Løsningsforslag eksamen R2 høsten 2018

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x)=6\cos(2x-1)\Rightarrow f'(x)=6\cdot(-\sin(2x-1)\cdot 2)=\underline{\underline{-12\sin(2x-1)}}$

b) $g(x)=\cos^2 x+\sin^2 x=1\Rightarrow g'(x)=\underline{\underline{0}}$

Oppgave 2

a)

$$\int(2x^2-3x)dx=2\int x^2\,dx-3\int x\,dx=2\cdot\frac{1}{3}x^3+c_1-3\cdot\frac{1}{2}x^2+c_2=\underline{\underline{\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+C}}$$

b)

$$u=x^2+2 \text{ gir } \frac{du}{dx}=2x\Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$$

så

$$\int 4x\cdot\cos(x^2+2)dx=\int 4x\cdot\cos u\frac{du}{2x}=\int 2\cdot\cos u\,du=2\int\cos u\,du=2\cdot\sin u+C=\underline{\underline{2\sin(x^2+2)+C}}$$

c)

$$\frac{4}{x^2-4}=\frac{4}{(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}$$

$$\Downarrow$$

$$(x-2)A+(x+2)B=4$$

$$x=-2 \text{ gir } A=-1$$

og

$$x=2 \text{ gir } B=1$$

så

$$\int\frac{4}{x^2-4}dx=\int\frac{1}{x-2}dx-\int\frac{1}{x+2}dx=\ln|x-2|+c_1-\ln|x+2|+c_2=\underline{\underline{\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C}}$$

Oppgave 3

a) $k=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{e^{-x}}{1}=e^{-x}$

Må ha $-1<k<1$ for at rekka skal konvergere.

Verdien av e^{-x} går mot null når x går mot uendelig, og den går mot uendelig når x går mot minus uendelig. Det er altså kun en nedre grense for hvilke verdier x kan ha.

$e^{-x} = 1 \Rightarrow x = 0$

$\underline{\underline{\text{Rekka konvergerer når } x > 0}}$

b)

$$3 = \frac{a_1}{1-k}$$

$$3 = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

$$3\left(1-e^{-x}\right) = 1$$

$$3 - 3e^{-x} = 1$$

$$-3e^{-x} = -2$$

$$e^{-x} = \frac{2}{3}$$

$$-x = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

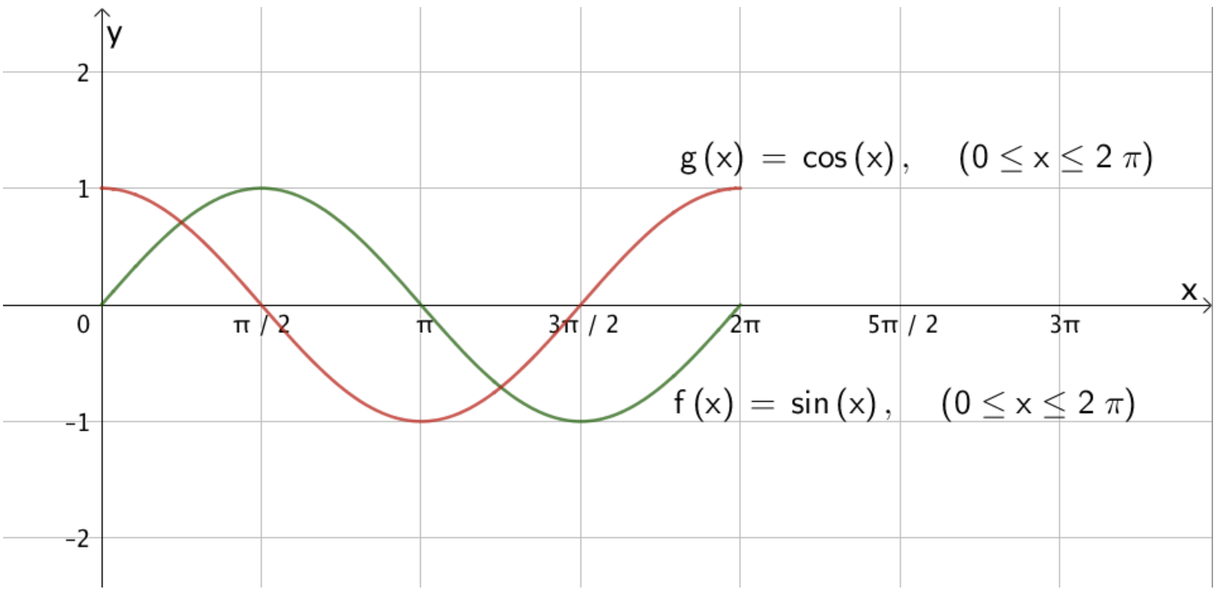
$$-x = \ln 2 - \ln 3$$

$$x = \ln 3 - \ln 2$$

$$\underline{\underline{x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

Oppgave 4

a)



