Løsningsforslag Eksamen R2, vår 2018

DEL 1

Oppgave 1

a) $f(x) = \cos(\pi x - 2)$
$f'(x) = -\sin(\pi x - 2) \cdot \pi = \boldsymbol{-\pi\sin(\pi x - 2)}$

b) $g(x) = x \cdot \sin x$
$\boldsymbol{g'(x) = \sin x + x\cos x}$

Oppgave 2

$a)\quad \int (4x^2 + 3x)dx = \boldsymbol{\frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C}$

$b)\quad \int (4x^2 \cdot \ln x)dx \qquad u = \ln x, \qquad u' = \frac{1}{x}, \qquad v' = 4x^2, \quad v = \frac{4}{3}x^3$

$$\int (4x^2 \cdot \ln x)dx = \ln x \cdot \frac{4}{3}x^3 - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{4}{3}x^3 dx = \frac{4}{3}x^3 \ln x - \frac{4}{3}\int x^2 dx = \boldsymbol{\frac{4}{3}x^3 \ln x - \frac{4}{9}x^3 + C}$$

$c)\quad \int_0^{\sqrt{12}} \left(\frac{2x}{x^2+4}\right)dx \qquad u = x^2 + 4, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \qquad dx = \frac{du}{2x}$

$$\int \frac{2x}{u}\frac{du}{2x} = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln(x^2+4) + C$$

$$\int_0^{\sqrt{12}} \left(\frac{2x}{x^2+4}\right)dx = [\ln(x^2+4)]_0^{\sqrt{12}} = \ln(12+4) - \ln(0+4) = \ln 16 - ln4 = \ln\left(\frac{16}{4}\right) = \boldsymbol{\ln 4}$$

Oppgave 3

$a_5 = a_2 + 3d$
$13 = 4 + 3d$
$\boldsymbol{3 = d} \qquad a_1 = a_2 - d = 4 - 3 = 1$

$$S_n = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2} = n \cdot \frac{1 + 1 + (n-1)3}{2} = n \cdot \frac{2 + 3n - 3}{2} = \boldsymbol{n \cdot \frac{3n - 1}{2}}$$

Oppgave 4

a) $y' = \sin x \cdot y^2$

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = \sin x$$
$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int \sin x\, dx$$
$$-\frac{1}{y} = -\cos x + C_1$$
$$\frac{1}{y} = \cos x + C_2$$
$$\boldsymbol{y = \frac{1}{\cos x + C_2}}$$

b) $y(\pi) = \frac{1}{\cos\pi + C_2}$

$$1 = \frac{1}{-1 + C_2}$$
$$-1 + C_2 = 1$$
$$C_2 = 2$$
$$\boldsymbol{y = \frac{1}{\cos x + 2}}$$

E. Smenes

Oppgave 5

a) $f(x) = 0$

$1 - x^2 = 0$

$x^2 = 1, \qquad x = \pm 1$

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}1^3\right) - \left(-1 - \frac{1}{3}(-1)^3\right) == \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

b) $$\pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4) dx = \pi[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x]_{-1}^{1}$$

$$= \pi\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) - \pi\left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 1\right) = \left(\frac{8}{15} + \frac{8}{15}\right)\pi = \boldsymbol{\frac{16\pi}{15}}$$

Oppgave 6

a) Topp når $\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = 1$, da er $f(x) = 2 \cdot 1 = 2$

$$\frac{\pi}{2}(x - 1) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x - 1 = 1 + 4n$$

$$x = 2 + 4n, \qquad x = 2, \qquad x = 6$$

Bunn når $\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = -1, da\ er\ f(x) = 2 \cdot (-1) = -2$

$$\frac{\pi}{2}(x - 1) = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x - 1 = 3 + 4n$$

$$x = 4 + 4n, \qquad x = 4, \qquad x = 8$$

Toppunkt i $(\mathbf{2}, \mathbf{2})$ og $(\mathbf{6}, \mathbf{2})$. Bunnpunkt i $(\mathbf{4}, \mathbf{-2})$ og $(\mathbf{8}, \mathbf{-2})$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = 0$

