Løsningsforslag eksamen R1 høsten 2018

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x)=x^2+2x+e^x \Rightarrow \underline{\underline{f'(x)=2x+2+e^x}}$

b) $g(x)=x^2\cdot\ln x \Rightarrow g'(x)=2x\cdot\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=\underline{\underline{2x\cdot\ln x+x=x\left(2\ln x+1\right)}}$

c)

$$h(x)=\frac{x-1}{e^{2x+1}}$$

$$h'(x)=\frac{1\cdot e^{2x+1}-(x-1)\cdot 2e^{2x+1}}{\left(e^{2x+1}\right)^2}=\frac{e^{2x+1}-2xe^{2x+1}+2e^{2x+1}}{\left(e^{2x+1}\right)^2}=\frac{\left(3-2x\right)e^{2x+1}}{\left(e^{2x+1}\right)^2}=\underline{\underline{\frac{3-2x}{e^{2x+1}}}}$$

Oppgave 2

a)

$$e^{2x}+7e^x-8=0$$

$$og$$

$$u=e^x$$

$$gir$$

$$u^2+7u-8=0$$

$$\left(u-1\right)\left(u+8\right)=0$$

$$så$$

$$u=1\vee u=-8$$

$e^x>0$ for alle x, så er kun den positive løsningen som kan brukes videre.

$$e^x=1$$

$$x=\ln 1$$

$$\underline{\underline{x=0}}$$

b)

$$\ln\left(x^2-5x-1\right)-\ln\left(3-2x\right)=0$$

$$\ln\left(\frac{x^2-5x-1}{3-2x}\right)=0$$

Vet at $\ln 1=0$, som jeg bruker videre

$$\frac{x^2-5x-1}{3-2x}=1$$

$$x^2-5x-1=3-2x$$

$$x^2-5x+2x-1-3=0$$

$$x^2-3x-4=0$$

$$(x-4)(x+1)=0$$

$$så$$

$$x=4\vee x=-1$$

Kontrollerer løsningene og ser at $x=4$ gir negativ verdi til polynomene vi tar logaritmen til, så dette er ikke en gyldig løsning.

Løsningen av likningen er $\underline{\underline{x=-1}}$

Oppgave 3

a) $2\vec{b}-3\vec{a}=2\cdot[-5,3]-3\cdot[2,3]=[-10,6]-[6,9]=\underline{\underline{[-16,-3]}}$

b)

$$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

$$og$$

$$4=\sqrt{16}$$

$$så$$

$$\underline{\underline{|\vec{a}|<4}}$$

Lengden er altså *ikke* større enn 4

c) $\vec{a}\cdot\vec{b}=[2,3]\cdot[-5,3]=2(-5)+3\cdot 3=-10+9=-1$

<u>Skalarproduktet er negativt, så vinkelen mellom vektorene er stump</u>

Oppgave 4

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - x - 30$$

a) Divisjonen går opp dersom $f(2) = 0$

$$f(2) = 2^3 + 6 \cdot 2^2 - 2 - 30 = 8 + 24 - 2 - 30 = 0$$

Divisjonen $f(x):(x-2)$ går opp. Som skulle vises

b)

$$\begin{aligned}
&\left(x^3 + 6x^2 - x - 30\right):\left(x-2\right) = x^2 + 8x + 15 \\
&\underline{x^3 - 2x^2} \\
&\qquad 8x^2 - x - 30 \\
&\qquad \underline{8x^2 - 16x} \\
&\qquad\qquad 15x - 30 \\
&\qquad\qquad \underline{15x - 30} \\
&\qquad\qquad\qquad 0
\end{aligned}$$