b) Ut fra enhetssirkelen vet vi at $\sin(x)=\cos(x)$ når $x=\frac{\pi}{4} \vee x=\frac{5\pi}{4}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{og} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\underline{\underline{\text{Skjæringspunktene mellom grafene til } f \text{ og } g \text{ er } \left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ og } \left(\frac{5\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}$$

c)

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\sin x-\cos x\right)dx \\
&= \left[-\cos(x)-\sin(x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \\
&= \left(-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{2} \\
&= \underline{\underline{2\sqrt{2}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 5

a)

$$A=\frac{2,4}{2}=1,2$$

$$c=\frac{2\pi}{p}=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$$

$$\varphi=-c\cdot x_0=-\frac{\pi}{4}\cdot(-2)=\frac{\pi}{2}$$ (forskyvning ¼ periode mot venstre)

så

$$\underline{\underline{f(t)=1,2\sin\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{2}\right)}}$$

b)

$$f(t)=0,6$$
$$1,2\sin\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{2}\right)=0,6$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{0,6}{1,2}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

så

$$\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \vee \frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi$$
$$\frac{\pi}{4}t=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi \vee \frac{\pi}{4}t=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$$
$$\frac{\pi}{4}t=-\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi \vee \frac{\pi}{4}t=\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi$$
$$t=-\frac{4}{3}+8k \vee t=\frac{4}{3}+8k$$

$$t\in[0,10] \text{ gir } t=\frac{4}{3} \vee t=\frac{20}{3} \vee t=\frac{28}{3}$$

<u>Bøyen er 0,6 meter over likevektslinja etter omtrent 1,3s , 6,7s og 9,3s</u>

Oppgave 6

a) I alternativ 1 vil tangentene være parallelle med *x* aksen når $y=-x$
Vi ser helt klart at dette ikke stemmer med det gitte retningsdiagrammet.

I alternativ 2 vil tangentene bli mindre og mindre bratte dersom *y* øker, samtidig som *x* har en fast verdi.
Vi ser helt klart at dette ikke stemmer med det gitte retningsdiagrammet.

I alternativ 3 vil tangentene stige i 1. og 3.kvadrant, mens de vil synke i 2. og 4.kvadrant. (fortegnene til *x* og *y* er henholdsvis like og motsatte).
Dette stemmer med det gitte retningsdiagrammet

<u>Det er altså *ikke* alternativ 1 eller alternativ 2 som kan har retningsdiagram som vist i figuren, men alternativ 3 kan.</u>

b) Separabel differensiallikning

$$y' = x \cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y$$

$$\frac{1}{y}dy = xdx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int xdx$$

$$\ln|y| + c_1 = \frac{1}{2}x^2 + c_2$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + c_3$$

$$y = e^{\frac{1}{2}x^2 + c_3}$$

$$y = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{c_3}$$

$$\underline{\underline{y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}}}$$

Oppgave 7

a)

$$\overrightarrow{AB} = [1-(-1), -1-1, 0-1] = \underline{\underline{[2,-2,-1]}}$$

$$og$$

$$\overrightarrow{AC} = [-1-(-1), 0-1, 2-1] = \underline{\underline{[0,-1,1]}}$$

b) Setter inn koordinatene til punktene i likningen for planet.

