Løsningsforslag eksamen S1 høsten 2018

Del 1

Oppgave 1

a)

$$x^2-3x+1=3x+8$$
$$x^2-3x-3x+1-8=0$$
$$x^2-6x-7=0$$
$$gir$$
$$x=\frac{6\pm\sqrt{36+28}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{6\pm8}{2}=3\pm4$$
$$så$$
$$\underline{\underline{x=-1\vee x=7}}$$

b) $\lg\left(x^4\right)-\lg\left(x^3\right)+\lg\left(x^2\right)-\lg x=6$

Siden likningen inneholder leddet $\lg x$, vet jeg at vi må ha $x>0$, så her vil jeg ikke miste potensielle løsninger ved å bruke 1.logaritmesetning.

$$\lg\left(x^4\right)-\lg\left(x^3\right)+\lg\left(x^2\right)-\lg x=6$$
$$4\lg x-3\lg x+2\lg x-\lg x=6$$
$$2\lg x=6$$
$$\lg x=3$$
$$10^{\lg x}=10^3$$
$$\underline{\underline{x=1000}}$$

c)

$$10\cdot4^x=5\cdot2^x$$
$$2\cdot\left(2^2\right)^x=2^x$$
$$2\cdot2^{2x}=2^x$$
$$2\cdot2^x=1$$
$$2^x=\frac{1}{2}$$
$$2^x=2^{-1}$$
$$\underline{\underline{x=-1}}$$

Oppgave 2

a) Bruker 3.kvadratsetning (konjugatsetningen):

$$\begin{aligned}(a+2b)^2-(2b-a)^2 &= \big((a+2b)+(2b-a)\big)\big((a+2b)-(2b-a)\big)\\ &= (a+2b+2b-a)(a+2b-2b+a)\\ &= 4b\cdot 2a\\ &= \underline{\underline{8ab}}\end{aligned}$$

b)

$$3^3\cdot 3^0+3^{-1}+3^{-2}+3^{-3}=27\cdot 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}=27+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}=27+\frac{9+3+1}{27}=\underline{\underline{27+\frac{13}{27}}}$$

Oppgave 3

$$x^2-6x\geq 7$$
$$x^2-6x-7\geq 0$$

Vet fra oppgave 1 at venstresiden i ulikheten har nullpunkter $x=-1$ og $x=7$
Jeg kan også se at grafen til uttrykket på venstre side i ulikheten er en parabel som vender den hule siden opp (smilemunn). Da er verdien negativ mellom nullpunktene, men null eller positiv ellers.

$$\underline{\underline{x^2-6x\geq 7 \text{ når } x\in\langle\leftarrow,-1]\cup[7,\rightarrow\rangle}}$$

Oppgave 4

a)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

b) Hypergeometrisk sannsynlighetsmodell

$$P(\text{To jenter og to gutter})=\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{7}{4}}=\frac{6\cdot 3}{35}=\underline{\underline{\frac{18}{35}}}$$

c)

$$P(\text{Minst én gutt}) = 1 - P(\text{Fire jenter}) = 1 - \frac{\binom{4}{4}\cdot\binom{3}{0}}{\binom{7}{4}} = 1 - \frac{1\cdot 1}{35} = 1 - \frac{1}{35} = \underline{\underline{\frac{34}{35}}}$$

Oppgave 5

a)

$$I. \quad x + y = 1$$
$$II. \quad -2x + y = -5$$

Trekker likning *II* fra likning *I* og får:

$$III. \quad 3x = 6$$
$$x = 2$$

Setter dette inn i likning *I:*

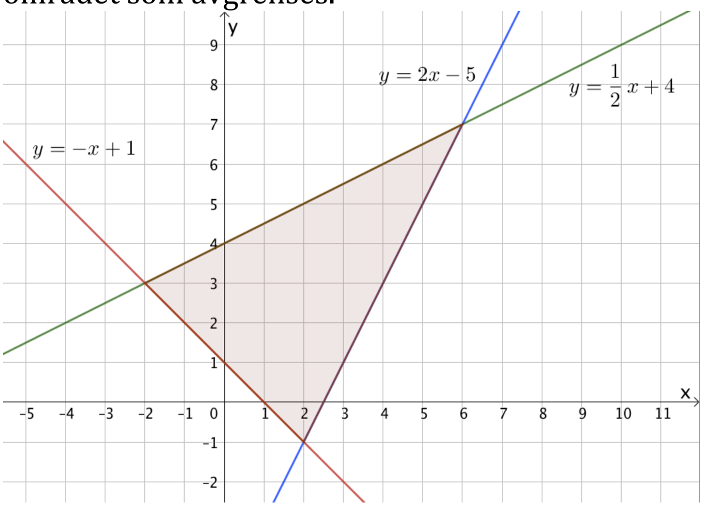
$$I. \quad 2 + y = 1$$
$$y = 1 - 2$$
$$y = -1$$