Faktoriserer andregradspolynomet som ble resultatet av polynomdivisjonen

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

gir

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-8 \pm 2}{2} = -4 \pm 1$$

så

$$x^2 + 8x + 15 = \left(x+3\right)\left(x+5\right)$$

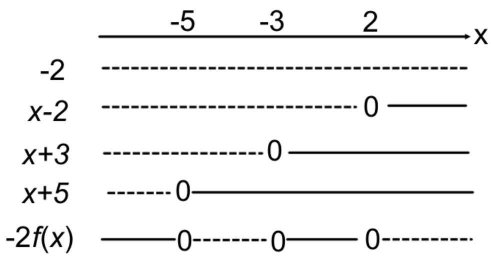
$$\underline{\underline{f(x) = \left(x-2\right)\left(x+3\right)\left(x+5\right)}}$$

c)

$$-2 \cdot f(x) \geq 0$$

$$-2\left(x-2\right)\left(x+3\right)\left(x+5\right) \geq 0$$

Tegner fortegnslinjer:



$$\underline{\underline{-2 \cdot f(x) \geq 0 \text{ når } x \in \left\langle \leftarrow, -5 \right] \cup \left[-3, 2 \right]}}$$

Oppgave 5

a) Total sannsynlighet

$$0,7\cdot 0,6+0,3\cdot 0,4=0,42+0,12=0,54=54\%$$

<u>Sannsynligheten for at første treet som selges er edelgran, er 54 %</u>

b) Bayes' setning

$$P(\text{Vinneren er kvinne})=\frac{0,3\cdot 0,4}{0,54}=\frac{0,12}{0,54}=\frac{12}{54}=\underline{\underline{\frac{2}{9}}}$$

Oppgave 6

Verdien av *a* må være *x*-koordinaten til et skjæringspunkt mellom grafene til de to uttrykkene i det delte funksjonsuttrykket.

$$2x^2-3x-2=x^2+x+3$$

$$2x^2-x^2-3x-x-2-3=0$$

$$x^2-4x-5=0$$

$$(x-5)(x+1)=0$$

$$så$$

$$x=5\vee x=-1$$

$$\underline{\underline{f \text{ blir en kontinuerlig funksjon når } a=-1\vee a=5}}$$

Oppgave 7

$$g(x)=x-2\ln\left(x^2+3\right)$$

a)

$$g'(x)=1-2\cdot\frac{1}{x^2+3}\cdot 2x=1-\frac{4x}{x^2+3}=\frac{x^2+3}{x^2+3}-\frac{4x}{x^2+3}=\frac{x^2-4x+3}{x^2+3}$$

<u>som skulle vises</u>

b)

$$g'(x)=0$$

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2+3}=0$$

$$x^2-4x+3=0$$

$$(x-1)(x-3)=0$$

$$gir$$

$$x=1\vee x=3$$

Siden jeg i neste deloppgave skal bestemme *x*-koordinaten til eventuelle vendepunkt på grafen til *g*, kan jeg like gjerne finne den andrederiverte med én gang og bruke andrederiverttesten til å avgjøre hvilken av løsningene som gir toppunkt og hvilken som gir bunnpunkt.

$$g''(x) = \frac{(2x-4)(x^2+3)-(x^2-4x+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{2x^3+6x-4x^2-12-2x^3+8x^2-6x}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{4x^2-12}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{4(x^2-3)}{(x^2+3)^2}$$

Da har vi

$$g''(1) = \frac{4(-2)}{4^2} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$$

og

$$g''(3) = \frac{4\cdot 6}{144} = \frac{24}{144} = \frac{1}{6}$$

x=1 er x-koordinaten til et toppunkt på grafen til g og x=3 er x-koordinaten til et bunnpunkt på grafen til g

c) Bruker uttrykket for den andrederiverte som jeg fant i forrige deloppgave.