A: $3\cdot(-1) + 2\cdot 1 + 2\cdot 1 - 1 = -3 + 2 + 2 - 1 = 0 \quad OK$

B: $3\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 2\cdot 0 - 1 = 3 - 2 + 0 - 1 = 0 \quad OK$

C: $3\cdot(-1) + 2\cdot 0 + 2\cdot 2 - 1 = -3 + 0 + 4 - 1 = 0 \quad OK$

Punktene A, B og C ligger i det gitte planet. Som skulle vises c)

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=[-2\cdot 1-(-1)(-1),-(2\cdot 1-(-1)\cdot 0),2(-1)-(-2)\cdot 0]=[-3,-2,-2]$$

$$og$$

$$\overrightarrow{AD}=[s^2-1-(-1),3s+1-1,10-1]=[s^2,3s,9]$$

$$så$$

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{6}\left|[-3,-2,-2]\cdot[s^2,3s,9]\right|\\&=\frac{1}{6}\left|-3s^2-6s-18\right|\\&=\frac{1}{6}\cdot\left|-3\right|\cdot\left|s^2+2s+6\right|\\&=\frac{1}{2}\left|s^2+2s+6\right|\end{aligned}$$

Når *s* er et reelt tall, vil s^2+2s+6 ha positiv verdi for alle *s*.

$$\underline{\underline{V(s)=\frac{1}{2}s^2+s+3}}$$

d) Grafen til *V* er en parabel som vender den hule siden opp (smilemunn), så eventuelle nullpunktet for den deriverte vil være *x*-koordinaten til et bunnpunkt på grafen til *V*.

$$V'(s)=s+1$$

$$så$$

$$V'(s)=0\Rightarrow s=-1$$

$$og$$

$$V(-1)=\frac{1}{2}(-1)^2+(-1)+3=\frac{1}{2}-1+3=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

$$\underline{\underline{\text{Det minste volumet tetraederet kan ha er }\frac{5}{2}}}$$

Oppgave 8

$$P(n)=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$\dfrac{1^2(1+1)^2}{4}=\dfrac{1\cdot 2^2}{4}=\dfrac{4}{4}=1$, så påstanden stemmer for n=1

Antar at påstanden stemmer for n=k, slik at $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$

Stemmer påstanden for $k+1$?

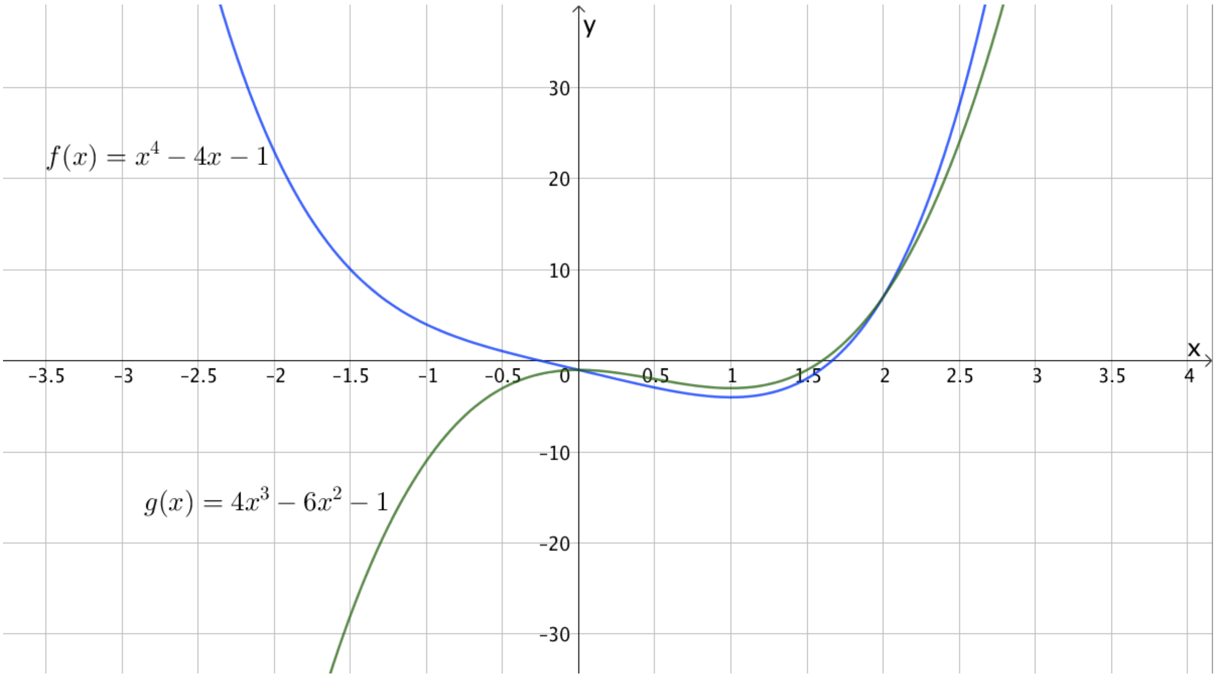
$$\begin{aligned}1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3&=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+\left(k+1\right)^3\\&=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}\\&=\frac{\left(k+1\right)^2\left(k^2+4\left(k+1\right)\right)}{4}\\&=\frac{\left(k+1\right)^2\left(k^2+4k+4\right)}{4}\\&=\frac{\left(k+1\right)^2\left(k+2\right)^2}{4}\\&=\frac{\left(k+1\right)^2\left(k+1+1\right)^2}{4}\end{aligned}$$