$$\underline{\underline{x = 2 \wedge y = -1}}$$

b) Ordner ulikhetene slik at y står alene på venstre side:

$$I. \quad x - 2y \geq -8 \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{2}x + 4$$
$$II. \quad x + y \geq 1 \Leftrightarrow y \geq -x + 1$$
$$III. \quad y \geq 2x - 5$$

Tegner linjer med likninger som samsvarer med ulikhetene over og skraverer området som avgrenses.



c) Regner ut verdien av $3x - y$ for de ulike hjørnene i grafområdet.

Hjørnet (-2,3) gir $3(-2) - 3 = -6 - 3 = -9$
Hjørnet (2,-1) gir $3 \cdot 2 - (-1) = 6 + 1 = 7$
Hjørnet (6,7) gir $3 \cdot 6 - 7 = 18 - 7 = 11$

Den største mulige verdien størrelsen 3*x* - *y* kan få er 11

Oppgave 6

$$O(x) = -0,25x^2 + 10x - 75$$

a)

$$
\begin{aligned}
O'(x) &= -0,5x + 10 \\
&\quad så \\
O'(x) &= 0 \\
&\quad gir \\
-0,5x + 10 &= 0 \\
-0,5x &= -10 \\
x &= 20
\end{aligned}
$$

Den deriverte av overskuddsfunksjonen er et lineært uttrykk, så den vil skifte fortegn i nullpunktet. Jeg kan se ut fra funksjonsuttrykket til overskuddsfunksjonen at grafen til *O* er en parabel som vender hul side ned (sur munn), så ekstremalpunktet er et *toppunkt*.

$$O(20) = -0,25 \cdot 20^2 + 10 \cdot 20 - 75 = -0,25 \cdot 400 + 200 - 75 = -100 + 200 - 75 = 25$$

Overskuddet er størst ved produksjon av 20 enheter per dag.
Da er overskuddet 25 000 kroner

b)

$$
\begin{aligned}
O(x) &= 0 \\
-0,25x^2 + 10x - 75 &= 0 \\
-0,25\left(x^2 - 40x + 300\right) &= 0 \\
x^2 - 40x + 300 &= 0 \\
&\quad gir
\end{aligned}
$$

$$x = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 1200}}{2} = \frac{40 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{40 \pm 20}{2} = 20 \pm 10, \begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = 10 \end{cases}$$

Daglige produksjonsmengder på mellom 10 og 30 enheter vil gi overskudd

Oppgave 7

a)

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{8-5}{3}=\frac{3}{3}=1$$

<u>Den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet [-1,2] er 1</u>

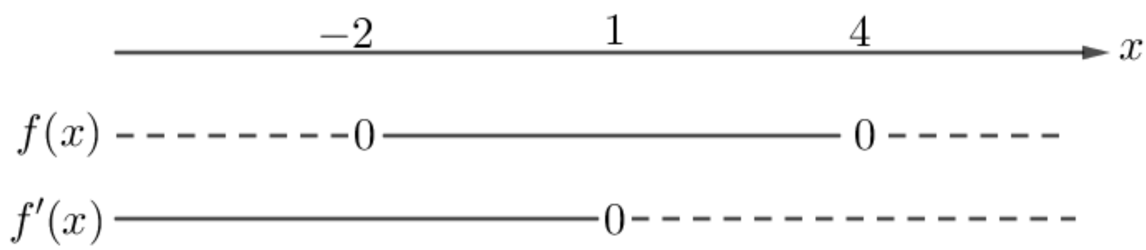
b) Tangenten som er gitt i figuren går gjennom punktene (-1,5) og (0,9). Bruker disse punktene til å finne stigningstallet til tangenten.

