Eksamen R1 vår 2019 – Løsningsforslag

Del 1

Oppgave 1

a) $f'(x) = 3x^2 + 4x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $g'(x) = 2x \cdot \ln(2x-1) + x^2 \cdot \dfrac{1}{2x-1} \cdot 2$

$= 2x \cdot \ln(2x-1) + \dfrac{2x^2}{2x-1}$

$= 2x\left(\ln(2x-1) + \dfrac{x}{2x-1}\right)$

c) $u = 4x \qquad u' = 4$

$v = e^{2x} \qquad v' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$

$h'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \dfrac{4e^{2x} - 4x \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \dfrac{4\cancel{e^{2x}}(1-2x)}{\cancel{e^{2x}} \cdot e^{2x}}$

$= \dfrac{4-8x}{e^{2x}}$

Oppgave 2

a) $$\frac{1}{x^2-x} + \frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{x^2-1}$$

$$= \frac{1 \cdot (x+1)}{x(x-1) \cdot (x+1)} + \frac{1 \cdot (x-1)}{x(x+1) \cdot (x-1)} - \frac{1 \cdot x}{(x+1)(x-1) \cdot x}$$

$$= \frac{\cancel{x} + \cancel{1} + x - \cancel{1} - \cancel{x}}{x(x+1)(x-1)} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)(x-1)} = \underline{\underline{\frac{1}{x^2-1}}}$$

b) $$\frac{(\ln e^3 + 1)^2}{(e^{\ln 3} + 1)^3} = \frac{(3+1)^2}{(3+1)^3} = \frac{1}{3+1} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Oppgave 3

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$

a) Utfører divisjonen, $f(x) : (2x-1)$

$$(2x^3 - 3x^2 - 11x + 6) : (2x - 1) = \underline{\underline{x^2 - x - 6}}$$

$$\begin{array}{l}
-\underline{(2x^3 - x^2)} \\
\quad -2x^2 - 11x + 6 \\
\quad -\underline{(-2x^2 + x)} \\
\qquad -12x + 6 \\
\qquad -\underline{(-12x + 6)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Ser at divisjonen gikk opp.

(Kunne også brukt nullpunktsetningen:

Hvis $f(x)$ delelig med $(2x-1)$, er den også delelig med $2(x-\frac{1}{2})$. Delelighet med $(x-\frac{1}{2})$ gjelder hvis $f(\frac{1}{2}) = 0$:

$$f(\tfrac{1}{2}) = 2\cdot(\tfrac{1}{2})^3 - 3\cdot(\tfrac{1}{2})^2 - 11\cdot\tfrac{1}{2} + 6$$

$$= \frac{2}{8} - \frac{3}{4} - \frac{11}{2} + 6 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{22}{4} + \frac{24}{4} = \underline{\underline{0}}\,)$$

b) $f(x) = (2x-1)(x^2 - x - 6)$

$$= \underline{\underline{(2x-1)(x-3)(x+2)}}$$

c) $f(x) \geq (2x-1)(x+2)$

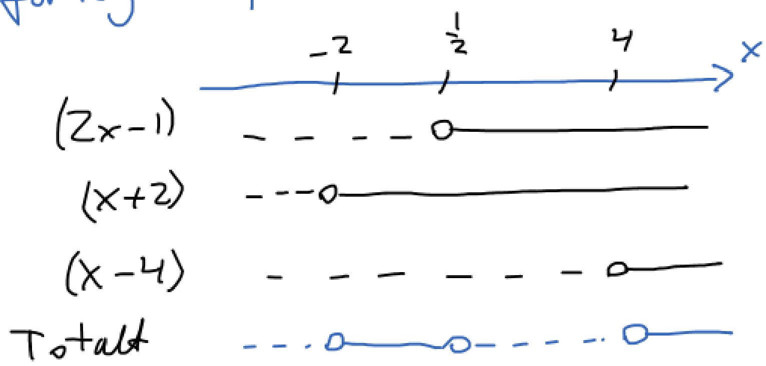
$$(2x-1)(x+2)(x-3) \geq (2x-1)(x+2)$$

$$(2x-1)(x+2)(x-3) - (2x-1)(x+2) \geq 0$$

$$(2x-1)(x+2)\big((x-3)-1\big) \geq 0$$

$$(2x-1)(x+2)(x-4) \geq 0$$

Løser med fortegnslinjer:



Løsning: $\underline{\underline{x \in [-2, \tfrac{1}{2}] \cup [4, \rightarrow\rangle}}$

Oppgave 4

$A(1, 3)$ og $B(5, -1)$

a) $\vec{AB} = \begin{bmatrix} 5-1 \\ -1-3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}}}$

$|\vec{AB}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = \underline{\underline{4\sqrt{2}}}$

b) En sirkel med AB som diameter har radius $r = 2\sqrt{2}$.