$$g''(x) = 0$$

$$\frac{4(x^2-3)}{(x^2+3)^2} = 0$$

$$x^2-3=0$$

$$x^2=3$$

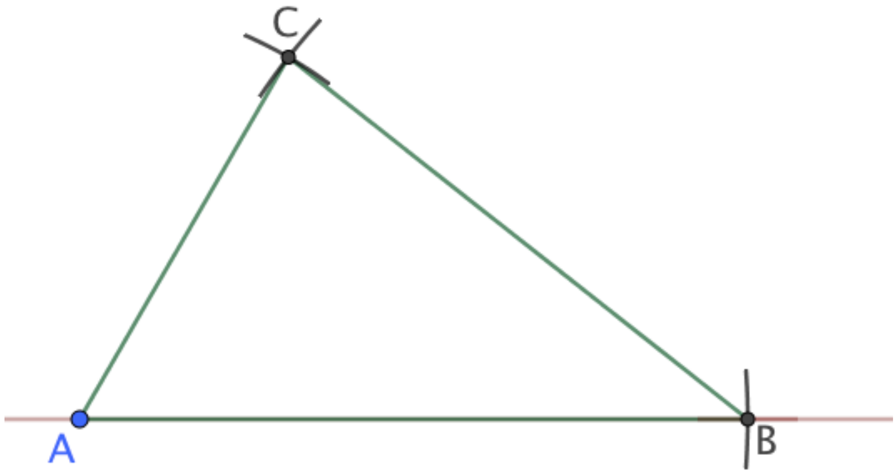
$$x=\pm\sqrt{3}$$

Nevneren i brøken over er positiv for alle x, mens telleren er negativ når $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ og positiv ellers. Det betyr at den andrederiverte skifter fortegn i nullpunktene.

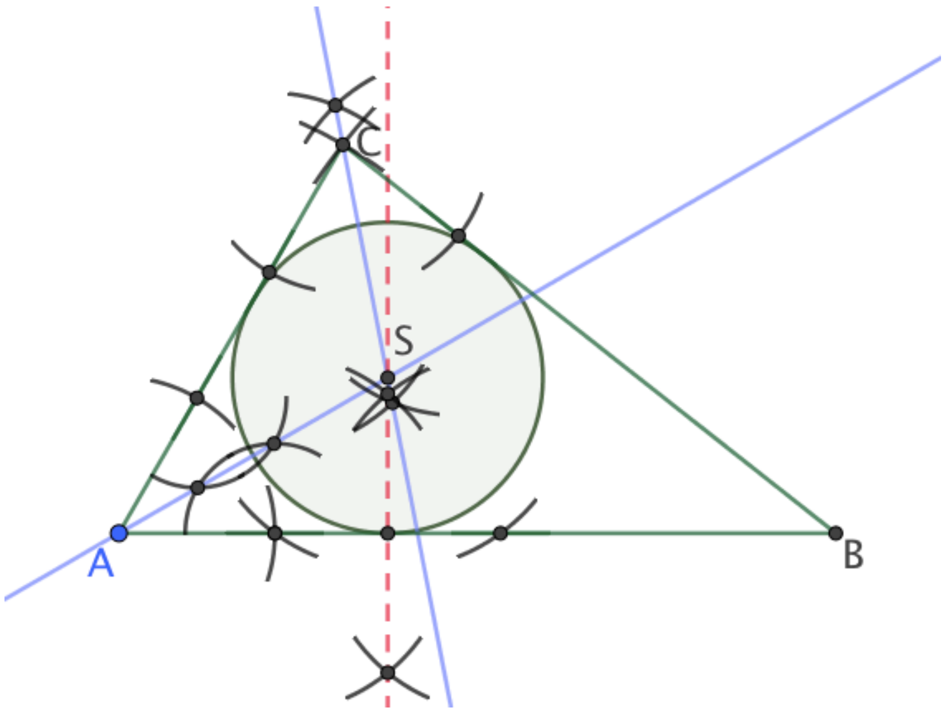
$x=-\sqrt{3}$ og $x=\sqrt{3}$ er x-koordinatene til vendepunktene på grafen til g

