

Løsningsforslag eksamen R2 våren 2018

Del 1

Oppgave 1

$$\text{a) } f(x) = \cos(\pi x - 2) \Rightarrow f'(x) = -\sin(\pi x - 2) \cdot \pi = \underline{\underline{-\pi \sin(\pi x - 2)}}$$

$$\text{b) } g(x) = x \cdot \sin x \Rightarrow g'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \underline{\underline{\sin x + x \cos x}}$$

Oppgave 2

$$\text{a) } \int (4x^2 + 3x) dx = \underline{\underline{\frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C}}$$

$$\text{b) } \int 4x^2 \cdot \ln x \, dx = 4 \int x^2 \cdot \ln x \, dx$$

Delvis integrasjon med $u' = x^2$ og $v = \ln x$ gir:

$$\begin{aligned} 4 \int x^2 \cdot \ln x \, dx &= 4 \left(\frac{1}{3} x^3 \cdot \ln x - \int \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} \, dx \right) \\ &= 4 \left(\frac{1}{3} x^3 \cdot \ln x - \int \frac{1}{3} x^2 \, dx \right) \\ &= \underline{\underline{4 \left(\frac{1}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{9} x^3 \right) + C}} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int_0^{\sqrt{12}} \frac{2x}{x^2 + 4} \, dx = \left[\ln(x^2 + 4) \right]_0^{\sqrt{12}} = \ln\left(\left(\sqrt{12}\right)^2 + 4\right) - \ln(0^2 + 4) = \ln\left(\frac{16}{4}\right) = \underline{\underline{\ln 4}}$$

Oppgave 3

$$d = \frac{a_5 - a_2}{5 - 2} = \frac{13 - 4}{3} = \frac{9}{3} = 3, \text{ så } a_1 = a_2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 3 = 1 + 3n - 3 = 3n - 2$$

Da har vi:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + 3n - 2}{2} \cdot n = \frac{3n - 1}{2} \cdot n = \underline{\underline{\frac{3n^2 - n}{2}}}$$

Oppgave 4

a) $y' = (\sin x) \cdot y^2$ er en separabel differensiallikning

$$y' = (\sin x) \cdot y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x) \cdot y^2$$

$$\frac{1}{y^2} dy = \sin x dx$$

$$\int y^{-2} dy = \int \sin x dx$$

$$-y^{-1} + c_1 = -\cos x + c_2$$

$$-\frac{1}{y} = -\cos x + c_2 - c_1$$

$$y^{-1} = C + \cos x \quad | \cdot \frac{y}{C + \cos x}$$

$$y = \frac{1}{\underline{\underline{C + \cos x}}}$$

b) $y(\pi) = 1$ gir:

$$\frac{1}{C + \cos(\pi)} = 1$$

$$C + \cos(\pi) = 1$$

$$C = 1 - \cos(\pi)$$

$$C = 1 - (-1)$$

$$C = 2$$

$$\text{Spesiell løsning: } y = \frac{1}{\underline{\underline{\cos x + 2}}}$$

Oppgave 5

a) f har nullpunktene $x = -1$ og $x = 1$

$$A = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 1 - x^2 dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

b)

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \cdot \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 dx \\
 &= \pi \cdot \int_{-1}^1 (1-2x^2+x^4) dx \\
 &= \pi \cdot \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_{-1}^1 \\
 &= \pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) \right) \\
 &= \pi \left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right) \\
 &= \pi \left(\frac{30}{15} - \frac{20}{15} + \frac{6}{15} \right) \\
 &= \frac{16\pi}{15}
 \end{aligned}$$

