$\boxed{R1}$ V19

(1)

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - \sqrt{x}$

$f'(x) = 3x^2 + 4x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $g(x) = x^2 \cdot \ln(2x-1)$

$g'(x) = 2x \cdot \ln(2x-1) + x^2 \cdot \frac{1}{2x-1} \cdot 2$

$g'(x) = 2x\ln(2x-1) + \frac{2x^2}{2x-1}$

c) $h(x) = \frac{4x}{e^{2x}}$ $\quad \begin{matrix} u \\ v \end{matrix}$

$h'(x) = \frac{\overset{u'}{4} \cdot \overset{v}{e^{2x}} - \overset{u}{4x} \cdot \overset{v'}{2e^{2x}}}{(e^{2x})^2}$

$= \frac{4e^{2x} - 8xe^{2x}}{(e^{2x})^2}$ Faktorisere

$= \frac{4e^{2x}(1-2x)}{(e^{2x})^2}$ Forkorte

$h'(x) = \frac{4(1-2x)}{e^{2x}}$

2 a) $\frac{1}{x^2-x} + \frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{x^2-1}$

$= \frac{1^{\cdot(x+1)}}{x(x-1)_{\cdot(x+1)}} + \frac{1^{\cdot(x-1)}}{x(x+1)_{\cdot(x-1)}} - \frac{1^{\cdot x}}{(x+1)(x-1)_{\cdot x}}$

$= \frac{x+1 + x-1 - x}{x(x+1)(x-1)}$

$= \frac{x}{x(x+1)(x-1)}$

$= \underline{\underline{\frac{1}{(x+1)(x-1)}}}$

Husk:

$\boxed{\ln e^3 = 3}$

$\boxed{e^{\ln 3} = 3}$

b) $\frac{(\ln e^3 + 1)^2}{(e^{\ln 3}+1)^3}$

$= \frac{(3+1)^2}{(3+1)^3}$

$= \frac{4^2}{4^3}$ Forkorter

$= \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

③ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$

a) Da mw $f(\frac{1}{2}) = 0$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 11 \cdot \frac{1}{2} + 6$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{4} - \frac{11}{2} + 6$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{22}{4} + \frac{24}{4}$$

$$= \frac{1 - 3 - 22 + 24}{4}$$

$$= \frac{0}{4}$$

$$= \underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{\text{ok!}}}$$

b) $(2x^3 - 3x^2 - 11x + 6) : (2x - 1) = x^2 - \cancel{x} - 6$

$$\begin{array}{l}
\underline{2x^3 - x^2} \\
\quad -2x^2 - 11x \\
\quad \underline{-2x^2 + x} \\
\qquad -12x + 6 \\
\qquad \underline{-12x + 6} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

dvs $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = (2x-1)(x^2 - x - 6)$

2gr.f gir $x = 3$ og $x = -2$

$$f(x) = (2x-1)(x-3)(x+2)$$

c) $(2x-1)(x-3)(x+2) \geq (2x-1)(x+2)$

$(2x-1)(x-3)(x+2) - (2x-1)(x+2) \geq 0$ Fakt

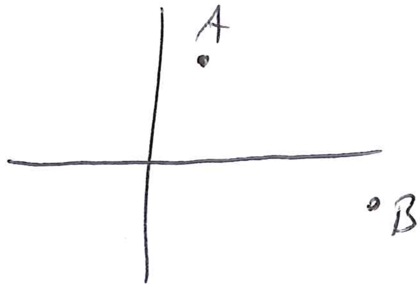
$(2x-1)(x+2)(x-3-1) \geq 0$

$(2x-1)(x+2)(x-4) \geq 0$

		-2	0	$\frac{1}{2}$		4	
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(2x-1)(x+2)(x-4)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Løsn $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$ og $x \geq 4$

4) $A(1,3) \quad B(5,-1)$



a) $\vec{AB} = [5-1, -1-3]$

$= \underline{\underline{[4, -4]}}$

$|\vec{AB}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{4\sqrt{2}}}$

b) Sentrum er midtpunktet på AB:

$\vec{OS} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$

$= [1,3] + \frac{1}{2}[4,-4]$

$= [1,3] + [2,-2]$

$\vec{OS} = [3,1]$

dvs $\underline{S(3,1)}$

$r = \frac{d}{2} = \frac{|\vec{AB}|}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = \underline{2\sqrt{2}}$

$(x-3)^2 + (y-1)^2 = (2\sqrt{2})^2$

$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}$

$\underline{\underline{(x-3)^2 + (y-1)^2 = 8}}$

c) C har koordinater $C(6, y)$ 

Vil at $\vec{AC} \perp \vec{BC}$. Da må $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0$

$\vec{AC} = [6-1, y-3] = \underline{[5, y-3]}$

$\vec{BC} = [6-5, y-(-1)] = [1, y+1]$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$$

$$[5, y-3] \cdot [1, y+1] = 0$$

$$5 + (y-3)(y+1) = 0$$

$$5 + y^2 + y - 3y - 3 = 0$$

$$y^2 - 2y + 2 = 0$$

2gr.form $y = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$$

$y = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$ ← umulig

Det er ikke mulig å plassere C slik at ΔABC får en rett vinkel i C

5 a) $\binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{120}{1} = \underline{120}$

120 ulike grupper

b) Grupper med bare kvinner: $\binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = \underline{10}$

\+ Grupper med 2K og 1M: $\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{1} = 10\cdot 5 = \underline{50}$

= Grupper med flere kvinner enn menn: 60

60 av gruppene inneholder flere kvinner enn menn

⑥ a) Ser at graf B har nullpunkt der graf A har bunnpunkt.

Altså er B f' mens A er f

b) Ser at f (graf A) er først "sur" og så "blid". Da er f'' først negativ og så positiv.

~~f' har tp/bp der f'' har~~

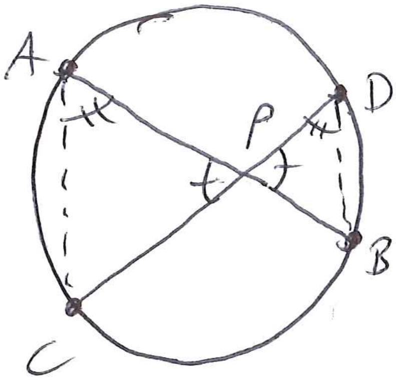
$f''(x)=0$ der $f'(x)$ har tp/bp

Det er når $\underline{x=-1}$ (Se graf B)

Altså, f har vendepunkt for $\underline{x=-1}$

		-1		0	
$f''(x)$	– – – –	0	——	——	——

7



a) $\angle APC = \angle BPD$ (toppvinkler)

$\angle A = \angle D$ fordi de begge er periferivinkler som spenner over samme bue (buen CB)

Har nå vist at de er formlike.

b) AP samsvarer med PD

CP samsvarer med PB

Altså

$$\frac{AP}{PD} = \frac{CP}{PB} \qquad \cdot PD$$

$$AP = \frac{CP}{PB} \cdot PD \qquad \cdot PB$$

$$\underline{\underline{AP \cdot PB = CP \cdot PD}}$$

8 a) $f'(2)=0 \Leftarrow$ Grafen til f har et toppunkt i $(2, f(2))$

Dersom f har et toppunkt i $(2, f(2))$ så må jo $f'(2)=0$, men dersom $f'(2)=0$ så må ikke grafen ha et toppunkt i $(2, f(2))$, det kan også være et bunnpunkt eller terrassepunkt

b) $f'(3)=0$ $f''(3)>0 \Leftrightarrow$ Grafen til f har et bunnpunkt i $(3, f(3))$

Dersom $f'(3)=0$ og $f''(3)>0$ vet vi at f har et bunnpkt i $(3, f(3))$

og dersom grafen har et bunnpkt i $(3, f(3))$ så må den deriverte i dette punktet være 0, og den dobbelderiverte må være positiv ("blid")