Oppgave 8

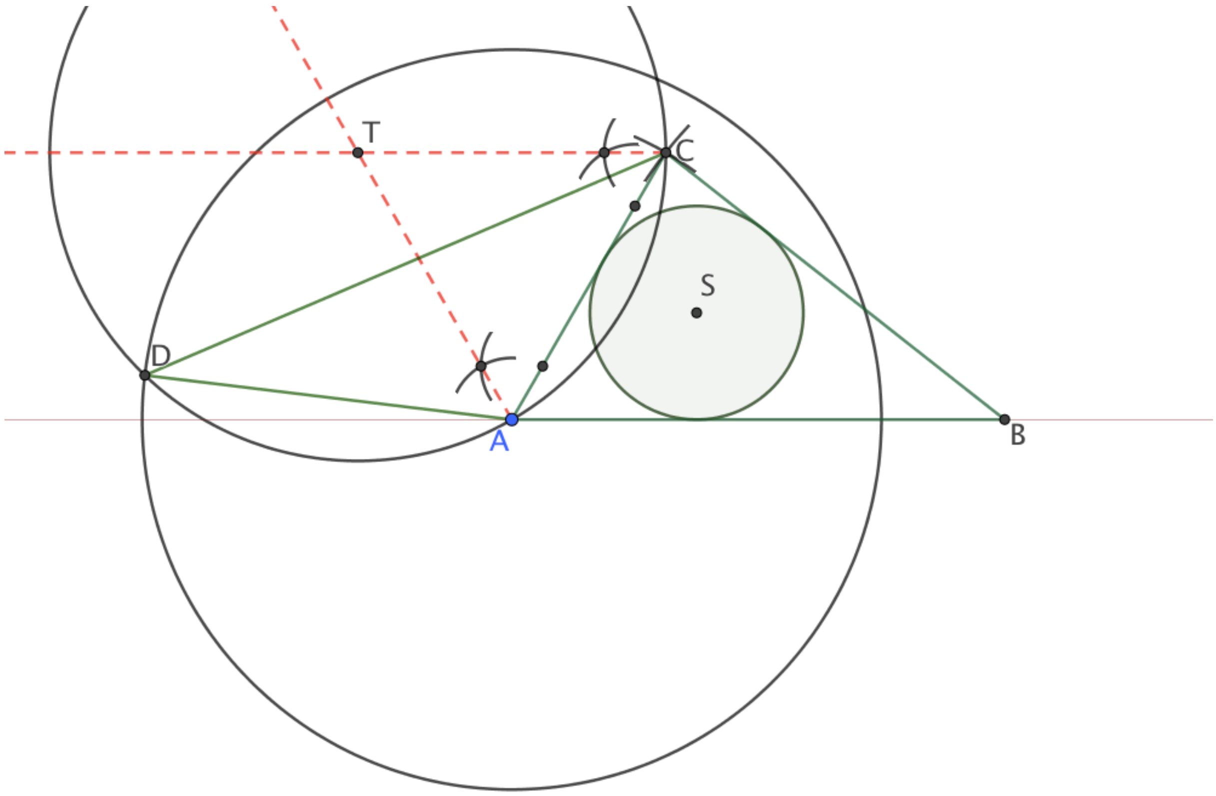
a)
- Tegner opp et vilkårlig linjestykke og merker av et punkt *A*.
- Avsetter avstanden 8 cm langs linjestykket og markerer punktet *B*
- Slår en sirkel om *A* med radius 5 cm og en sirkel om *B* mer radius 7cm
- Skjæringspunktet mellom disse sirklene, er punktet *C*
- Trekker opp linjestykkene *AB, AC* og *BC*
- Har nå konstruert trekant *ABC*



b) - Sentrum i den innskrevne sirkelen er skjæringspunktet mellom vinkelhalveringslinjene.
- Halverer vinkel *A* og vinkel *C*
- Trekker vinkelhalveringslinjene og kaller skjæringspunktet mellom dem for *S*
- Konstruerer en normal fra *S* ned på *AB*. Denne vil være radius i den innskrevne sirkelen
-Slår sirkelen om *S*
- Har nå konstruert den innskrevne sirkelen til trekant *ABC*



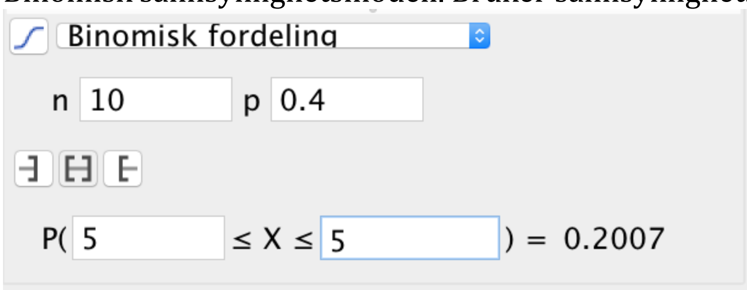
c) – Konstruerer vinkel på 60 grader i A og C og tegner den likesidede trekanten ACT
- Slår en sirkel om T med radius TA
- Slår en sirkel om A med radius 6
- Punktet D er det skjæringspunktet mellom disse to sirklene som ligger lengst fra punktet C. (vinkel ATC er en sentralvinkel på 60 grader, så da må periferivinkelen ADC som spenner over samme bue, være 30 grader)
- Trekker linjestykkene AD og DC
- Har konstruert firkanten $ABCD$