Har vist at $P(k+1)$ er sann, under forutsetning av at $P(k)$ er sann.
Fra induksjon har vi at $P(n)$ er sann, som skulle vises

Del 2

Oppgave 1

a)



b)

CAS

1	f(x) := x⁴ - 4x - 1 → $f(x) := x^4 - 4x - 1$
2	g(x) := 4x³ - 6x² - 1 → $g(x) := 4x^3 - 6x^2 - 1$
3	Skjæring(f, g) → $\{(0, -1), (2, 7)\}$
4	IntegralMellom(g, f, 0, 2) → $\frac{8}{5}$

$$\underline{\underline{\text{Området } M \text{ har areal } \frac{8}{5}}}$$

c)

CAS	
1	F(x):=x^4-4r^3*x-1 → $F(x) := -4r^3x + x^4 - 1$
2	G(x):=4r*x^3-6r^2*x^2-r^4 → $G(x) := 4rx^3 - 6r^2x^2 - r^4$
3	F=G Løs: $\{x = r - 1, x = r + 1\}$
4	IntegralMellom(G, F, r-1, r+1) → $\frac{8}{5}$

I rad 4 på bildet over, ser vi at arealet av N er uavhengig av r, <u>som skulle vises</u>

Oppgave 2

a) Likningen for kuleflaten K_1 er $\underline{\underline{(x-2t)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=2^2}}$

b) Avstanden fra sentrum i kula til yz-planet er gitt ved x-koordinaten til sentrum. Siden radius i kula er 2, vil kula tangere yz-planet når $\underline{\underline{t=-1 \vee t=1}}$

c) K_2 har sentrum i origo. De to kuleflatene K_1 og K_2 tangerer hverandre når avstanden mellom origo og sentrum i K_1 er 4

$$\left|[2t,1,3]\right|^2 = 4^2$$

$$(2t)^2+1^2+3^2=16$$

$$4t^2=16-1-9$$

$$t^2=\frac{6}{4}$$

$$t^2=\frac{3}{2}$$

$$t=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\underline{\underline{\text{Kuleflatene tangerer hverandre når } t=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}}}$$

d) Avstanden mellom origo og sentrum i K_1 er $r+2$ når radius i K_2 er r.

$$\left|[2t,1,3]\right|^2 = (r+2)^2$$

$$(2t)^2 + 1^2 + 3^2 = r^2 + 4r + 4$$

$$4t^2 = r^2 + 4r + 4 - 10$$

$$t^2 = \frac{r^2 + 4r - 6}{4}$$

$$t^2 = \frac{1}{4}r^2 + r - \frac{3}{2}$$

$$t = \pm\sqrt{\frac{1}{4}r^2 + r - \frac{3}{2}}$$

Må ha $\frac{1}{4}r^2 + r - \frac{3}{2} \geq 0$

CAS

1	(1/4)r²+r-(3/2)=0 Løs: $\left\{r = -\sqrt{10} - 2, r = \sqrt{10} - 2\right\}$

Velger den positive løsningen, siden det er snakk om en avstand.