DEL 2

Oppgave 1

a)

1	Lengde(r'(0))
	$\approx$ **29.73**

Banefarten etter 0 sekund er 29,73 m/s

b)

Da må y-koord til r(t) være 0:

2	10t-5t^2=0
	Løs: $\{t = 0, t = 2\}$

Ballen treffer bakken etter 2 sekunder.

c)

Da må y-koord til fartsvektoren være 0:

3	r'(t)
	$\rightarrow$ $(-6\,t + 28, -10\,t + 10)$
4	-10t+10=0
	Løs: $\{t = 1\}$

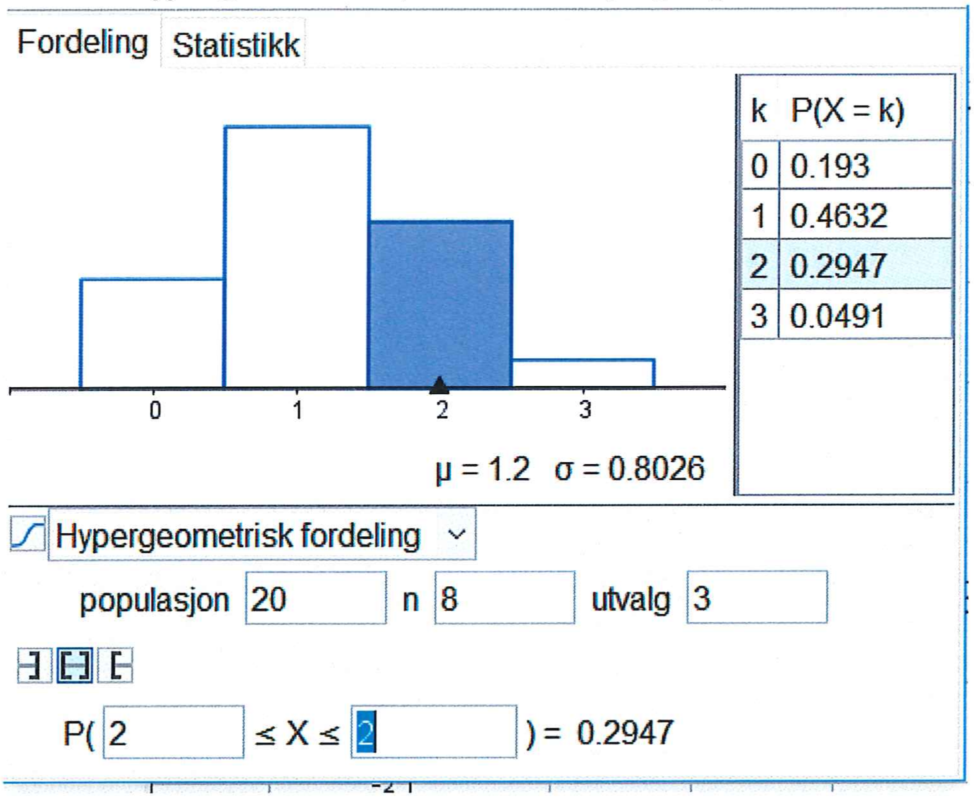
Ballen er på sitt høyeste etter 1 sekund. Finner banefarten da:

5	Lengde(r'(1))
	$\rightarrow$ **22**

Banefarten er da 22 m/s

Oppgave 2

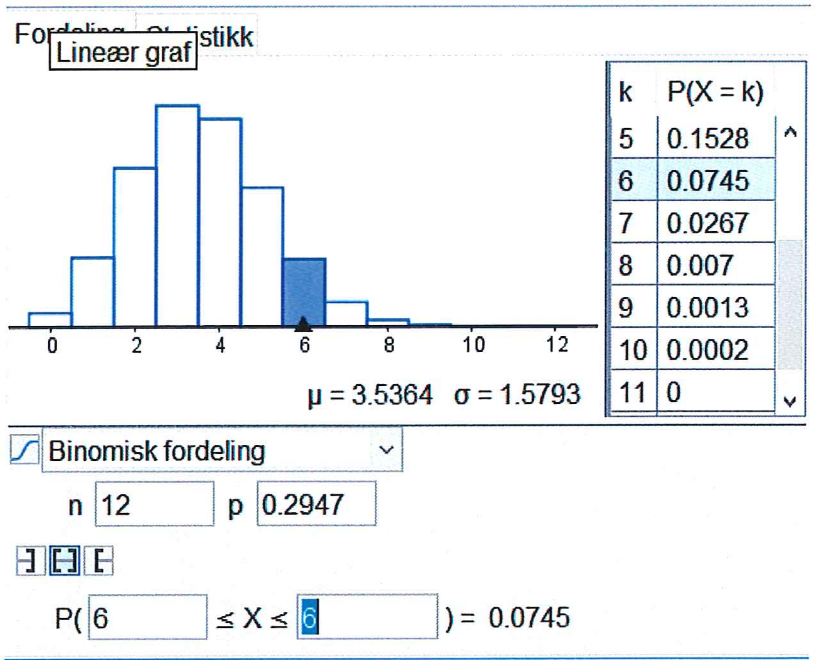
a) **Bruker hypergeometrisk på sannskalk på geogebra:**



Ser at sannsynligheten for 2 menn er 0,2947.

b)

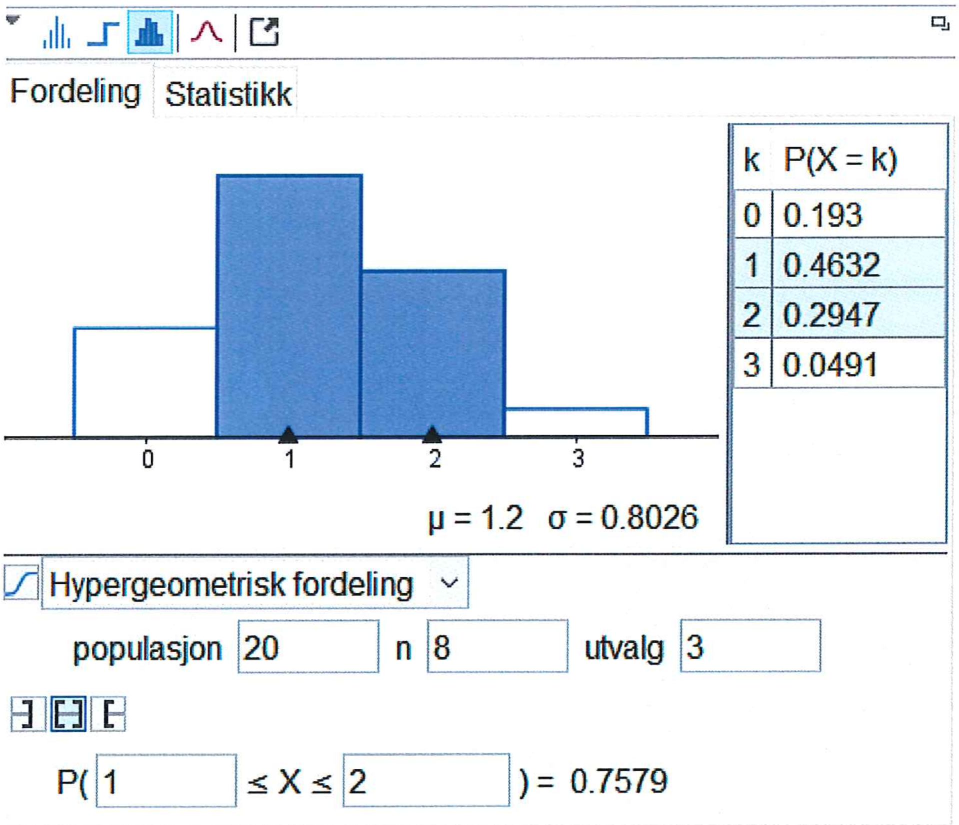
Dette er binomisk. Bruker sannskalk i geogebra:



Sanns for dette er 0,0745

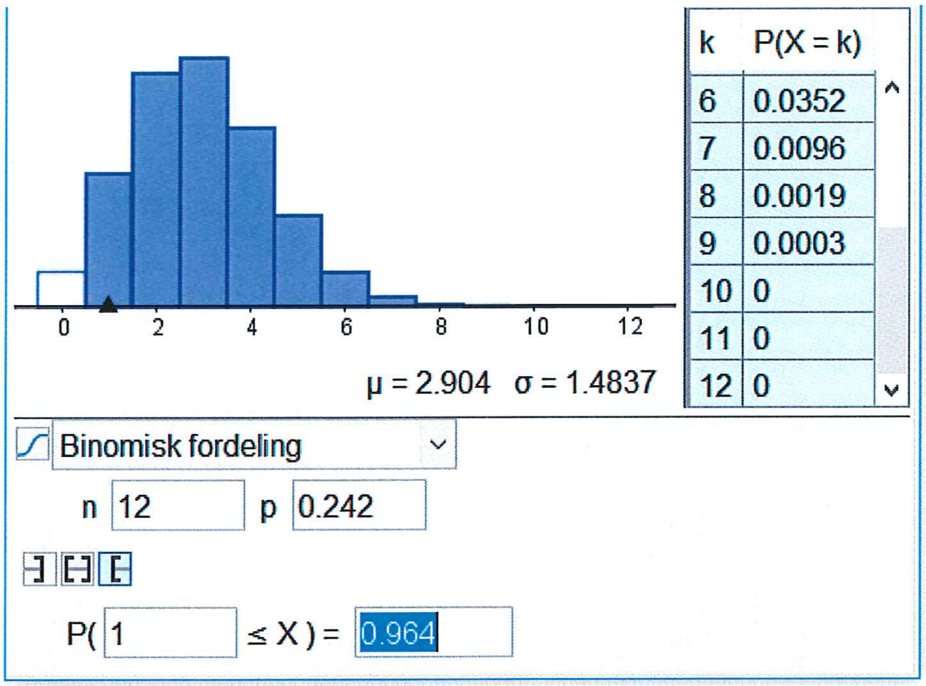
c)

Finner først sanns for at de har samme kjønn i ett lotteri:



Sanns for det er 0,193+0,0491=0,242

Finner så sanns for at dette skjer minst en gang i løpet av 12 lotteri:



Sanns for dette er 0,964.

Oppgave 3

a) Og b)

1	f(x):=x^3+4x^2+4x+2 → $f(x) := x^3 + 4x^2 + 4x + 2$
2	f'(x)=0 Løs: $\left\{x = -2, x = -\frac{2}{3}\right\}$
3	f''(-2) → -4
4	f(-2) → 2
5	f''(-2/3) → 4
6	f(-2/3) → $\frac{22}{27}$

I rad 1 definerer jeg funksjonen f(x)

I rad 2-6 viser jeg at (-2, 2) er et toppunkt til f, og at (-2/3 , 22/27) er et bunnpunkt til f.

7	f''(x)=0 Løs: $\left\{x = -\frac{4}{3}\right\}$
8	f(-4/3) → $\frac{38}{27}$

I rad 7-8 viser jeg at f har vendepunkt (-4/3, 38/27) (alle tredjegradsfunksjoner har et vendepunkt).

c)

9	g(x):=x^3+a*x^2+4x+2 → $g(x) := x^3 + a\,x^2 + 4\,x + 2$
10	g'(x)=0 Løs: $\left\{x = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 12}}{3}, x = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 12}}{3}\right\}$

I rad 9 definerer jeg g(x).