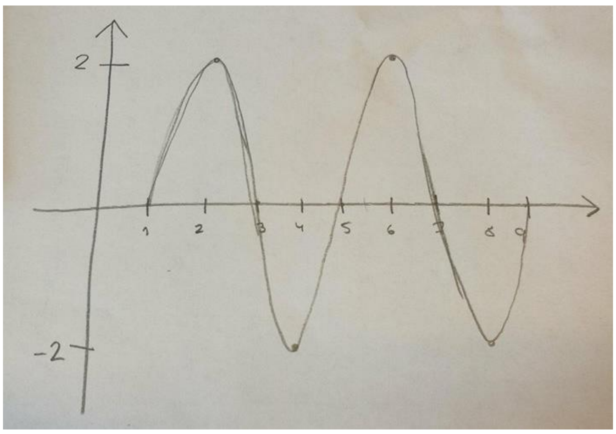
$$\frac{\pi}{2}(x - 1) = \pi n$$

$$x - 1 = 2n$$

$$x = 2n + 1, \qquad \boldsymbol{x = 3}, \ \ \boldsymbol{x = 5}, \ \ \boldsymbol{x = 7}$$

Jeg tenker det også er nok å argumentere ut fra symmetri, derfor må nullpunktene være i 3,5 og 7

c) Se figur, viktig at topp, bunn og null er rett (og navn på aksene, selv om det mangler på denne skissa…



d) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)=\sqrt{3}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}(x-1)=\frac{\pi}{3}+2\pi n \qquad \vee \qquad \frac{\pi}{2}(x-1)=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$$

$$x-1=\frac{2}{3}+4n \qquad\qquad x-1=\frac{4}{3}+4n$$

$$x=\frac{5}{3}+4n \qquad\qquad x=\frac{7}{3}+4n$$

$$\boldsymbol{x=\frac{5}{3},\quad x=\frac{7}{3},\quad x=\frac{17}{3},\quad x=\frac{19}{3},}$$

Oppgave 7

a) $(x-3)^2-9+(y+2)^2-4+(z-4)^2-16-20=0$
$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=49$

$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=7^2$

Som tilsvarer en kule med $S(3,-2,4)$ og med radius 7

b) Avstand fra punkt til Plan: $h=\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}=\frac{|6\cdot 3-3\cdot(-2)+2\cdot 4-4|}{\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}}=\frac{28}{\sqrt{49}}=\frac{28}{7}=\mathbf{4}$

c) Bruker pytagoras for å finne radius: $x^2=\sqrt{7^2-4^2},\ x=\sqrt{33}$

Areal: $\pi\sqrt{33}^2=\mathbf{33\pi}$

Oppgave 8

a) Konvergerer når $-1<k<1$

$-1<-2x<1$

$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

Rekke konvergerer når $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

b)

Når $x=-\frac{1}{2}$: $\quad S\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1-2\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}$

Når $x=\frac{1}{2}$: $\quad S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1-2\left(\frac{1}{2}\right)}\to\infty$

Likninga har løsning for $a>\frac{1}{2}$

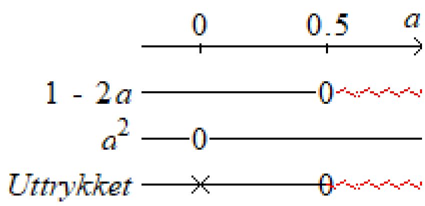
oppgave b) kan også løses slik:

$S(x)=\frac{1}{1-(-2x)}=\frac{1}{1+2x}=a$

$1+2x=\frac{1}{a},\quad x=\frac{1-a}{2a}$

konvergerer når:

$\left(\frac{1-a}{2a}\right)^2<\frac{1}{4}\quad\to\quad\frac{1-2a}{a^2}<0$

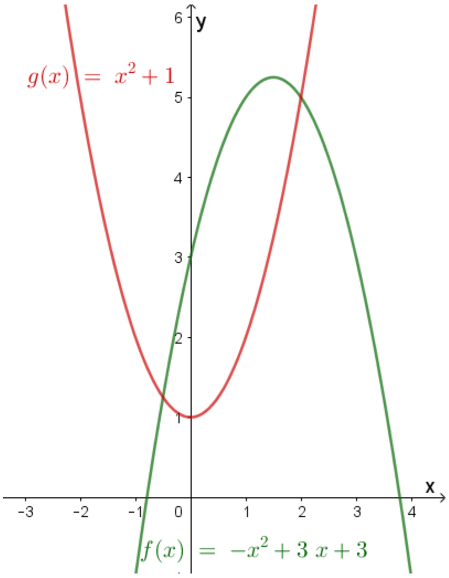


Rekka konvergerer når a er ½ eller mer

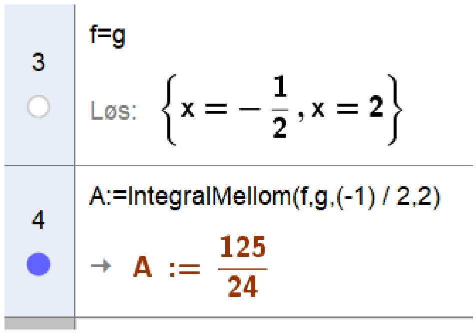
DEL 2

Oppgave 1

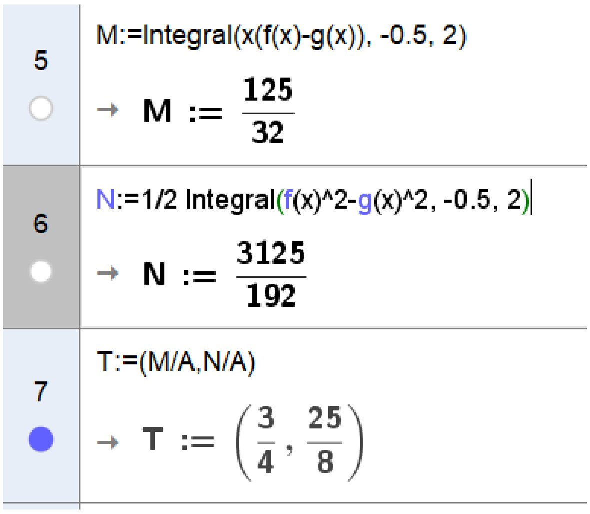
a) Se figur:



b): Fant skjæringen mellom gtrafene i \$3, Brukte kommandoen IntegralMellom, og fant arealet i \$4, det er $\frac{125}{24} \approx 5{,}21$



c) La inn M og N som oppgitt i \$5 og \$6
Definerte Tyngdepunktet, T som oppgitt i oppgaven i \$7, $T\left(\frac{3}{4}, \frac{25}{8}\right)$



Oppgave 2

a) La inn punktene A til C ($1 - $4). Lagde funksjonen K(t) (arealet av trekanten som en funksjon av t) ved å bruke kommandoene absoluttverdi, vektorprodukt og vektor ($5), Satt deretter inn $t = 2$ i denne funksjonen ($6). Arealet av trekanten er $\frac{13}{2} = 6{,}5$

b) Satte K(t) =6 og brukte kommandoen Løs ($7)

For at arealet skal være 6 må t være 1,8 eller 7,85 eller 9,29 fordi det er disse verdiene som er innenfor intervallet til t