Oppgave 6

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right), \quad x = \langle 1, 9 \rangle$$

a) Bestemmer eventuelle toppunkter: $f(x) = 2$ når $\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = 1$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = 1$$

gir

$$\frac{\pi}{2}(x-1) = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2}x = \pi + n \cdot 2\pi \quad | \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$x = 2 + 4n$$

$$x = \langle 1, 9 \rangle \text{ gir } x = 2 \vee x = 6$$

Bestemmer eventuelle bunnpunkter: $f(x) = -2$ når $\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = -1$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = -1$$

gir

$$\frac{\pi}{2}(x-1) = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad | \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$x-1 = 4n-1$$

$$x = 4n$$

$$x = \langle 1, 9 \rangle \text{ gir } x = 4 \vee x = 8$$

Grafen til f har toppunkter $(2, 2)$ og $(6, 2)$ og bunnpunkter $(4, -2)$ og $(8, -2)$

b) $f(x) = 0$ når $\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = 0$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = 0$$

gir

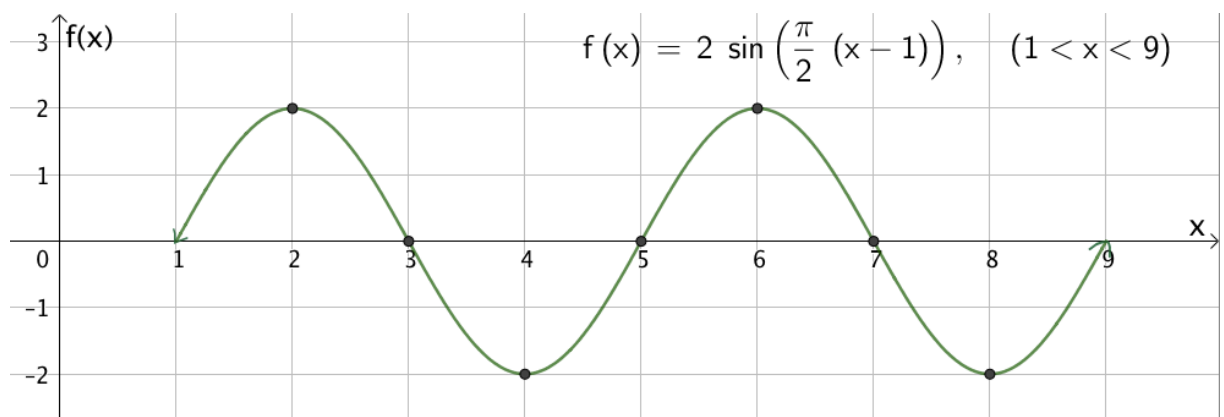
$$\frac{\pi}{2}(x-1) = n \cdot \pi$$

$$x-1 = 2n$$

$$x = 2n+1$$

$$x = \langle 1, 9 \rangle \text{ gir at } f \text{ har nullpunktene } \underline{\underline{x = 3, x = 5 \text{ og } x = 7}}$$

c) Markerer toppunkter, bunnpunkter og nullpunkter og skisserer grafen



d)

$$2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = \sqrt{3}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

gir

$$\frac{\pi}{2}(x-1) = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \vee \frac{\pi}{2}(x-1) = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$x-1 = \frac{2}{3} + 4n \vee x-1 = \frac{4}{3} + 4n$$

$$x = \frac{5}{3} + 4n \vee x = \frac{7}{3} + 4n$$

$$\text{Har } x = \langle 1, 9 \rangle, \text{ så } x = \frac{5}{3} \vee x = \frac{7}{3} \vee x = \frac{17}{3} \vee x = \frac{19}{3}$$

Oppgave 7

a)

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y + z^2 - 8z - 20 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 8z + 16 = 20 + 9 + 4 + 16$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 49$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 7^2$$

Sentrum i kula er $S(3, -2, 4)$, som skulle vises, og radien til kuleflata er 7

b)

$$q = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \left| \frac{6 \cdot 3 - 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 - 4}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2}} \right| = \left| \frac{18 + 6 + 8 - 4}{\sqrt{36 + 9 + 4}} \right| = \frac{28}{\sqrt{49}} = \frac{28}{7} = 4$$

Avstanden fra sentrum S i kula til planet er 4

c) Radius i kula er 7 og avstanden fra S til planet er 4.

