Løsningsforslag eksamen R2 våren 2018

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x)=\cos(\pi x-2) \Rightarrow f'(x)=-\sin(\pi x-2)\cdot \pi = \underline{\underline{-\pi \sin(\pi x-2)}}$

b) $g(x)=x\cdot \sin x \Rightarrow g'(x)=1\cdot \sin x + x\cdot \cos x = \underline{\underline{\sin x + x\cos x}}$

Oppgave 2

a) $\int (4x^2+3x)\,dx = \underline{\underline{\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+C}}$

b) $\int 4x^2\cdot \ln x\ dx = 4\int x^2 \cdot \ln x\ dx$

Delvis integrasjon med $u'=x^2$ og $v=\ln x$ gir:

$$
\begin{aligned}
4\int x^2\cdot \ln x\,dx &= 4\left(\frac{1}{3}x^3\cdot \ln x - \int \frac{1}{3}x^3\cdot \frac{1}{x}\ dx\right)\\
&= 4\left(\frac{1}{3}x^3\cdot \ln x - \int \frac{1}{3}x^2\ dx\right)\\
&= \underline{\underline{4\left(\frac{1}{3}x^3\cdot \ln x - \frac{1}{9}x^3\right)+C}}
\end{aligned}
$$

c)

$$\int_0^{\sqrt{12}} \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \left[\ln(x^2+4)\right]_0^{\sqrt{12}} = \ln\left(\left(\sqrt{12}\right)^2+4\right)-\ln(0^2+4)=\ln\left(\frac{16}{4}\right)=\underline{\underline{\ln 4}}$$

Oppgave 3

$d=\frac{a_5-a_2}{5-2}=\frac{13-4}{3}=\frac{9}{3}=3$, så $a_1=a_2-3=4-3=1$

$a_n=1+(n-1)\cdot 3 = 1+3n-3=3n-2$

Da har vi:

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{1+3n-2}{2}\cdot n=\frac{3n-1}{2}\cdot n=\underline{\underline{\frac{3n^2-n}{2}}}$$

Oppgave 4

a) $y'=(\sin x)\cdot y^2$ er en separabel differensiallikning

$$y'=(\sin x)\cdot y^2$$
$$\frac{dy}{dx}=(\sin x)\cdot y^2$$
$$\frac{1}{y^2}dy=\sin x dx$$
$$\int y^{-2}\,dy=\int \sin x\,dx$$
$$-y^{-1}+c_1=-\cos x+c_2$$
$$-\frac{1}{y}=-\cos x+c_2-c_1$$
$$y^{-1}=C+\cos x \quad |\cdot\frac{y}{C+\cos x}$$
$$y=\underline{\underline{\frac{1}{C+\cos x}}}$$

b) $y(\pi)=1$ gir:

$$\frac{1}{C+\cos(\pi)}=1$$
$$C+\cos(\pi)=1$$
$$C=1-\cos(\pi)$$
$$C=1-(-1)$$
$$C=2$$

Spesiell løsning: $y=\underline{\underline{\frac{1}{\cos x+2}}}$

Oppgave 5

a) f har nullpunktene $x=-1$ og $x=1$

$$A=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}1-x^2\,dx=\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=1-\frac{1}{3}-\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

b)

$$V = \pi \cdot \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 dx$$

$$= \pi \cdot \int_{-1}^{1} \left(1 - 2x^2 + x^4\right) dx$$

$$= \pi \cdot \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_{-1}^{1}$$

$$= \pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) \right)$$

$$= \pi \left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{30}{15} - \frac{20}{15} + \frac{6}{15} \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{16\pi}{15}}}$$

Oppgave 6

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1) \right) \quad , \quad x = \langle 1,9 \rangle$$

a) Bestemmer eventuelle toppunkter: $f(x) = 2$ når $\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1) \right) = 1$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1) \right) = 1$$

$$gir$$

$$\frac{\pi}{2}(x-1) = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2}x = \pi + n \cdot 2\pi \quad | \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$x = 2 + 4n$$

