Løsningsforslag
R1 2018 høst
Del 1

mingjun

23. november 2018

Det er verdt å nevne at dette løsningsforslaget inneholder relativt få detaljer. På eksamen skal selvsagt mer utregning være med.

Oppgave 1

a)

Deriver hvert ledd.

$$f'(x) = 2x + 2 + e^x.$$

b)

Bruk produktregelen på x^2 og $\ln(x)$, hvis respektive deriverte er $2x$ og $\frac{1}{x}$.

$$g'(x) = 2x\ln(x) + x^2\frac{1}{x} = 2x\ln(x) + x = x\big(2\ln(x) + 1\big).$$

c)

Omskriv e^{2x+1} til $\frac{1}{e^{-2x-1}}$ og bruk produktregelen:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \left(\frac{x-1}{e^{2x+1}}\right)' \\
&= \big((x-1)\,e^{-2x-1}\big)' \\
&= (x-1)'e^{-2x-1} + (x-1)\left(e^{-2x-1}\right)' \\
&= 1 \cdot e^{-2x-1} + (x-1)\cdot(-2)e^{-2x-1} \\
&= e^{-2x-1}\big(1-2(x-1)\big) \\
&= \frac{3-2x}{e^{2x+1}}.
\end{aligned}$$

Man kan selvsagt også bruke kvotientregelen direkte.

Oppgave 2

a)

Gjør substitusjonen $u = e^x$.

$$u^2 + 7u - 8 = 0 \Leftrightarrow (u-1)(u+8) = 0.$$

Dersom $u = 1$ har vi $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$. For tilfelle $u = -8$ har vi at $e^x = -8$, noe som er umulig og kan dermed forkastes.

b)

$$\begin{aligned}
&\ln(x^2-5x-1) - \ln(3-2x) = 0 \\
\Leftrightarrow &\ln(x^2-5x-1) = \ln(3-2x) \\
\Leftrightarrow &e^{\ln(x^2-5x-1)} = e^{\ln 3-2x} \\
\Leftrightarrow &x^2-5x-1 = 3-2x \\
\Leftrightarrow &x^2-3x-4 = 0.
\end{aligned}$$

Her kan vi f.eks. bruke andregradsformelen til å oppdage løsningene $x = -1$ og $x = 4$. Vi må forkaste $x = 4$ fordi $\ln(3-2\cdot 4)$ er udefinert. Dersom man sjekker $x = -1$ er den veldefinert, og er dermed eneste løsning.

3

a)

Adder komponentvis:

$2\vec{b} - 3\vec{a} = 2[-5, 3] - 3[2, 3] = [-5 \cdot 2, 3 \cdot 2] - [2 \cdot 3, 3 \cdot 3] = [-10 - 6, 6 - 9] = [-16, -3]$.

b)

Bruk pytagoras:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} < \sqrt{16} = 4.$$

c)

Vi vet at

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos(\theta).$$

Ved å sette inn verdiene og flytte alt over på en side får vi $\cos(\theta) = \frac{-1}{|a||b|}$. Ettersom nevneren må være positiv er høyre side negativ, og θ er derfor større enn $90°$ (butt).

4

a)

Man sjekker at $f(2) = 0$.

b)

Med litt tålmodighet kan man polynomdividere seg fram til at $f(x) = (x^2 + 8x + 15)(x - 2)$. Anvend så andregradsformelen på den resterende faktor av andre grad til å finne $f(x) = (x + 5)(x + 3)(x - 2)$.

c)

Bruk fortegnlinjeskjema på den faktoriserte $-2f(x) = -2(x+5)(x+3)(x-2)$. Svaret er at $x \leq -5 \vee -3 \leq x \leq 2$.

5

a)

Definer A som kjøperen er mann, og B som kjøperen kjøper edelgran. Da er $P(A) = 70\%$, $P(B|A) = 60\%$ og $P(B|\bar{A}) = 40\%$. Vi vil finne $P(B)$.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) \\ &= 60\% \cdot 70\% + 40\% \cdot (1 - 70\%) \\ &= 54\%. \end{aligned}$$

b)

Det er $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$ vi er ute etter. Ved Bayes' setning er $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \dfrac{60\% \cdot 70\%}{54\%} = \dfrac{7}{9}$. Dermed er $P(\bar{A}B) = 1 - \dfrac{7}{9} = \dfrac{2}{9}$.

6

For at funksjonen skal være kontinuerlig de to grenene av funksjonen ha samme verdi når $x = a$. Med andre ord må $2a^2 - 3a - 2 = a^2 + a + 3 \Leftrightarrow a^2 - 4a - 5 = 0$. Løser man denne med andregradsformelen får man at $a = -1$ eller $a = 5$.

7

a)

$$\begin{aligned} g'(x) &= x' - \Big(2 \ln \left(x^2 + 3\right)\Big)' \\ &= 1 - 2\frac{1}{x^2+3} \cdot 2x \\ &= 1 - \frac{4x}{x^2+3} \\ &= \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 3}. \end{aligned}$$

b)

Vi starter med å faktorisere: $g'(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x^2+3}$. For et toppunkt må $g'(x)$ gå fra positivt til negativt, mens et for et bunnpunkt må det omvendte være tilfellet. $\dfrac{1}{x^2+3}$ er alltid positiv, så vi trenger ikke å ta hensyn til den. $(x-1)(x-3)$ går fra positiv til negativ i $x = 1$, og omvendt i $x = 3$. Dermed gir $x = 1$ et toppunkt og $x = 3$ et bunnpunkt.

c)

For et vendepunkt må $g''(x) = 0$. Vi regner ut $g''(x)$:

$$\begin{aligned}
g''(x) &= \left(\frac{x^2-4x+3}{x^2+3}\right)' \\
&= \frac{\left(x^2-4x+3\right)'\left(x^2+3\right)-\left(x^2-4x+3\right)\left(x^2+3\right)'}{\left(x^2+3\right)^2} \\
&= \frac{(2x-4)\left(x^2+3\right)-\left(x^2-4x+3\right)\cdot 2x}{\left(x^2+3\right)^2}
\end{aligned}$$

Igjen er nevneren alltid positiv, så vi trenger kun å betrakte telleren.

$$\begin{aligned}
&(2x-4)\left(x^2+3\right)-2x\left(x^2-4x+3\right)=0 \\
&2x^3+6x-4x^2-12-\left(2x^3-8x^2+6x\right)=0 \\
&4x^2=12 \\
&x=\pm\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

8

a)

Lag et linjestykke med lengde 8 cm, definer dets endepunkter til å være A og B. Konstruer sirkler henholdsvis med radius 5 cm og 7 cm i A, B. Disse to sirkler vil skjære hverandre i to punkter, begge oppfyller kriteriene til C.

b)

Konstruer vinkelhalveringslinjer i $\angle A$ og $\angle B$, og la de skjære i I. Konstruer normal fra I til en av trekantens sider, og deretter konstruer en sirkel med sentrum I gjennom skjæringspunktet mellom normalen og siden.

c)

Konstruer en likesidet trekant med AC som en av sidene. La Z være hjørnet i trekanten som hverken er A eller C. Konstruer en sirkel med sentrum Z gjennom A. C ligger dermed også på denne sirkelen og AC spenner over en periferivinkel på 30° på sirkelen (fordi $\angle AZC$ er en sentralvinkel på 60°). La deretter denne sirkelen skjære en sirkel med sentrum i A og radus 6 cm. Velg det skjæringspunktet som oppfyller kravene til D.