Eksamen R1 vår 2019 – Løsningsforslag

Del 1

Oppgave 1

a) $f'(x) = 3x^2 + 4x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $g'(x) = 2x \cdot \ln(2x-1) + x^2 \cdot \dfrac{1}{2x-1} \cdot 2$

$= 2x \cdot \ln(2x-1) + \dfrac{2x^2}{2x-1}$

$= 2x\left(\ln(2x-1) + \dfrac{x}{2x-1}\right)$

c) $u = 4x \qquad u' = 4$

$v = e^{2x} \qquad v' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$

$h'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \dfrac{4e^{2x} - 4x \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \dfrac{4\cancel{e^{2x}}(1-2x)}{\cancel{e^{2x}} \cdot e^{2x}}$

$= \dfrac{4-8x}{e^{2x}}$

Oppgave 2

a) $$\frac{1}{x^2-x}+\frac{1}{x^2+x}-\frac{1}{x^2-1}$$

$$=\frac{1\cdot(x+1)}{x(x-1)\cdot(x+1)}+\frac{1\cdot(x-1)}{x(x+1)\cdot(x-1)}-\frac{1\cdot x}{(x+1)(x-1)\cdot x}$$

$$=\frac{\cancel{x}+\cancel{1}+x-\cancel{1}-\cancel{x}}{x(x+1)(x-1)}=\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)(x-1)}=\underline{\underline{\frac{1}{x^2-1}}}$$

b) $$\frac{(\ln e^3+1)^2}{(e^{\ln 3}+1)^3}=\frac{(3+1)^2}{(3+1)^3}=\frac{1}{3+1}=\underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Oppgave 3

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$

a) Utfører divisjonen, $f(x) : (2x-1)$

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 - 3x^2 - 11x + 6) : (2x - 1) = \underline{\underline{x^2 - x - 6}} \\
-\underline{(2x^3 - x^2)} \\
\qquad -2x^2 - 11x + 6 \\
\qquad -\underline{(-2x^2 + x)} \\
\qquad\qquad -12x + 6 \\
\qquad\qquad -\underline{(-12x + 6)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Ser at divisjonen gikk opp.

(Kunne også brukt nullpunktsetningen:

Hvis $f(x)$ delelig med $(2x-1)$, er den

også delelig med $2(x-\frac{1}{2})$. Delelighet

med $(x-\frac{1}{2})$ gjelder hvis $f(\frac{1}{2}) = 0$:

$$f(\tfrac{1}{2}) = 2 \cdot (\tfrac{1}{2})^3 - 3 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 - 11 \cdot \tfrac{1}{2} + 6$$

$$= \frac{2}{8} - \frac{3}{4} - \frac{11}{2} + 6 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{22}{4} + \frac{24}{4} = \underline{\underline{0}}\,)$$

b) $f(x) = (2x-1)(x^2-x-6)$

$$= \underline{\underline{(2x-1)(x-3)(x+2)}}$$

c) $f(x) \geq (2x-1)(x+2)$

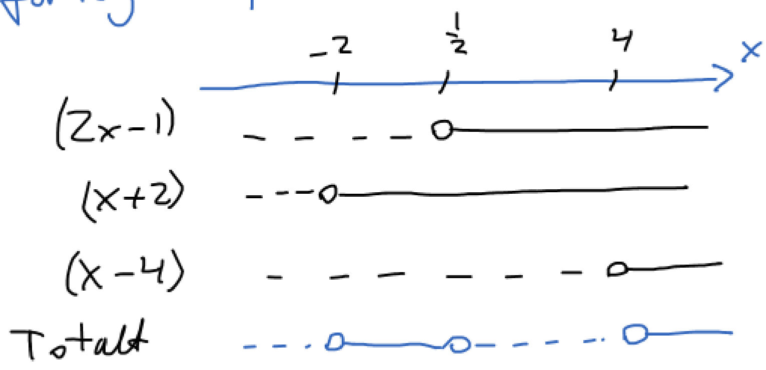
$$(2x-1)(x+2)(x-3) \geq (2x-1)(x+2)$$

$$(2x-1)(x+2)(x-3) - (2x-1)(x+2) \geq 0$$

$$(2x-1)(x+2)\big((x-3)-1\big) \geq 0$$

$$(2x-1)(x+2)(x-4) \geq 0$$

Løser med fortegnslinjer:



Løsning: $\underline{\underline{x \in [-2, \tfrac{1}{2}] \cup [4, \rightarrow\rangle}}$

Oppgave 4

$A(1, 3)$ og $B(5, -1)$

a) $\vec{AB} = \begin{bmatrix} 5-1 \\ -1-3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}}}$

$|\vec{AB}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = \underline{\underline{4\sqrt{2}}}$

b) En sirkel med AB som diameter har radius $r = 2\sqrt{2}$.