Del 2

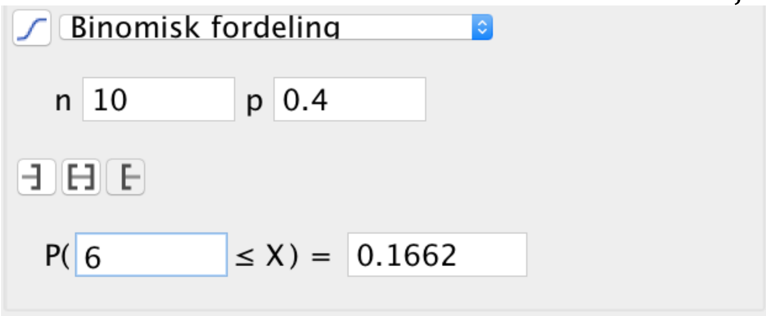
Oppgave 1

a) Binomisk sannsynlighetsmodell. Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.



<u>Sannsynligheten for at halvparten av plantene til Astrid får gule blomster er 20 %</u>

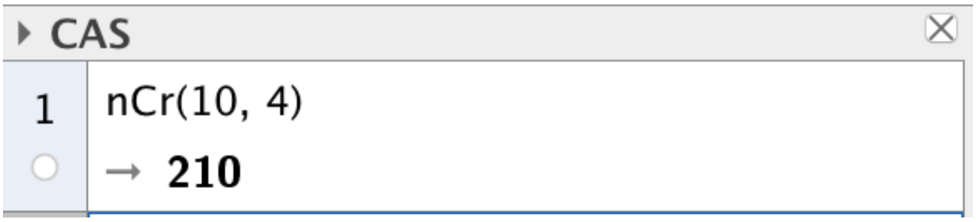
b) Mer enn fem er det samme som minst 6 i denne situasjonen



<u>Sannsynligheten for at mer enn fem av plantene får gule blomster er 16,6 %</u>

c) Stian har ti plasser tilgjengelig i blomsterkassen.
På hvor mange ulike måter kan han velge ut fire av disse plassene?

Vi har et uordnet utvalg uten tilbakelegging



<u>Stian kan plassere plantene med gule blomster på 210 forskjellige måter</u>

Oppgave 2

a) Siden $AB||AE$, vil CE danne like vinkler med disse linjestykkene. Vi vet også at toppvinkler er like store.
Da har vi $\angle DEA = \angle DCB$, <u>som skulle grunngis</u>

b) Har fra forrige deloppgave at $\angle DEA = \angle DCB$.
Vinkel ADE og vinkel BDC er toppvinkler, så vi har også at $\angle ADE = \angle BDC$.
Da er to samsvarende vinkler like store i de to trekantene og vi kan si at trekant AED og trekant BCD er formlike, <u>som skulle grunngis</u>.

c) Har vist at $\angle DEA = \angle DCB$.
Både $\angle DCB$ og $\angle DCA$ har størrelse α (de er altså like store).
Det betyr at $\angle DCA = \angle DEA$, og vi kan konkludere med at trekant AEC er likebeint. <u>Som skulle grunngis</u>.

d) Har vist at trekant AED og trekant BCD er formlike. Da er forholdet mellom samsvarende sider likt.

Vi kan altså si at $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{a}$.