$x = \langle 1,9 \rangle$ gir $x = 2 \vee x = 6$

Bestemmer eventuelle bunnpunkter: $f(x) = -2$ når $\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = -1$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = -1$$

gir

$$\frac{\pi}{2}(x-1) = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad | \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$x - 1 = 4n - 1$$

$$x = 4n$$

$x = \langle 1,9 \rangle$ gir $x = 4 \vee x = 8$

<u>Grafen til *f* har toppunkter (2,2) og (6,2) og bunnpunkter (4, -2) og (8, -2)</u>

b) $f(x) = 0$ når $\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = 0$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = 0$$

gir

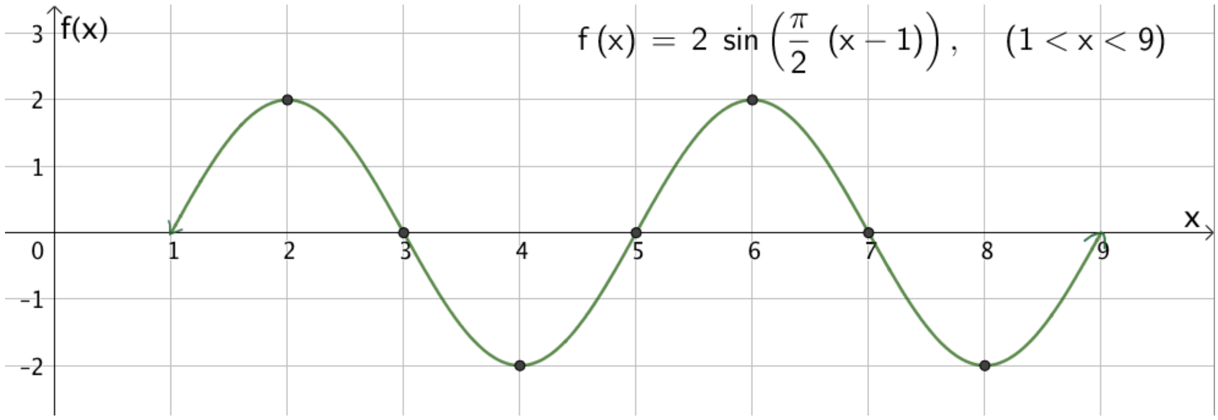
$$\frac{\pi}{2}(x-1) = n \cdot \pi$$

$$x - 1 = 2n$$

$$x = 2n + 1$$

$x = \langle 1,9 \rangle$ gir at *f* har nullpunktene $\underline{\underline{x = 3 \text{ , } x = 5 \text{ og } x = 7}}$

c) Markerer toppunkter, bunnpunkter og nullpunkter og skisserer grafen



d)

$$2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)=\sqrt{3}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$gir$$

$$\frac{\pi}{2}(x-1)=\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi \vee \frac{\pi}{2}(x-1)=\frac{2\pi}{3}+n\cdot 2\pi$$

$$x-1=\frac{2}{3}+4n \vee x-1=\frac{4}{3}+4n$$

$$x=\frac{5}{3}+4n \vee x=\frac{7}{3}+4n$$

Har $x=\langle 1,9\rangle$, så $\underline{\underline{x=\frac{5}{3}\vee x=\frac{7}{3}\vee x=\frac{17}{3}\vee x=\frac{19}{3}}}$

Oppgave 7

a)

$$x^2-6x+y^2+4y+z^2-8z-20=0$$

$$x^2-6x+9+y^2+4y+4+z^2-8z+16=20+9+4+16$$

$$(x-3)^3+(y+2)^2+(z-4)^2=49$$

$$(x-3)^3+(y+2)^2+(z-4)^2=7^2$$

<u>Sentrum i kula er *S*(3, -2, 4), som skulle vises, og radien til kuleflata er 7</u>

b)

$$q=\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\left|\frac{6\cdot 3-3\cdot(-2)+2\cdot 4-4}{\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}}\right|=\left|\frac{18+6+8-4}{\sqrt{36+9+4}}\right|=\frac{28}{\sqrt{49}}=\frac{28}{7}=4$$

<u>Avstanden fra sentrum *S* i kula til planet er 4</u>

c) Radius i kula er 7 og avstanden fra *S* til planet er 4.
Pythagoras´ setning gir da at radius i skjæringssirkelen mellom kuleflaten og planet er $\sqrt{7^2-4^2}=\sqrt{49-16}=\sqrt{33}$

Regner ut arealet av skjæringssirkelen: $A=\pi\cdot\left(\sqrt{33}\right)^2=\underline{\underline{33\pi}}$