Sentrum $S(x_0, y_0)$ kan finnes ved at $\vec{AS} = \frac{1}{2}\vec{AB}$:

$$\vec{AS} = \begin{bmatrix} x_0 - 1 \\ y_0 - 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Gir $x_0 = 3$, $y_0 = 1$. Dermed blir sirkellikningen:

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

$$\underline{\underline{(x-3)^2 + (y-1)^2 = 8}}$$

c) Punkt C på $x=6$: $C\begin{pmatrix}6\\y\end{pmatrix}$

Om $\triangle ABC$ skal ha en rett vinkel i C,

må $\vec{AC} \perp \vec{BC} \iff \vec{AC}\cdot\vec{BC} = 0$.

Undersøker om likningen har en løsning:

$$\vec{AC} = \begin{bmatrix}6-1\\y-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\y-3\end{bmatrix} \qquad \vec{BC} = \begin{bmatrix}6-5\\y-(-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\y+1\end{bmatrix}$$

$$\vec{AC}\cdot\vec{BC} = 5\cdot 1 + (y-3)(y+1) = 5 + y^2 - 2y - 3$$
$$= y^2 - 2y + 2$$

$$\vec{AC}\cdot\vec{BC} = 0$$
$$y^2 - 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{2 \pm\sqrt{4-4\cdot 2}}{2}$$

Denne har ingen løsning siden det gir negativt tall under rottegnet.

Dermed kan vi ikke plassere punkt C slik at $\triangle ABC$ danner $90°$ i C.

(Kunne også undersøkt grafisk ved konstruksjon: Tales' setning sier at punkt C da måtte ligge på halvsirkelen over AB)

Oppgave 5

10 deltakere. 5 kvinner, 5 menn.

a) Antall måter å plukke ut 3 stk av 10 på:

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot \cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8}^{4}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = \underline{\underline{120}}$$

b) Flere kvinner enn menn: Enten 2 eller 3 kvinner.

Grupper med 2 kvinner: $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{5}{1} = \underline{50}$

Grupper med 3 kvinner: $\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{0} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 = \underline{10}$

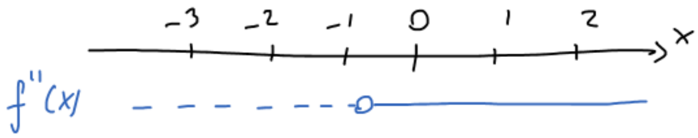
Altså 60 av gruppene (halvparten!) inneholder flere kvinner enn menn.

Oppgave 6

a) Graf A er f og graf B er f'.

Begrunnelse: Graf A har et bunnpunkt ved $x \approx 0,3$. Ser at graf B er 0 ved $x \approx 0,3$ og skifter fra negativ til positiv, noe som passer med at den er den deriverte av A.

b) Fortegnslinje til f'':



Oppgave 7

a) Begrunn at ΔAPC og ΔBPD er formlike:

1) $\angle APC = \angle BPD$ pga. de er toppvinkler

2) $\angle CAB = \angle CDB$ pga. de begge er periferivinkler over buen BC.

Men da er og

$\angle CAP = \angle PDB$ siden $\angle CAP = \angle CAB$
og $\angle PDB = \angle CDB$

3) Siden vi har vist at to av vinklene er parvis like store, er trekantene formlike. QED.

b) Vise at $AP \cdot PB = CP \cdot PD$:

Fra a) vet vi at trekantene er formlike,
dermed er forholdet mellom tilsvarende
par av sider konstant. Det gir (for $\Delta APC \sim \Delta DPB$):

$$\frac{AP}{CP} = \frac{DP}{BP} \quad \Big| \cdot CP \cdot BP$$

$$AP \cdot BP = DP \cdot CP$$

$$\underline{\underline{AP \cdot PB = CP \cdot PD}} \quad \text{QED}$$

Oppgave 8

a) $f'(2) = 0 \Leftarrow$ Grafen til f har toppunkt i $(2, f(2))$

Begrunnelse: $f'(2)$ er alltid lik 0 hvis toppunkt i $x=2$,
men $f'(2)$ kan være lik 0 uten at det er
et toppunkt.

b) $f'(3) = 0$ og $f''(3) > 0 \iff$ Grafen til f har bunnpunkt i $(3, f(3))$

Begrunnelse:

- I alle bunnpunkter er den deriverte 0 og dobbeltderiverte positiv.
- Hvis den deriverte er 0 og dobbeltderiverte er positiv, må det være et bunnpunkt.