Siden trekant AEC er likebeint, vet vi at AE har sidelengde b, slik at

$\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{b}{a}$, <u>som skulle forklares</u>

e)

$$\frac{AD}{DB}=\frac{b}{a}$$
$$AD=\frac{b}{a}\cdot DB$$
$$AD=\frac{b}{a}(c-AD)$$
$$AD=\frac{b\cdot c}{a}-\frac{b}{a}\cdot AD$$
$$AD+\frac{b}{a}\cdot AD=\frac{b\cdot c}{a}$$
$$\frac{a+b}{a}\cdot AD=\frac{b\cdot c}{a}$$
$$AD=\frac{b\cdot c}{a}\cdot\frac{a}{a+b}$$
$$AD=\frac{b\cdot c}{a+b}$$

Setter inn de oppgitte verdiene for *a*, *b* og *c*:

$$AD=\frac{7\cdot 10}{6+7}=\underline{\underline{\frac{70}{13}}}$$

Oppgave 3

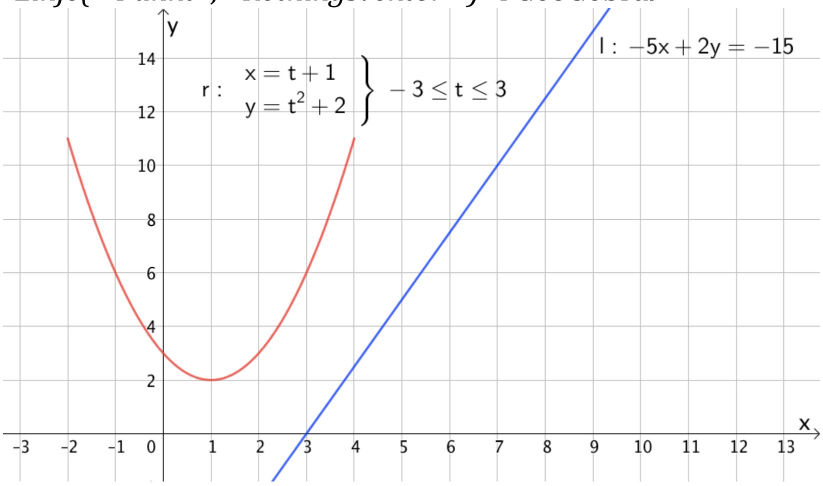
a) $\overrightarrow{AB}=[5-3,5-0]=[2,5]$ er en retningsvektor for linja.

Velger $A(3,0)$ som fast punkt og får da følgende parameterfremstilling:

$$\underline{\underline{\ell:\begin{cases}x=3+2t\\ y=5t\end{cases}}}$$

b) Bruker kommandoene

" Kurve(<Uttrykk>, <Uttrykk>, <Parametervariabel>, <Start>, <Slutt>)" og *"Linje(<Punkt>, <Retningsvektor>)"* i GeoGebra.



c) Fartsvektoren $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$ er retningsvektor for tangenten i punktet *P*.

Denne skal være parallell med linja *l* og dermed ha stigningstall $\dfrac{5}{2}$

$$\vec{v}(t) = [1, 2t]$$

$$så$$

$$2t = \frac{5}{2}$$

$$t = \frac{5}{4}$$

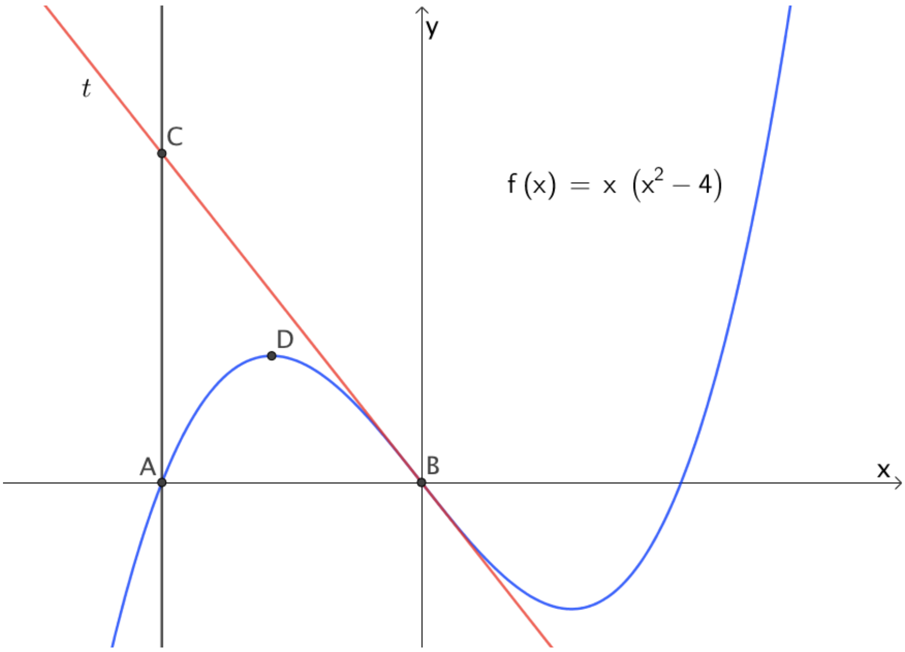
Da har vi informasjon nok til å bestemme koordinatene til punktet *P* og dermed også bestemme den eksakte verdien for den minste avstanden mellom linja *l* og grafen til $\vec{r}$.

