

DEL 1

Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = e^{2x}$

b) $g(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2}$

c) $h(x) = x^3 \cdot \ln x$

Oppgave 2 (3 poeng)

Avgjør om de geometriske rekkene er konvergente. Bestem i så fall summen.

a) $54 + 18 + 6 + 2 + \dots$

b) $4 - 8 + 16 - 32 + \dots$

Oppgave 3 (4 poeng)

Russen ved en skole vil arrangere et løp til inntekt for et godt formål. De løper rundt et lite vann. Lise har gjort avtale med en bedrift. Bedriften vil gi 10 kroner for den første runden hun løper. For hver ny runde vil de øke beløpet med 5 kroner. Det vil si at de vil gi

- 10 kroner for runde 1
- 15 kroner for runde 2
- 20 kroner for runde 3
- og så videre

- a) Hvor mange runder må Lise løpe dersom hun skal tjene 100 kroner på den siste runden?
- b) Hvor mye må bedriften gi totalt dersom Lise løper 25 runder?

Oppgave 4 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$

- a) Vis at $(x-1)$ er en faktor i $f(x)$.
- b) Faktoriser $f(x)$ i lineære faktorer.

Vi har gitt brøken

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 8x + d}{x^2 - 4}$$

- c) For hvilke verdier av d kan brøken forkortes?

Oppgave 5 (6 poeng)

Dersom prisen på en bestemt vare er p kroner per enhet, vil etterspørselen q være gitt ved

$$q(p) = 500 \cdot e^{-0,04p}$$

Inntekten I (i kroner) er

$$I(p) = p \cdot q(p)$$

- a) Bestem den prisen som gir størst inntekt.

Vi kan også bestemme prisen p som en funksjon av q .

- b) Vis at

$$p(q) = -25 \cdot \ln\left(\frac{q}{500}\right)$$

- c) Bestem $p'(25)$. Hva forteller dette svaret oss?

Oppgave 6 (4 poeng)

Et tredjegradspolynom kan skrives på formen

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

der a , b , c og d er konstanter.

Om funksjonen f får du vite at

- $x = 1$ og $x = -2$ er nullpunkter til funksjonen
- $x = 1$ er et ekstremalpunkt
- grafen til f skjærer y -aksen i $y = 2$

a) Forklar at opplysningene ovenfor gir likningssystemet

$$\begin{aligned}a + b + c + d &= 0 \\ -8a + 4b - 2c + d &= 0 \\ 3a + 2b + c &= 0 \\ d &= 2\end{aligned}$$

b) Bestem et uttrykk for $f(x)$.

Oppgave 7 (9 poeng).

I denne oppgaven kan du få bruk for tabellen over standard normalfordeling i vedlegg 1.

Du skal arrangere et spill der spilleren kaster en terning. Gevinsten er bestemt av antall øyne terningen viser.

- Ett eller to øyne gir 0 kroner i gevinst.
- Tre eller fire øyne gir 20 kroner i gevinst.
- Fem øyne gir 60 kroner i gevinst.
- Seks øyne gir 200 kroner i gevinst.

La X være gevinsten spilleren får når terningen kastes én gang.

- Lag en tabell som viser sannsynlighetsfordelingen til X .
- Bestem forventningsverdien $E(X)$. Vis at standardavviket er $SD(X) = 70$.
- Hva må prisen per spill være for at du som arrangør i det lange løp skal få et gjennomsnittlig overskudd på 10 kr per spill?

Vi antar at du heretter arrangerer spillet med et forventet gjennomsnittlig overskudd på 10 kr per spill. En spiller deltar i 100 spill. La Y_i være nettogevinsten i spill nummer i . Den totale nettogevinsten er da gitt ved

$$S = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100}$$

- Begrunn at S er tilnærmet normalfordelt.
- Vis at $E(S) = -1000$ og $SD(S) = 700$.
- Bestem sannsynligheten for at spilleren går i overskudd med de 100 spillene.

DEL 2

Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Totalkostnaden K (i kroner) ved produksjon av en vare er gitt ved

$$K(x) = 0,025x^2 + 80x + 4000, \quad 0 < x < 2000$$

Her er x antall produserte enheter per uke.

Inntekten i kroner ved denne produksjonen er gitt ved

$$I(x) = -0,015x^2 + 150x, \quad 0 < x < 2000$$

- Bestem funksjonsuttrykket for overskuddsfunksjonen O .
Bruk graftegner til å tegne grafen til overskuddsfunksjonen for $0 < x < 2000$.
- Bestem den produksjonsmengden som gir størst overskudd.
- Bruk CAS til å bestemme den produksjonsmengden som gir lavest kostnad per enhet.

Oppgave 2 (6 poeng).

Et forskerteam utfører en rekke forsøk der de lar skadedyr invadere ulike typer bolighus. For ett av disse husene er antall dyr etter t dager gitt i tabellen nedenfor.

t (dager)	10	20	30	40	50	60
Antall skadedyr	35	130	245	289	297	300

- a) Lag en funksjon g som beskriver sammenhengen mellom tiden t og antall skadedyr i dette huset.

For en annen hustype er funksjonen f gitt ved

$$f(t) = \frac{240}{1 + 39 \cdot e^{-0,15t}} - 6, \text{ der } t \geq 10$$

en god modell for antall skadedyr i huset. Her er t antall dager etter at huset ble invadert.

- b) Når øker antall skadedyr raskest ifølge modellen f ? Hvor stor er vekstfarten da?

En huseier oppdaget skadedyr i huset sitt. Skadedyrkontrollen fant ut at det var rundt 200 skadedyr i huset. Kontrolløren mener at modellen f ovenfor vil passe godt for å bestemme antall skadedyr i dette huset.

- c) Hvor lenge hadde det vært skadedyr i huset da det ble kontrollert?

Oppgave 3 (6 poeng)

Ved en stor videregående skole skal 100 tilfeldig valgte elever ta en matematikktest. Fra tidligere år vet vi at poengskåren X til en tilfeldig valgt elev ved denne skolen er tilnærmet normalfordelt med forventningsverdi 50 poeng og standardavvik 8 poeng. Vi antar at ferdighetene til ulike elever er uavhengige av hverandre.

La \bar{X} være gjennomsnittsskåren til 100 tilfeldig valgte elever.

- a) Begrunn at $E(\bar{X}) = 50$ og $SD(\bar{X}) = 0,8$.
- b) Hva er sannsynligheten for at gjennomsnittsskåren til de 100 elevene blir mellom 49 og 51 poeng?

Skolen hadde en mistanke om at elevene et år var flinkere enn normalt. Det viste seg at gjennomsnittsskåren til de 100 tilfeldig valgte elevene som tok testen, ble 51,5 poeng.

- c) Sett opp en hypotesetest, og bruk den til å avgjøre om det er grunnlag for mistanken. Bruk et signifikansnivå på 5 %.

Oppgave 4 (6 poeng).

Mads har en kronisk sykdom og er avhengig av medisiner. Hver dag tar han én tablett som inneholder 2,4 mg virkestoff. I løpet av ett døgn bryter kroppen ned 25 % av virkestoffet i tablettene.

- a) Hvor mye av det virksomme stoffet har han i kroppen like etter at han har tatt den sjuende tablett?
- b) Hvor mye virkestoff vil Mads maksimalt ha i kroppen i det lange løp hvis han fortsetter medisineren?

Det viser seg at Mads ikke tåler mer enn 5,5 mg av det virksomme stoffet i kroppen. Han må derfor la det gå lengre tid mellom hver gang han tar tablettene.

- c) Hvor mange timer må det minst gå mellom hver gang Mads tar en tablett?