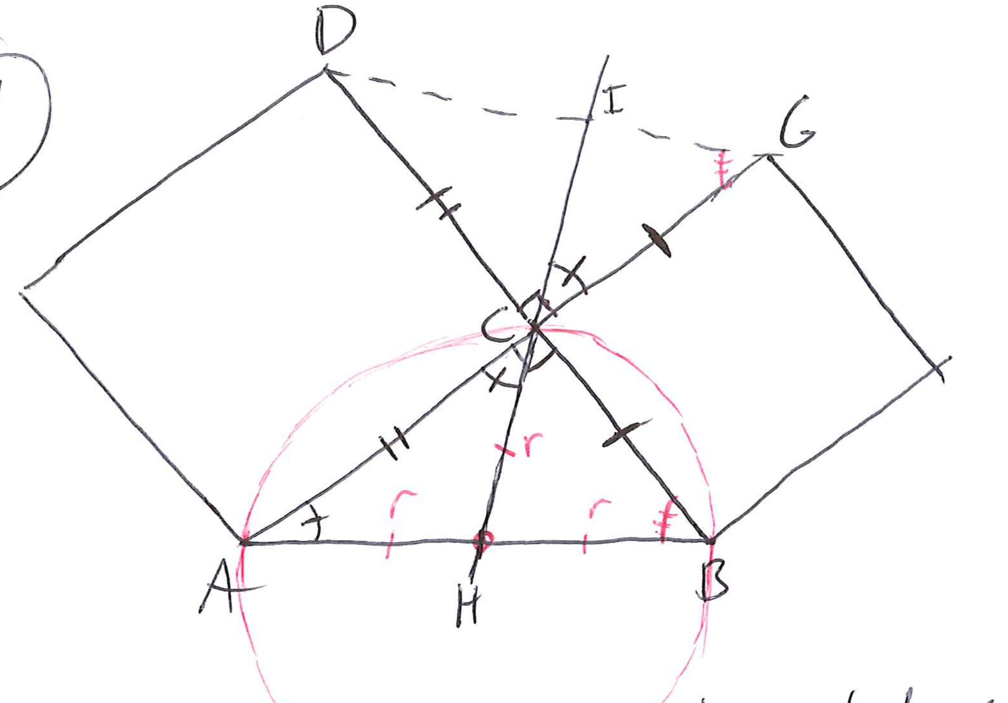
Rad 10 gir x-koord til eventuelle topp- og bunnpunkt. Skal jeg få to slike punkt, må det som er under rottegnet være positivt. Da må a^2 være større enn 12, dvs at $a > \sqrt{12} \quad eller \quad a < -\sqrt{12}$

d)

11	g''(x)=0 Løs: $\left\{x = -\frac{1}{3}\,a\right\}$
12	g(-1/3*a) → $\frac{2}{27}\,a^3 - \frac{4}{3}\,a + 2$
13	h(x):=-2x^3+4x+2 → $h(x) := -2\,x^3 + 4\,x + 2$
14	h(-1/3*a) → $\frac{2}{27}\,a^3 - \frac{4}{3}\,a + 2$

I rad 11-14 viser jeg at vendepunktet til g ligger på grafen til h for alle verdier av a.

4



a) Desom to sider i ~~to~~ rettvinklede trekante er parvis like store, så må den tredje siden også være parvis like stor pga Pytagoras setning.

~~Her er altså~~ Vet at $CG = CB$ og $CD = CA$, da må altså $DG = AB$, og dermed er trekantene kongruente.

b) Slå en sirkel med sentrum i H, og radius HA. Thales setning gir oss da at sirkelen vil gå gjennom både A, C og B.

Da vil $HA = HC$ (begge lik radien i sirkelen)

Dermed er ΔAHC likebeint

c) $\angle GCI = \angle ACH$ (toppvinkler). Fra b) vet vi da at $\angle GCI = \angle BAC$

Fra a) vet vi at $\angle ABC = \angle CGD$ (pga kongruens)

Vi vet at $\angle BAC + \angle ABC = 90^\circ$ $(180^\circ - \angle ACB)$

Da må $\angle GCI + \angle CGD$ også være 90°. Den siste vinkelen ($\angle CIG$) i ΔCGI må da være $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, altså $\angle CIG = 90^\circ$