$$\frac{9-5}{0-(-1)}=\frac{4}{1}=4$$

Ser på grafen til *f* at punktet $\left(1, f(1)\right)$ er toppunkt. Da er den deriverte lik null.

$$\underline{\underline{f'(-1)=4 \wedge f'(1)=0}}$$

c)



Oppgave 8

$$f(x)=-x^2+2x+8$$

Starter med å finne *x*-koordinatene til punktene *A* og *B* (nullpunktene):

$$\begin{aligned}
f(x)&=0\\
-x^2+2x+8&=0\\
-\left(x^2-2x-8\right)&=0\\
x^2-2x-8&=0\\
(x-4)(x+2)&=0
\end{aligned}$$

$$så$$

$$x=4 \vee x=-2$$

Det betyr at grunnlinja i trekant *ABC* er 6 (avstanden mellom nullpunktene)
Dersom grunnlinja i en trekant er 6, må høyden være 8 for at arealet skal bli 24.
Det betyr at vi må ha $f(t)=8$ for at trekant *ABC* skal ha areal 24.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= 8 \\
-t^2 + 2t + 8 &= 8 \\
-t^2 + 2t &= 0 \\
-t(t-2) &= 0 \\
& \textit{så} \\
& \underline{\underline{t = 0 \vee t = 2}}
\end{aligned}
$$

Er man litt ekstra oppmerksom, vil man se at grafen i forrige oppgave, altså oppgave 7, er grafen til funksjonen i denne oppgaven, altså oppgave 8.
Dersom en klarer å begrunne dette, kan man altså finne de riktige t-verdiene ved å bruke grafen fra forrige oppgave.

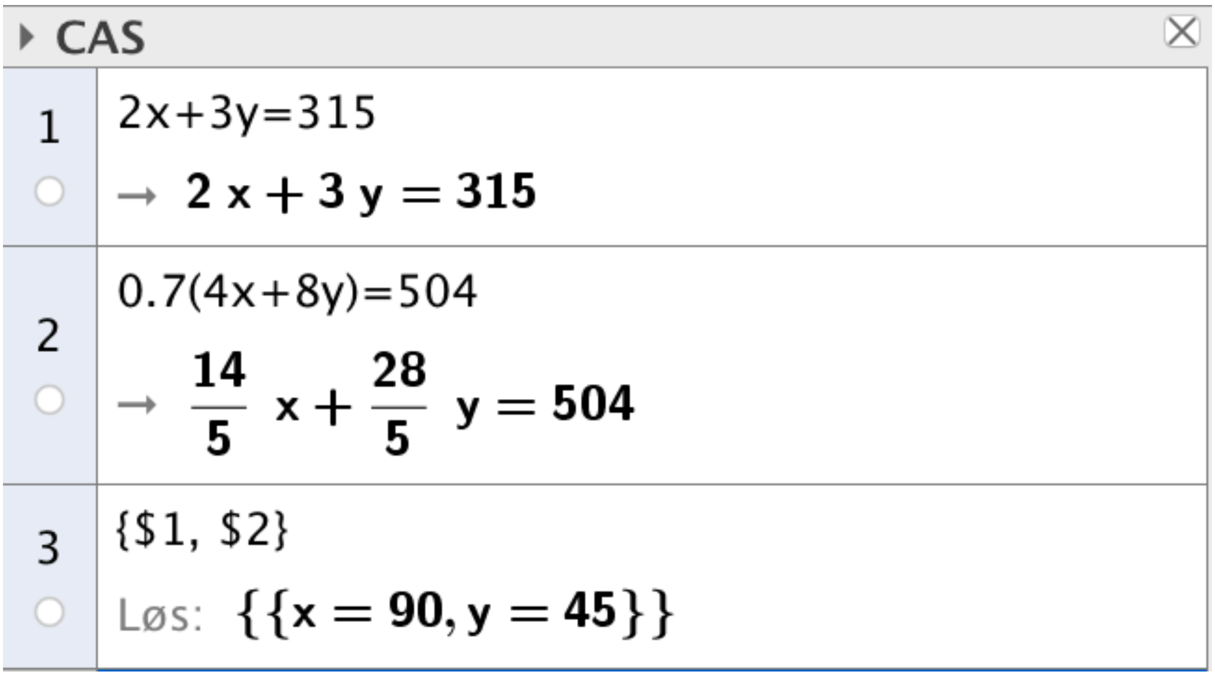
Del 2

Oppgave 1

Lar x være ordinær pris for en voksenbillett og lar y være ordinær pris for en barnebillett.
Det gir likningssystemet:

$$
\begin{bmatrix} 2x + 3y = 315 \\ 0,7(4x + 8y) = 504 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x + 3y = 315 \\ 2,8x + 5,6y = 504 \end{bmatrix}
$$

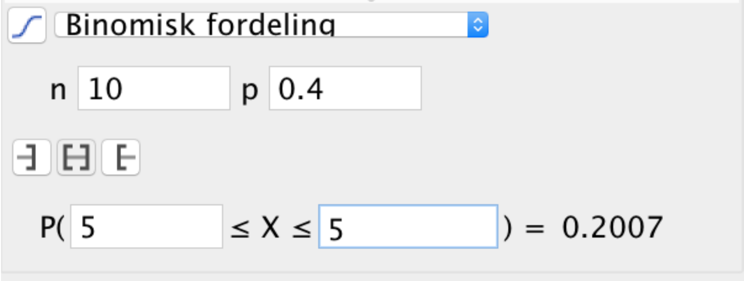
Løser i CAS:



<u>Ordinær billettpris er 90 kroner for voksne og 45 kroner for barn</u>

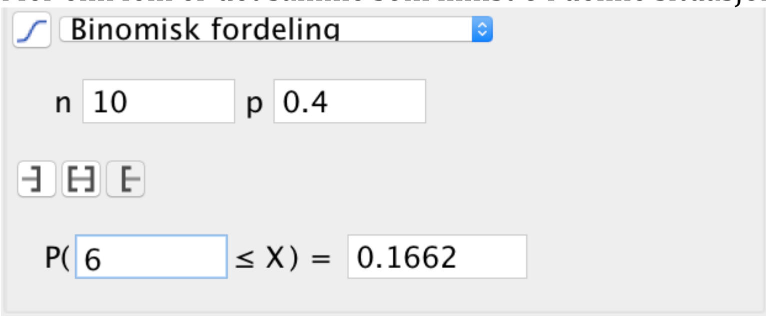
Oppgave 2

a) Binomisk sannsynlighetsmodell. Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.



<u>Sannsynligheten for at halvparten av plantene til Astrid får gule blomster er 20 %</u>

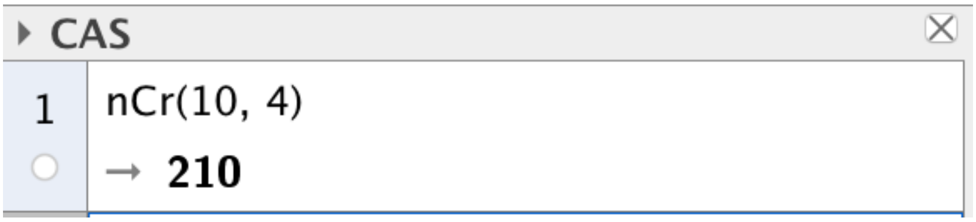
b) Mer enn fem er det samme som minst 6 i denne situasjonen



<u>Sannsynligheten for at mer enn fem av plantene får gule blomster er 16,6 %</u>

c) Stian har ti plasser tilgjengelig i blomsterkassen.
På hvor mange ulike måter kan han velge ut fire av disse plassene?

Vi har et uordnet utvalg uten tilbakelegging



<u>Stian kan plassere plantene med gule blomster på 210 forskjellige måter</u>

Oppgave 3

a) Det gir ikke mening å spise et negativt antall gram makrell i tomat eller syltetøy. Derfor må ulikhetene $x \geq 0$ og $y \geq 0$ gjelde.

Når vi skal forklare de neste ulikhetene, må vi passe på å ta hensyn til at Morten sin frokost består av fire skiver grovbrød á 50 g, uansett pålegg. Det betyr at han alltid spiser 200 g grovbrød, og får i seg energiinnholdet og næringsstoffene fra disse, i tillegg til fra pålegget. Vi må også huske at tabellen gir oss energi- og næringsinnhold per 100 gram, så vi må dele på 100 for å få riktig mengde per gram pålegg.