CAS	
1	r(t):=Vektor(t+1,t^2+2) $\rightarrow\ \mathbf{r(t)} := \begin{pmatrix} t+1 \\ t^2+2 \end{pmatrix}$
2	l:=Linje((3,0), Vektor[(2,5)]) $\rightarrow\ \ell :\ y = \frac{5}{2}x - \frac{15}{2}$
3	v:=r(5 / 4) $\rightarrow\ \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{57}{16} \end{pmatrix}$
4	P:=(9/4,57/16) $\rightarrow\ P := \left(\frac{9}{4}, \frac{57}{16}\right)$
5	Avstand(P, l) $\rightarrow\ 3 \cdot \frac{\sqrt{29}}{8}$

Den eksakte verdien for avstanden er $\dfrac{3\sqrt{29}}{8}$

Oppgave 4

a) - Tegner grafen til f
- Tegner vendetangenten i punktet B ved hjelp av kommandoen *" Tangent(<Punkt>, <Funksjon>)"*
- Bruker knappen *"Nullpunkt"* og får markert punktene A og B
- Tegner linja $x = -2$
- Finner punktet C ved hjelp av *"Skjæring mellom to objekt"*
- Finner punktet D ved hjelp av knappen *"Ekstremalpunkt"*



b) Begge trekantene har grunnlinje AB som har lengde 2.
Regner ut arealene, og forholdet mellom dem, i CAS:

CAS

1	AB:=2 → **AB := 2**
2	A_1:=AB*y(C)/2 → $\mathbf{A_1 := 8}$
3	A_2:=AB*y(D)/2 → $\mathbf{A_2 := \frac{1969759}{639698}}$
4	A_1/A_2 → $\mathbf{\frac{5117584}{1969759}}$
5	5117584 / 1969759 ≈ **2.598**

Forholdet mellom arealet av trekant ABC og trekant ABD er oppgitt i linje 4 i bildet over. (Avrundet verdi i linje 5).

c)

CAS

1	g(x):=x*(x²−r²) → $g(x) := -r^2 x + x^3$
2	Nullpunkt(g) → $\{x = r, x = -r, x = 0\}$
3	E:=(−r,0) → $E := (-r, 0)$
4	F:=(0,0) → $F := (0, 0)$
5	EF:=abs(Vektor(E, F)) → $EF := \lvert r \rvert$
6	t(x):=Tangent(F, g) → $t(x) := -r^2 x$
7	G:=(−r,t(−r)) → $G := (-r, r^3)$
8	g'(x)=0 Løs: $\left\{x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \lvert r \rvert, x = \frac{\sqrt{3}}{3} \lvert r \rvert\right\}$
9	H:=(−sqrt(3)*r/3,g(−sqrt(3)*r/3)) → $H := \left(-r \frac{\sqrt{3}}{3}, 2\, r^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$
10	A_1:=EF*y(G)/2 → $A_1 := \frac{1}{2} r^3 \lvert r \rvert$
11	A_2:=EF*y(H)/2 → $A_2 := r^3 \lvert r \rvert \sqrt{3} \cdot \frac{1}{9}$
12	A_1/A_2 → $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

Bruker de første 9 radene til å definere de nødvendige punktene og størrelsene. I rad 10 og 11 regner vi ut arealene til de to trekantene. I rad 12 ser vi at forholdet mellom arealene er uavhengig av *r*. Som skulle vises