Pythagoras' setning gir da at radius i skjæringssirkelen mellom kuleflaten og

$$\text{planet er } \sqrt{7^2 - 4^2} = \sqrt{49 - 16} = \sqrt{33}$$

$$\text{Regner ut arealet av skjæringssirkelen: } A = \pi \cdot (\sqrt{33})^2 = \underline{\underline{33\pi}}$$

Oppgave 8

$$S(x) = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \dots$$

$$a) \quad k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-2x}{1} = -2x$$

Dersom rekka skal konvergere, må vi ha $-1 < k < 1$

$$\begin{array}{ccc} k > -1 & & k < 1 \\ \text{gir} & & \text{gir} \\ -2x > -1 & \text{og} & -2x < 1 \\ 2x < 1 & & 2x > -1 \\ x < \frac{1}{2} & & x > -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\text{Konvergensområdet til rekka er } \underline{\underline{-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}}}$$

b)

$$S(x) = a$$

gir

$$\frac{1}{1 - (-2x)} = a$$

$$\frac{1}{1 + 2x} = a$$

$$\text{Når } x \rightarrow -\frac{1}{2}^+, \text{ vil } S(x) \rightarrow \infty$$

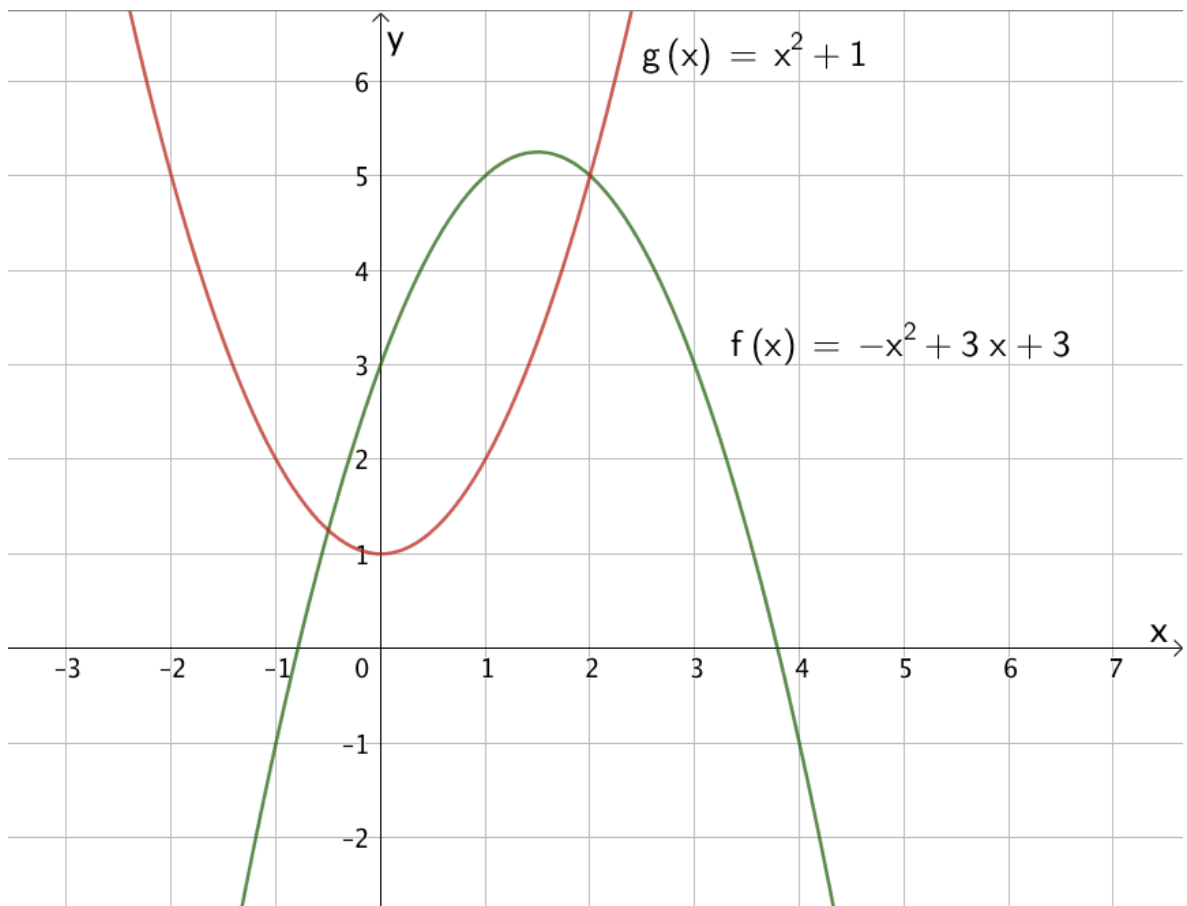
$$\text{Når } x \rightarrow \frac{1}{2}^-, \text{ vil } S(x) \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{\text{Likningen } S(x) = a \text{ har løsning for } a > \frac{1}{2}}}$$