Opplysningen om at frokosten skal inneholde maksimalt 2400 kJ energi gir følgende ulikhet:

$$2\cdot 900+\frac{1049}{100}x+\frac{740}{100}y\le 2400$$
$$10,49x+7,40y\le 2400-1800$$
$$10,49x+7,40y\le 600$$

Opplysningen om maksimalt antall gram fett gir følgende ulikhet:

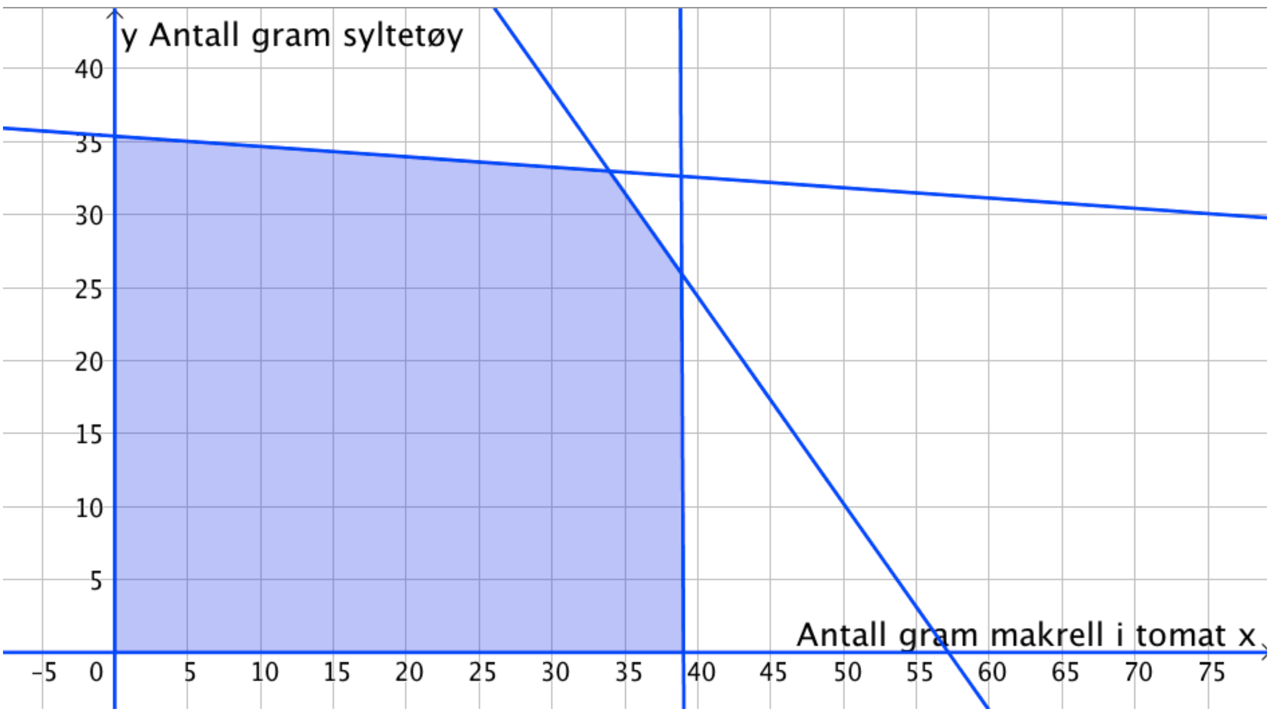
$$2\cdot 2,0+\frac{20,5}{100}x+\frac{0,1}{100}y\le 12$$
$$0,205x+0,001y\le 12-4$$
$$0,205x+0,001y\le 8$$

Opplysningen om maksimalt antall gram karbohydrat gir følgende ulikhet:

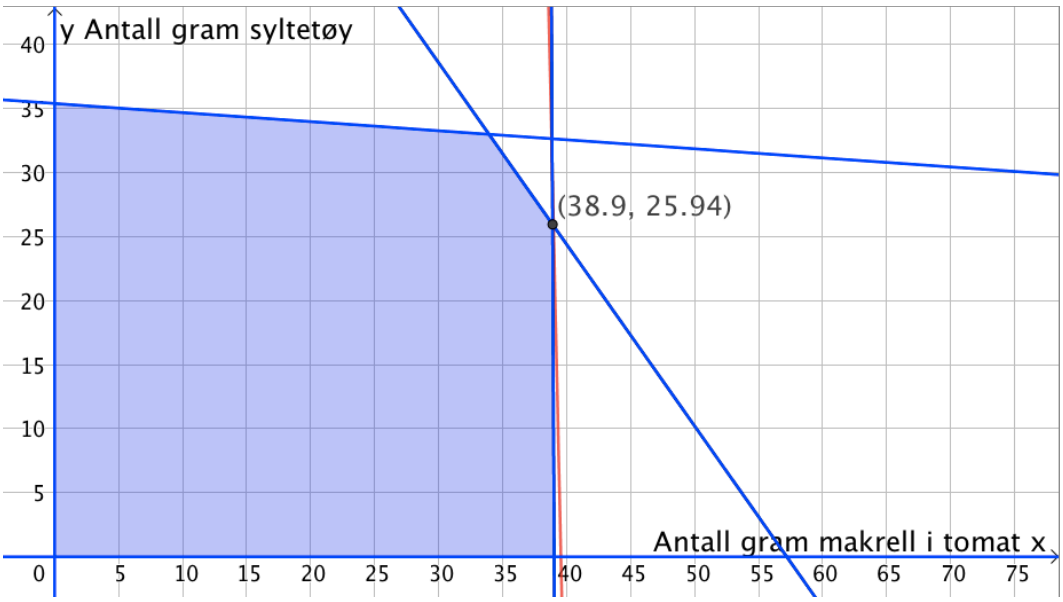
$$2\cdot 32,5+\frac{3,0}{100}x+\frac{42,4}{100}y\le 80$$
$$0,03x+0,424y\le 80-65$$
$$0,03x+0,424y\le 15$$

Ulikhetene som er oppgitt må altså gjelde. Som skulle forklares

b) Skriver inn
"x ≥ 0 ⋀ y ≥ 0 ⋀ 10.49x + 7.4y ≤ 600 ⋀ 0.205x + 0.001y ≤ 8 ⋀ 0.03x + 0.424y ≤ 15"
i inntastingsfeltet i GeoGebra, og får frem det skraverte området.



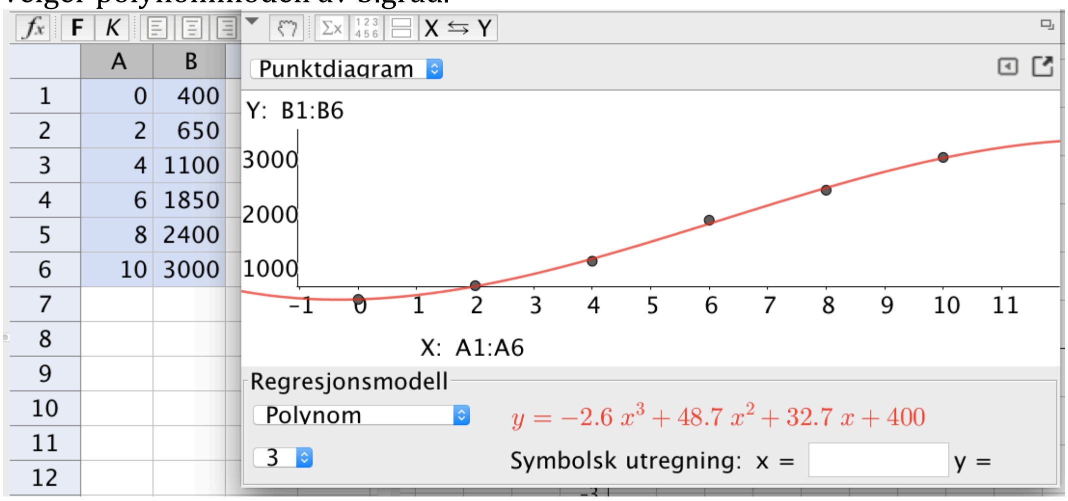
c) Opplysningene i tabellen forteller oss at Morten vil han få i seg 0,003 gram protein per gram syltetøy han spiser og 0,134 gram protein per gram makrell i tomat han spiser.
Mengden protein han får i seg gjennom syltetøy og makrell i tomat er da gitt ved $0{,}134x + 0{,}003y$
Tegner linja $0{,}134x + 0{,}003y = 0$ og bruker denne som nivålinje ved å parallellforskyve og se når linja krysser y-aksen så høyt oppe som mulig, samtidig som den går gjennom et hjørne i grafområdet.