Oppgave 8

$$S(x) = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \dots$$

a) $k = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{-2x}{1} = -2x$

Dersom rekka skal konvergere, må vi ha $-1 < k < 1$

$$\begin{array}{ccc} k > -1 & & k < 1 \\ gir & & gir \\ -2x > -1 & \text{og} & -2x < 1 \\ 2x < 1 & & 2x > -1 \\ x < \dfrac{1}{2} & & x > -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

$$\underline{\underline{\text{Konvergensområdet til rekka er } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}}}$$

b)

$$S(x) = a$$

$$gir$$

$$\frac{1}{1-(-2x)} = a$$

$$\frac{1}{1+2x} = a$$

Når $x \to -\dfrac{1}{2}^{+}$, vil $S(x) \to \infty$

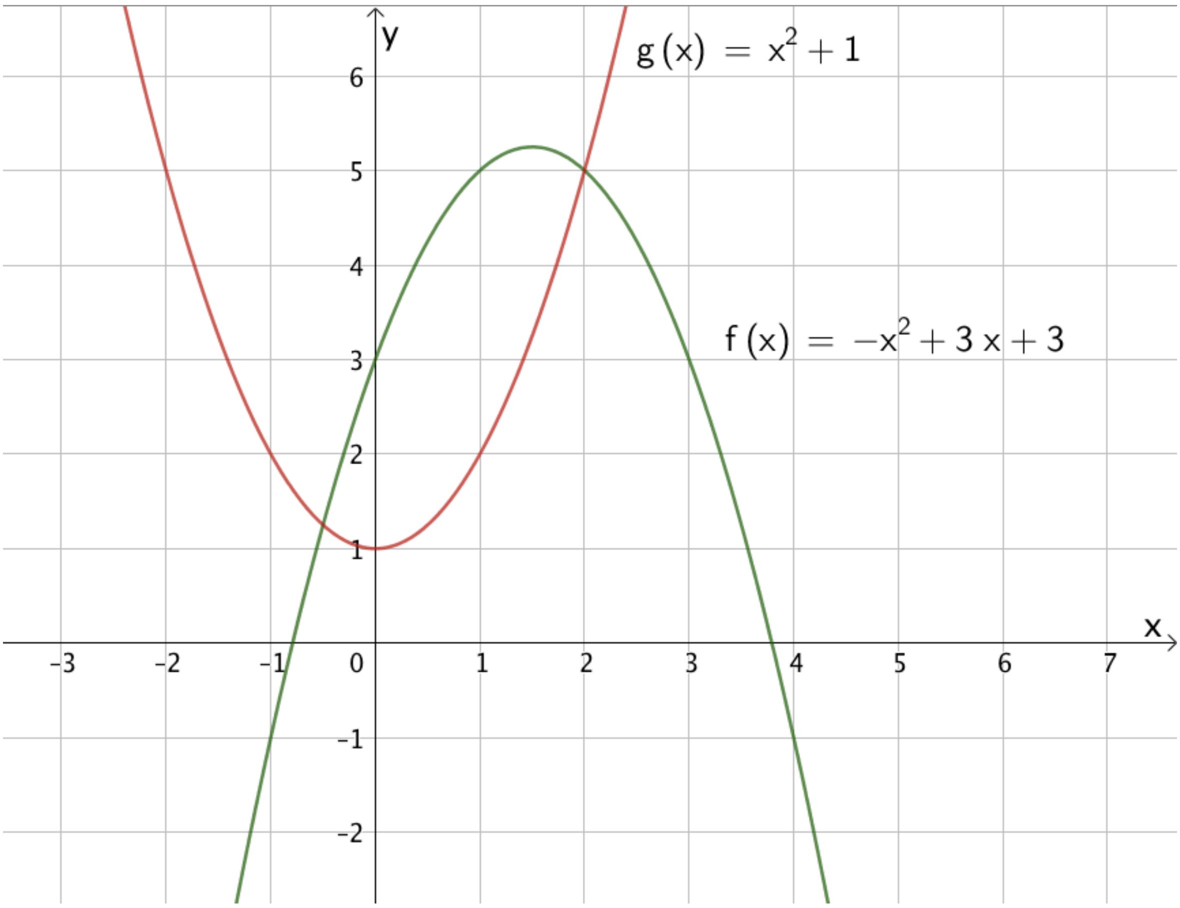
Når $x \to \dfrac{1}{2}^{-}$, vil $S(x) \to \dfrac{1}{2}$

$$\underline{\underline{\text{Likningen } S(x) = a \text{ har løsning for } a > \frac{1}{2}}}$$