Del 2

Oppgave 1

a)



b)

CAS	
1	Skjæring(f, g) $\rightarrow \left\{ (2, 5), \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) \right\}$
2	$A = \text{IntegralMellom}(f, g, -1/2, 2)$ $\rightarrow A = \frac{125}{24}$

Flatestykket avgrenset av grafene til f og g har areal $\frac{125}{24} \approx 5,2$

c)

CAS	
1	Skjæring(f, g)
→	$\left\{ (2, 5), \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right) \right\}$
2	A:=IntegralMellom(f, g, -1/2, 2)
→	$A := \frac{125}{24}$
3	M:=Integral(x*(f-g), -1/2, 2)
→	$M := \frac{125}{32}$
4	N:=(1/2)*Integral((f ² -g ²), -1/2, 2)
→	$N := \frac{3125}{192}$
5	T=(M/A,N/A)
→	$T = \left(\frac{3}{4}, \frac{25}{8} \right)$

Tyngdepunktet T har koordinatene $\left(\frac{3}{4}, \frac{25}{8} \right)$

Oppgave 2

a) $t = 2$ gir $\overrightarrow{AB} = [1, 4, 6]$ og $\overrightarrow{AC} = [0, 4, 3]$

$$\begin{aligned}
 A_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} 4 \cdot 3 - 6 \cdot 4, -(1 \cdot 3 - 6 \cdot 0), 1 \cdot 4 - 4 \cdot 0 \end{bmatrix} \right\| \\
 &= \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} -12, -3, 4 \end{bmatrix} \right\| \\
 &= \frac{\sqrt{(-12)^2 + (-3)^2 + 4^2}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{144 + 9 + 16}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{169}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{13}}{2}
 \end{aligned}$$

b)

CAS	
1	A:=(0,0,0)
<input checked="" type="radio"/>	→ A := (0,0,0)
2	B:=(1,t+2,3t)
	→ B := (1,t+2,3t)
3	C:=(0,4,t+1)
	→ C := (0,4,t+1)
4	D:=(t-3,8,1)
	→ D := (t-3,8,1)
5	Definerer arealet avhengig av t ved en funksjon F (Flateinnhold)
6	F(t):=(1/2)*abs(Vektor(A, B)⊗Vektor(A, C))
<input checked="" type="radio"/>	→ F(t) := $\frac{1}{2} \sqrt{t^4 - 18t^3 + 86t^2 - 34t + 21}$
7	F=6
<input type="radio"/>	Løs: {t = -0.94, t = 1.8, t = 7.85, t = 9.29}

Arealet av $\triangle ABC$ er 6 når $t = 1,80 \vee t = 7,85 \vee t = 9,29$

c)

CAS	
1	A:=(0,0,0)
<input checked="" type="radio"/>	→ A := (0,0,0)
2	B:=(1,t+2,3t)
	→ B := (1,t+2,3t)
3	C:=(0,4,t+1)
	→ C := (0,4,t+1)
4	D:=(t-3,8,1)
	→ D := (t-3,8,1)
5	Definerer volumet avhengig av t ved en funksjon V
6	V(t):=(1/6)*abs((Vektor(A, B)⊗Vektor(A, C))*Vektor(A, D))
<input checked="" type="radio"/>	→ V(t) := $\frac{1}{6} t^3 - 12t^2 + 21t - 10$
7	V'(t)=0
<input type="radio"/>	Løs: {t = 7}
8	V''(7)
<input type="radio"/>	→ -3

I linje 8 gjennomfører jeg andrederiverttest for å forsikre meg om at $(7, V(7))$ er toppunkt.