<u>Morten kan spise 25,94 gram syltetøy om frokosten skal være mest mulig proteinrik</u>

Oppgave 4

a) Legger inn verdiene i regnearket i GeoGebra. Gjennomfører regresjonsanalyse og velger polynommodell av 3.grad.



	A	B
1	0	400
2	2	650
3	4	1100
4	6	1850
5	8	2400
6	10	3000

$$\underline{\underline{g(x) = -2{,}6x^3 + 48{,}7x^2 + 32{,}7x + 400}}$$

b) Modellen som gir oss elgbestanden etter 2021 er en eksponentiell modell. Den består av en startverdi og en vekstfaktor som er en potens der eksponenten inneholder variabelen modellen er avhengig av.

Startverdien til *h* er

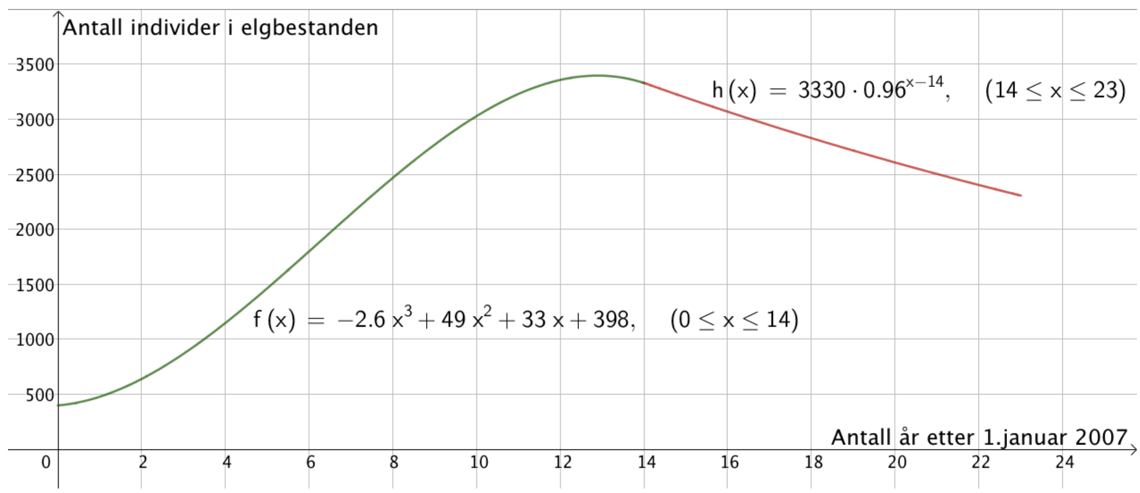
$$f(14) = -2{,}6 \cdot 14^3 + 49 \cdot 14^2 + 33 \cdot 14 + 398 = 3329{,}6 \approx 3330$$

Bestanden skal avta med 4 % per år, så vekstfaktoren må være 0,96
Siden modellen *h* fortsetter der *f* slutter å gjelde, må vi ha $x-14$ som eksponent, slik at vi får startverdien til *h* når vi setter inn $x=14$, verdien til *h* etter ett år når vi setter inn $x=15$ osv.
x er fortsatt antall år etter 1.januar 2007, så derfor må vi gjøre denne tilpasningen.

