx} + 12000$
2	f(10)=4000 Løs: $\left\{k = -\frac{1}{10} \ln\left(\frac{80}{119}\right)\right\}$
3	{k = (-1) / 10 ln(80 / 119)} ≈ $\{k = 0.03971\}$

d) På hvilket tidspunkt var halvparten av innbyggerne smittet?

4	g(x):=-11900 ℯ^(-(-1) / 10 ln(80 / 119) x) + 12000 → $g(x) := -11900\,e^{\frac{1}{10}x\ln\left(\frac{80}{119}\right)} + 12000$
5	g(x)=6000 → $-11900\,e^{\frac{1}{10}x\ln\left(\frac{80}{119}\right)} + 12000 = 6000$
6	$5 Løs: $\left\{x = \frac{10\ \ln(119) - 5\ \ln(16) - 10\ \ln(5) - \ln(59049)}{\ln(119) - \ln(16) - \ln(5)}\right\}$
7	{x = (10ln(119) - 5ln(16) - 10ln(5) - ln(59049)) / (ln(119) - ln(16) - ln(5))} ≈ $\{x = 17.24463\}$

Halvparten av innbyggerne er smittet etter 17,24 uker (17 uker og 1,7 døgn)

Oppgave 4
Femkanttallene er gitt ved

$$P_{n+1} = P_n + 3n + 1\,, \qquad P_1 = 1$$

a) Vis ved induksjon at $P_n = \frac{3n^2-n}{2}$

$$P_1 = \frac{3\cdot 1^2 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \;\; OK$$

$$Skal\ få\ HS: P_{n+1} = \frac{3(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{3n^2 + 6n + 3 - n - 1}{2} = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2}$$

$$VS: P_{n+1} = P_n + 3n + 1 = \frac{3n^2 - n}{2} + 3n + 1$$

$$= \frac{3n^2 - n}{2} + \frac{6n + 2}{2}$$

$$= \frac{3n^2 - n + 6n + 2}{2}$$

$$= \frac{3n^2 + 5n + 2}{2}$$

$$VS = HS \qquad QED$$

b) Figuren viser at $P_n = to\ summer\ til\ n-1\ og\ en\ til\ n$

$$P_n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$P_n = \frac{n^2 - n}{2} + \frac{n^2 - n}{2} + \frac{n^2 + n}{2}$$

$$P_n = n^2 - n + \frac{n^2 + n}{2}$$

$$P_n = \frac{2n^2 - 2n + n^2 + n}{2}$$

$$P_n = \frac{3n^2 - n}{2}$$