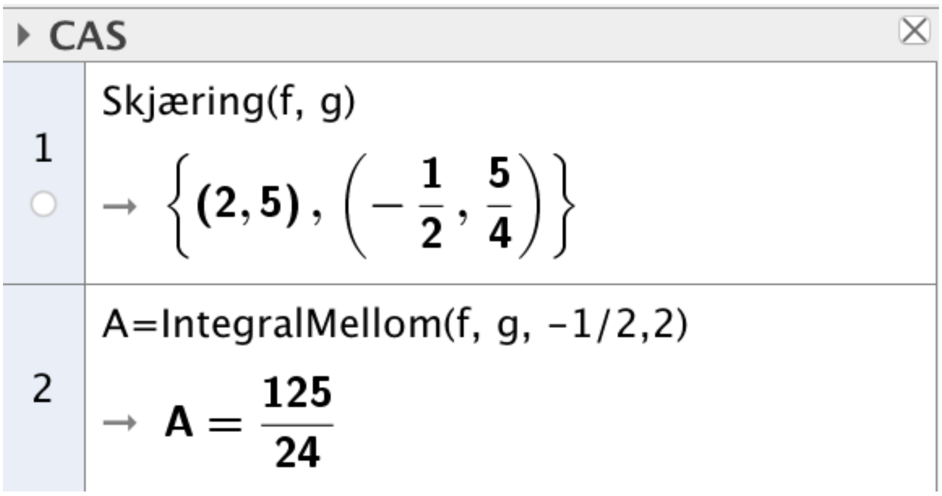
Del 2

Oppgave 1

a)



b)



Flatestykket avgrenset av grafene til f og g har areal $\frac{125}{24} \approx 5,2$

c)

CAS

1	Skjæring(f, g) $\rightarrow \left\{(2,5), \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)\right\}$
2	A:=IntegralMellom(f, g, −1/2, 2) $\rightarrow \mathbf{A} := \frac{125}{24}$
3	M:=Integral(x*(f−g), −1/2, 2) $\rightarrow \mathbf{M} := \frac{125}{32}$
4	N:=(1/2)*Integral((f²−g²), −1/2, 2) $\rightarrow \mathbf{N} := \frac{3125}{192}$
5	T=(M/A,N/A) $\rightarrow \mathbf{T} = \left(\frac{3}{4}, \frac{25}{8}\right)$

$$\underline{\underline{\text{Tyngdepunktet } T \text{ har koordinatene } \left(\frac{3}{4}, \frac{25}{8}\right)}}$$

Oppgave 2

a) $t = 2$ gir $\overrightarrow{AB} = [1,4,6]$ og $\overrightarrow{AC} = [0,4,3]$

$$\begin{aligned}
A_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2}\left|\left[4\cdot 3 - 6\cdot 4, -(1\cdot 3 - 6\cdot 0), 1\cdot 4 - 4\cdot 0\right]\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\left[-12,-3,4\right]\right| \\
&= \frac{\sqrt{(-12)^2 + (-3)^2 + 4^2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{144+9+16}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{169}}{2} \\
&= \underline{\underline{\frac{13}{2}}}
\end{aligned}$$

b)

CAS	
1	A:=(0,0,0) → $A := (0, 0, 0)$
2	B:=(1,t+2,3t) → $B := (1, t + 2, 3\,t)$
3	C:=(0,4,t+1) → $C := (0, 4, t + 1)$
4	D:=(t−3,8,1) → $D := (t - 3, 8, 1)$
5	Definerer arealet avhengig av t ved en funksjon F (Flateinnhold)
6	F(t):=(1/2)*abs(Vektor(A, B)⊗Vektor(A, C)) → $F(t) := \frac{1}{2}\sqrt{t^4 - 18\,t^3 + 86\,t^2 - 34\,t + 21}$
7	F=6 Løs: $\{t = -0.94, t = 1.8, t = 7.85, t = 9.29\}$

$$\underline{\underline{\text{Arealet av } \Delta ABC \text{ er 6 når } t = 1{,}80 \vee t = 7{,}85 \vee t = 9{,}29}}$$

c)

CAS	
1	A:=(0,0,0) → $A := (0, 0, 0)$
2	B:=(1,t+2,3t) → $B := (1, t + 2, 3\,t)$
3	C:=(0,4,t+1) → $C := (0, 4, t + 1)$
4	D:=(t−3,8,1) → $D := (t - 3, 8, 1)$
5	Definerer volumet avhengig av t ved en funksjon V
6	V(t):=(1/6)*abs((Vektor(A, B)⊗Vektor(A, C))*Vektor(A, D)) → $V(t) := \frac{1}{6}\left\|t^3 - 12\,t^2 + 21\,t - 10\right\|$
7	V'(t)=0 Løs: $\{t = 7\}$
8	V''(7) → -3

I linje 8 gjennomfører jeg andrederiverttest for å forsikre meg om at $\left(7, V(7)\right)$ er toppunkt.

$$\underline{\underline{t = 7 \text{ gir det største mulige volumet av pyramiden } ABCD}}$$

Oppgave 3

a) Når y er antallet smittede innbyggere, vil antallet innbyggere som ikke er smittet være $12000 - y$.