CAS

1	A:=(0,0,0) → $A := (0, 0, 0)$
2	B:=(1,t+2,3 t) → $B := (1, t + 2, 3\,t)$
3	C:=(0,4,t+1) → $C := (0, 4, t + 1)$
4	D:=(t-3,8,1) → $D := (t - 3, 8, 1)$
5	K(t):=1/2 abs(Vektorprodukt(Vektor(A, B), Vektor(A, C))) → $K(t) := \frac{1}{2}\sqrt{t^4 - 18\,t^3 + 86\,t^2 - 34\,t + 21}$
6	K(2) → $\frac{13}{2}$
7	K(t) = 6 Løs: $\{t = -0.94, t = 1.8, t = 7.85, t = 9.29\}$

c) Lagde en funksjon for Volumet av pyramiden (tetraederet) uttrykt ved t ($8)
Satt den deriverte av V lik null for å finne ekstremalpunkt ($9)
Når t = 7 er den andrederiverte negativ ($10), grafen er konkav og det er et toppunkt

Volumet er størst når t = 7

8	V(t):=1/6 abs(Vektorprodukt(Vektor(A, B), Vektor(A, C)) Vektor(A, D)) → $V(t) := \frac{1}{6}\left\|t^3 - 12\,t^2 + 21\,t - 10\right\|$
9	V'(t)=0 Løs: $\{t = 7\}$
10	V''(7) → -3

Oppgave 3

a) $y'(t) = k(12\,000 - y)$
b) Teksten tilsier at $y(0) = 100$
Brukte kommandoen LøsODE og fikk samme som jeg skulle vise ($1)
c) Fant k = 0.04 ($3 og $4)
d) Brukte kommandoen ByttUt og kommanoen Løs ($5 og $6)

Etter ca 17 uker er halvparten (6000 stk) smitta

1	LøsODE(y'=k (12000-y), (0,100)) → $y = -11900\,e^{-kx} + 12000$
2	f(x):=-11900 *e* ^(-k x)+12000 ≈ $f(x) := -11900\,e^{-kx} + 12000$
3	f(10)=4000 Løs: $\left\{k = -\frac{1}{10}\ln\left(\frac{80}{119}\right)\right\}$
4	{k = (-1) / 10 ln(80 / 119)} ≈ $\{k = 0.04\}$
5	ByttUt(f, k, 0.04)=6000 Løs: $\left\{x = -25\ln\left(\frac{60}{119}\right)\right\}$
6	{x = -25ln(60 / 119)} ≈ $\{x = 17.119\}$

Oppgave 4

a) Induksjonsbevis

1. *Vise at stemmer for* $n = 1$

$$P_1 = \frac{3 \cdot 1^2 - 1}{2} = 1$$

Formelen stemmer for $n = 1$

2. *Antar at stemmer for* $n = k$

$$P_k = \frac{3k^2 - k}{2}$$

3. *Vise at stemmer for* $n = k + 1$

Venstre side:

$$P_{k+1} = P_k + 3k + 1$$
$$= \frac{3k^2-k}{2} + (3k+1) \cdot \frac{2}{2}$$
$$= \frac{3k^2-k+6k+2}{2}$$
$$= \frac{3k^2 + 5k + 2}{2}$$

Høyre side:

$$P_{k+1} = \frac{3(k+1)^2-(k+1)}{2}$$
$$= \frac{3(k^2+2k+1)-k-1}{2}$$
$$= \frac{3k^2+6k+3-k-1}{2}$$
$$= \frac{3k^2 + 5k + 2}{2}$$

Høyre side er lik venstre side. Formelen stemmer for $n = k + 1$ dersom den stemmer for $n = k$. Sammen med steg 1 betyr det at formelen stemmer for alle naturlige tall n

b) Trekanttall nummer n har formelen $T_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ fordi to av det samme trekanttallet «oppå hverandre» blir et rektangel med sider n og n+1, og trekanten er halvparten av dette

I følge figuren til Mathias er det 2 av trekanttall nummer n-1 og ett av trekanttall nummer n som til sammen utgjør femkant tall nummer n

$$2 \cdot T_{n-1} + T_n = 2 \cdot \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n-1)n + n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2n^2 - 2n + n^2 + n}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Som er den samme formelen som i oppgave a)