$t = 7$ gir det største mulige volumet av pyramiden $ABCD$

Oppgave 3

- a) Når y er antallet smittede innbyggere, vil antallet innbyggere som ikke er smittet være $12000 - y$.

Når vekstfarten til antallet smittede er proporsjonal med antallet som fortsatt ikke er smittet, med proporsjonalitetskonstanten k , kan vi si at

$$\frac{y'}{12000 - y} = k \Rightarrow y' = k \cdot (12000 - y)$$

- b)

CAS	
1	$\text{LøsODE}(y'=k*(12000-y), (0,100))$ $\rightarrow y = -11900 e^{-kx} + 12000$

$$y(t) = 12000 - 11900 \cdot e^{-kt}, \text{ som skulle vises}$$

- c)

CAS	
1	$\text{Løs}(12000 - 11900 * e^{(-10k)} = 4000)$ $\rightarrow \left\{ k = -\frac{1}{10} \ln\left(\frac{80}{119}\right) \right\}$
2	$\{k = (-1) / 10 \ln(80 / 119)\}$ $\approx \{k = 0.0397\}$

$$\underline{k = 0,0397}$$

- d)

CAS	
1	$\text{Løs}(12000 - 11900 * e^{(-10k)} = 4000)$ $\rightarrow \left\{ k = -\frac{1}{10} \ln\left(\frac{80}{119}\right) \right\}$
2	$12000 - 11900e^{(-\text{HøyreSide}(\$1) x)} = 6000$ $\text{Løs: } \left\{ x = \frac{10 \ln(119) - 5 \ln(16) - 10 \ln(5) - \ln(59049)}{\ln(119) - \ln(16) - \ln(5)} \right\}$
3	$\{x = (10\ln(119) - 5\ln(16) - 10\ln(5) - \ln(59049)) / (\ln(119) - \ln(16) - \ln(5))\}$ $\approx \{x = 17.2446\}$

Halvparten av innbyggerne er smittet etter i overkant av 17 uker
 (ca. 17 uker og 2 døgn)

Oppgave 4

$$P_{n+1} = P_n + 3n + 1, \quad P_1 = 1$$

a) Skal vise, ved induksjon, at $P_n = \frac{3n^2 - n}{2}$

Sjekker for $n = 1$:

$$P_1 = \frac{3 \cdot 1^2 - 1}{2} = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1, \text{ Stemmer for } n = 1$$

Antar at formelen stemmer for $n = r$ og vil vise at den også gjelder for $n = r + 1$

$$\begin{aligned} P_{r+1} &= P_r + 3r + 1 \\ &= \frac{3r^2 - r}{2} + 3r + 1 \\ &= \frac{3r^2 - r + 6r + 2}{2} \\ &= \frac{3r^2 + 6r + 2 + 1 - 1 - r}{2} \\ &= \frac{3r^2 + 6r + 3 - (r + 1)}{2} \\ &= \frac{3(r^2 + 2r + 1) - (r + 1)}{2} \\ &= \frac{3(r + 1)^2 - (r + 1)}{2} \end{aligned}$$

Har vist ved induksjon at P_{r+1} er sann når P_r er sann.

$$P_n = \frac{3n^2 - n}{2} \text{ er sann for alle } n \in \mathbb{N} \quad \underline{\text{Q.E.D.}}$$

b) T_n er en aritmetisk rekke med $a_1 = 1$, $d = 1$ og $a_n = n$

$$\text{Summen av denne rekka er: } T_n = \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{n+n^2}{2} = \frac{n(1+n)}{2}$$

Mathias sin oppdeling av P_5 viser at dette femkantallet kan lages ved hjelp av trekantall nummer 4 to ganger, pluss trekantall nummer 5.

Vi har altså $P_5 = 2 \cdot T_4 + T_5$

Dette gir:

$$P_n = 2 \cdot T_{n-1} + T_n = 2 \left(\frac{(n-1)(1+(n-1))}{2} \right) + \frac{n(1+n)}{2} = \frac{2n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{3n^2 + 3n}{2}$$

Har nå utledet formelen for P_n med utgangspunkt i ideen til Mathias