Når vekstfarten til antallet smittede er proporsjonal med antallet som fortsatt ikke er smittet, med proporsjonalitetskonstanten k, kan vi si at

$$\frac{y'}{12000 - y} = k \Rightarrow \underline{\underline{y' = k \cdot (12000 - y)}}$$

b)

CAS

1 LøsODE(y'=k*(12000-y), (0,100))

$\rightarrow \ y = -11900 \, e^{-kx} + 12000$

$y(t) = 12000 - 11900 \cdot e^{-kt}$, <u>som skulle vises</u>

c)

CAS

1 Løs(12000-11900* e ^(-10k)=4000)

$\rightarrow \left\{ k = -\frac{1}{10} \ln\left(\frac{80}{119}\right) \right\}$

2 {k = (-1) / 10 ln(80 / 119)}

$\approx \ \{k = 0.0397\}$

$$\underline{\underline{k = 0{,}0397}}$$

d)

CAS

1 Løs(12000-11900* e ^(-10k)=4000)

$\rightarrow \left\{ k = -\frac{1}{10} \ln\left(\frac{80}{119}\right) \right\}$

2 12000 - 11900e^(-HøyreSide($1) x) = 6000

Løs: $\left\{ x = \frac{10 \ln(119) - 5 \ln(16) - 10 \ln(5) - \ln(59049)}{\ln(119) - \ln(16) - \ln(5)} \right\}$

3 {x = (10ln(119) - 5ln(16) - 10ln(5) - ln(59049)) / (ln(119) - ln(16) - ln(5))}

$\approx \ \{x = 17.2446\}$

<u>Halvparten av innbyggerne er smittet etter i overkant av 17 uker</u>
(ca. 17 uker og 2 døgn)

Oppgave 4

$P_{n+1} = P_n + 3n + 1 \quad , \quad P_1 = 1$

a) Skal vise, ved induksjon, at $P_n = \dfrac{3n^2 - n}{2}$

Sjekker for $n = 1$:

$P_1 = \dfrac{3 \cdot 1^2 - 1}{2} = \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$, Stemmer for $n = 1$

Antar at formelen stemmer for $n = r$ og vil vise at den også gjelder for $n = r + 1$

$$
\begin{aligned}
P_{r+1} &= P_r + 3r + 1 \\
&= \frac{3r^2 - r}{2} + 3r + 1 \\
&= \frac{3r^2 - r + 6r + 2}{2} \\
&= \frac{3r^2 + 6r + 2 + 1 - 1 - r}{2} \\
&= \frac{3r^2 + 6r + 3 - (r+1)}{2} \\
&= \frac{3(r^2 + 2r + 1) - (r+1)}{2} \\
&= \frac{3(r+1)^2 - (r+1)}{2}
\end{aligned}
$$

Har vist ved induksjon at P_{r+1} er sann når P_r er sann.

$P_n = \dfrac{3n^2 - n}{2}$ er sann for alle $n \in \mathbb{N}$ <u>Q.E.D.</u>

b) T_n er en aritmetisk rekke med $a_1 = 1$, $d = 1$ og $a_n = n$

Summen av denne rekka er: $T_n = \dfrac{1+n}{2} \cdot n = \dfrac{n + n^2}{2} = \dfrac{n(1+n)}{2}$

Mathias sin oppdeling av P_5 viser at dette femkanttallet kan lages ved hjelp av trekanttall nummer 4 to ganger, pluss trekanttall nummer 5.

Vi har altså $P_5 = 2 \cdot T_4 + T_5$

Dette gir:

$$P_n = 2 \cdot T_{n-1} + T_n = 2\left(\frac{(n-1)(1+(n-1))}{2}\right) + \frac{n(1+n)}{2} = \frac{2n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{3n^2+3n}{2}$$

Har nå utledet formelen for P_n med utgangspunkt i ideen til Mathias