<u>Den minste verdien r kan ha for at kulene skal tangere hverandre er $r = \sqrt{10} - 2$</u>

Oppgave 3

a) Får ei geometrisk rekke

CAS

1	20000*(0.85^10-1)/(0.85-1) ✓ $20000 \cdot \frac{0.85^{10} - 1}{0.85 - 1}$
2	20000(0.85^10 - 1) / (0.85 - 1) → $\frac{2741335366517}{25600000}$
3	2741335366517 / 25600000 ≈ 107083.41

<u>Bedriften vil slippe ut omtrent 107 000 tonn i løpet av de 10 årene</u>

b)

CAS

1	20000*(0.85^10−1)/(0.85−1) ✓ $20000 \cdot \frac{0.85^{10}-1}{0.85-1}$
2	20000(0.85^10 − 1) / (0.85 − 1) → $\frac{2741335366517}{25600000}$
3	2741335366517 / 25600000 ≈ 107083.41
4	30000(k^10 − 1) / (k − 1) = $2 Løs: $\{k = 0.73\}$

Den andre bedriften må redusere utslippene med 27 % per år

Oppgave 4

a) Tallet 3,2 forteller at det renner inn 3,2 liter vann per minutt i tanken.
Tallet 0,14 forteller at mengden vann som renner ut per minutt, utgjør 14 % av vannmengden som til enhver tid er i tanken.
Tallet 200 forteller at det er 200 liter vann i tanken ved starttidspunktet for den beskrevne situasjonen.

b)

CAS

1	LøsODE(y'=3.2−0.14y, (0,200)) → $y = \frac{1240}{7} e^{-7 \cdot \frac{x}{50}} + \frac{160}{7}$
2	-7/50 ≈ -0.14

$$y(t) = \frac{1240}{7} e^{-0{,}14t} + \frac{160}{7}$$

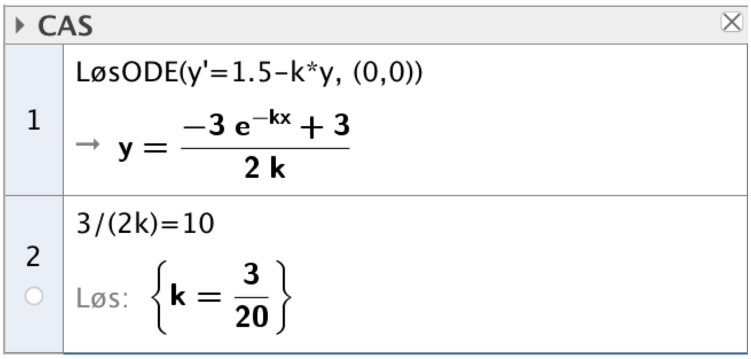
c)

CAS

1	(160/7)+(1240/7)* e ^(−0.14*20) ✓ $\frac{160}{7} + \frac{1240}{7} e^{-0.14 \cdot 20}$
2	$1 ≈ 33.63

Det er 33,6 liter vann i tanken etter 20 minutter

d) Vi kan sette opp følgende differensiallikning:
$y' = 1{,}5 - ky$, med initialbetingelsen $y(0) = 0$.



Leddet $-3e^{-kx}$ vil gå mot null når *x* går mot uendelig, og vi vet at vannmengden skal stabilisere seg på 10 liter.

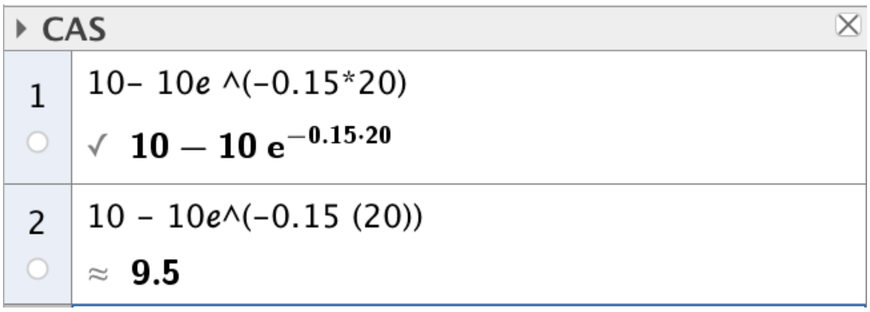
Da kan vi bestemme *k* ved å løse likningen $\dfrac{3}{2k} = 10$, som er gjort i linje 2 i bildet over.

$$k = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

Vannmengden i tanken etter *t* minutter er altså gitt ved

$$y(t) = \frac{-3e^{-0{,}15t} + 3}{0{,}3} = 10 - 10e^{-0{,}15t}$$

Regner ut $y(20)$:



<u>Det er 9,5 liter i tanken etter 20 minutter</u>