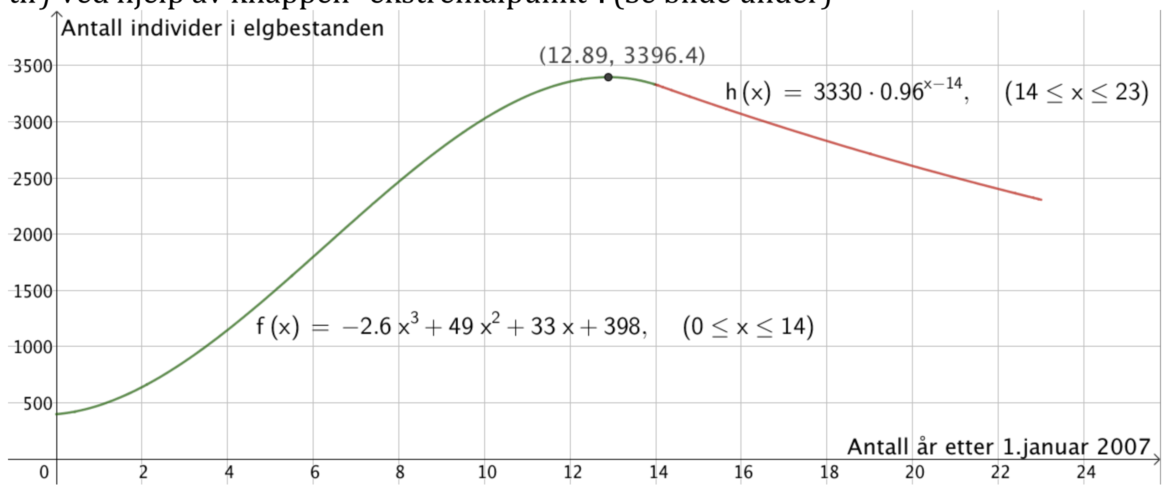
Elgbestanden etter 2021 er altså gitt ved

$h(x) = 3330 \cdot 0.96^{x-14}$, <u>som skulle forklares</u>

c)

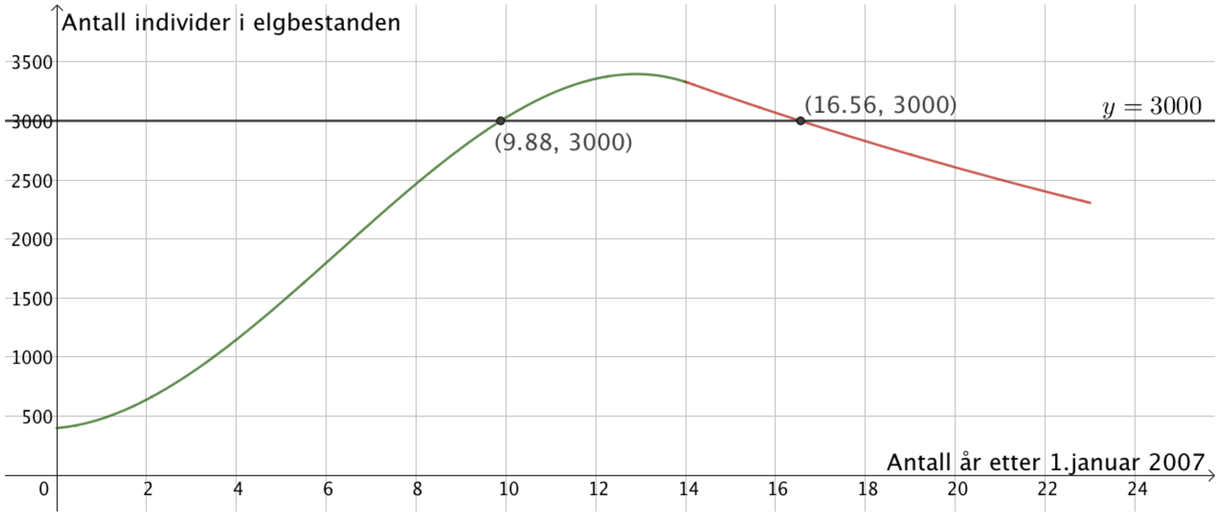


d) Ser av grafen av elgbestanden er størst før 2021, så finner toppunktet på grafen til *f* ved hjelp av knappen "ekstremalpunkt". (Se bilde under)



<u>Elgbestanden er størst etter 12,89 år, altså mot slutten av 2019</u>

e) Tegner linja $y = 3000$ og finner skjæringspunktene mellom denne og grafene til f og h ved hjelp av skjæring mellom to objekt. (Se bildet under)



<u>Bestanden vil være på over 3000 dyr fra slutten av 2016 til omtrent midt i 2023</u>