Sentrum $S(x_0, y_0)$ kan finnes ved at $\vec{AS} = \frac{1}{2}\vec{AB}$:

$$\vec{AS} = \begin{bmatrix} x_0 - 1 \\ y_0 - 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Gir $x_0 = 3$, $y_0 = 1$. Dermed blir sirkellikningen:

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

$$\underline{\underline{(x-3)^2 + (y-1)^2 = 8}}$$

c) Punkt C på $x=6$: $C\binom{6}{y}$

Om $\triangle ABC$ skal ha en rett vinkel i C,

må $\vec{AC} \perp \vec{BC} \iff \vec{AC}\cdot\vec{BC} = 0$.

Undersøker om likningen har en løsning:

$$\vec{AC} = \begin{bmatrix} 6-1 \\ y-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ y-3 \end{bmatrix} \qquad \vec{BC} = \begin{bmatrix} 6-5 \\ y-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ y+1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{AC}\cdot\vec{BC} = 5\cdot 1 + (y-3)(y+1) = 5 + y^2 - 2y - 3$$

$$= y^2 - 2y + 2$$

$$\vec{AC}\cdot\vec{BC} = 0$$

$$y^2 - 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 2}}{2}$$

Denne har ingen løsning siden det gir negativt tall under rottegnet.

Dermed kan vi ikke plassere punkt C slik at $\triangle ABC$ danner $90°$ i C.

(Kunne også undersøkt grafisk ved konstruksjon: Tales' setning sier at punkt C da måtte ligge på halvsirkelen over AB)

Oppgave 5

10 deltakere. 5 kvinner, 5 menn.

a) Antall måter å plukke ut 3 stk av 10 på:

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot \cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8}^{4}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = \underline{\underline{120}}$$

b) Flere kvinner enn menn: Enten 2 eller 3 kvinner.

Grupper med 2 kvinner: $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{5}{1} = \underline{50}$

Grupper med 3 kvinner: $\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{0} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 = \underline{10}$

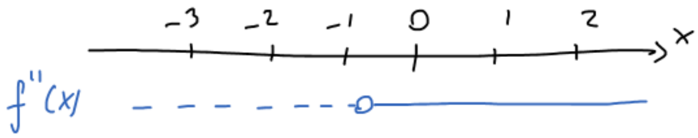
Altså 60 av gruppene (halvparten!) inneholder flere kvinner enn menn.

Oppgave 6

a) Graf A er f og graf B er f'.

Begrunnelse: Graf A har et bunnpunkt ved $x \approx 0,3$. Ser at graf B er 0 ved $x \approx 0,3$ og skifter fra negativ til positiv, noe som passer med at den er den deriverte av A.

b) Fortegnslinje til f'':



Oppgave 7

a) Begrunn at ΔAPC og ΔBPD er formlike:

1) $\angle APC = \angle BPD$ pga. de er toppvinkler

2) $\angle CAB = \angle CDB$ pga. de begge er periferivinkler over buen BC.

Men da er og

$\angle CAP = \angle PDB$ siden $\angle CAP = \angle CAB$ og $\angle PDB = \angle CDB$

3) Siden vi har vist at to av vinklene er parvis like store, er trekantene formlike. QED.

b) Vise at $AP \cdot PB = CP \cdot PD$:

Fra a) vet vi at trekantene er formlike,
dermed er forholdet mellom tilsvarende
par av sider konstant. Det gir (for $\Delta APC \sim \Delta DPB$):

$$\frac{AP}{CP} = \frac{DP}{BP} \quad \Big| \cdot CP \cdot BP$$

$$AP \cdot BP = DP \cdot CP$$

$$\underline{\underline{AP \cdot PB = CP \cdot PD}} \qquad \text{QED}$$

Oppgave 8

a) $f'(2) = 0 \Leftarrow$ Grafen til f har toppunkt i $(2, f(2))$

Begrunnelse: $f'(2)$ er alltid lik 0 hvis toppunkt i $x=2$,
men $f'(2)$ kan være lik 0 uten at det er
et toppunkt.

b) $f'(3) = 0$ og $f''(3) > 0 \implies$ Grafen til f har bunnpunkt i $(3, f(3))$

Begrunnelse:
- Hvis den deriverte er 0 og dobbeltderiverte er positiv, må det være et bunnpunkt

- Men: Det kan være et bunnpunkt selv om dobbeltderiverte ikke er positiv. F.eks. har funksjonen $f(x) = (x-3)^4$ et bunnpunkt i $(3, f(3))$ selv om $f''(3) = 0$.

Eksamen R1 vår 2019 – Løsningsforslag
Del 2

Oppgave 1

a) Løser i CAS:

1	r(t) := Vektor(28t - 3t^2, 10t - 5t^2) $\rightarrow\ r(t) := \begin{pmatrix} -3\,t^2 + 28\,t \\ -5\,t^2 + 10\,t \end{pmatrix}$
2	v(t) := r'(t) $\rightarrow\ v(t) := \begin{pmatrix} -6\,t + 28 \\ -10\,t + 10 \end{pmatrix}$
3	abs(v(0)) $\approx\ 29.732$

Banefarten er gitt ved absoluttverdien av fartsvektoren. Ballen blir sparket ved $t = 0$ sekunder, og vi ser at banefarten da var ca. $29{,}7\ \mathrm{m/s}$.

b) Ballen treffer bakken når y-koordinaten til posisjonsvektoren er 0:

4	10t - 5t^2 = 0 NLøs: $\{t = 0, t = 2\}$

Ser at den treffer bakken etter 2 sekunder.

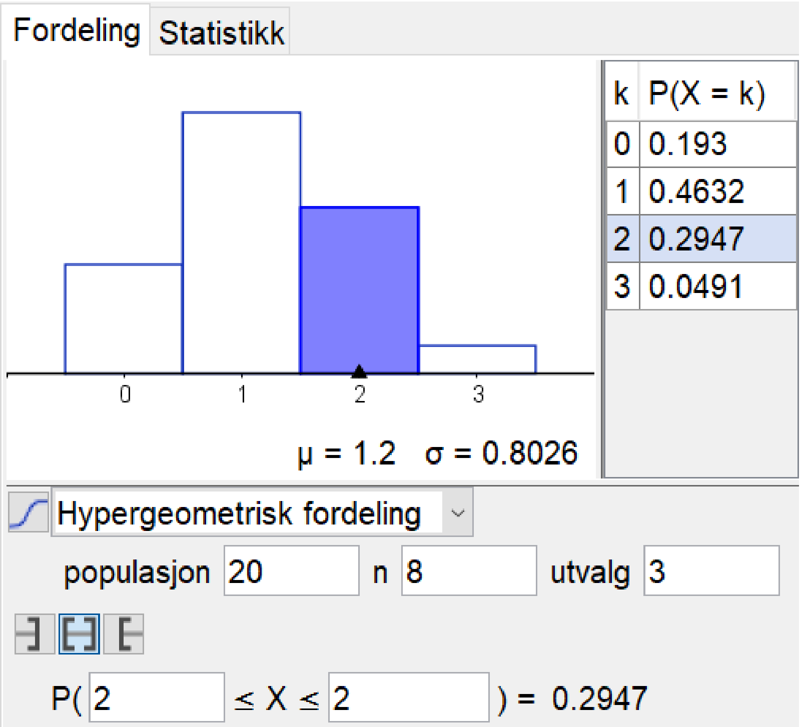
c) I sitt høyeste punkt i banen er y-koordinaten til fartsvektoren lik 0:

5	-10t + 10 = 0 Løs: $\{t = 1\}$
6	abs(v(1)) $\approx\ 22$

Ser at det høyeste punktet inntreffer etter 1 sekund, og at banefarten da var $22\ \mathrm{m/s}$.

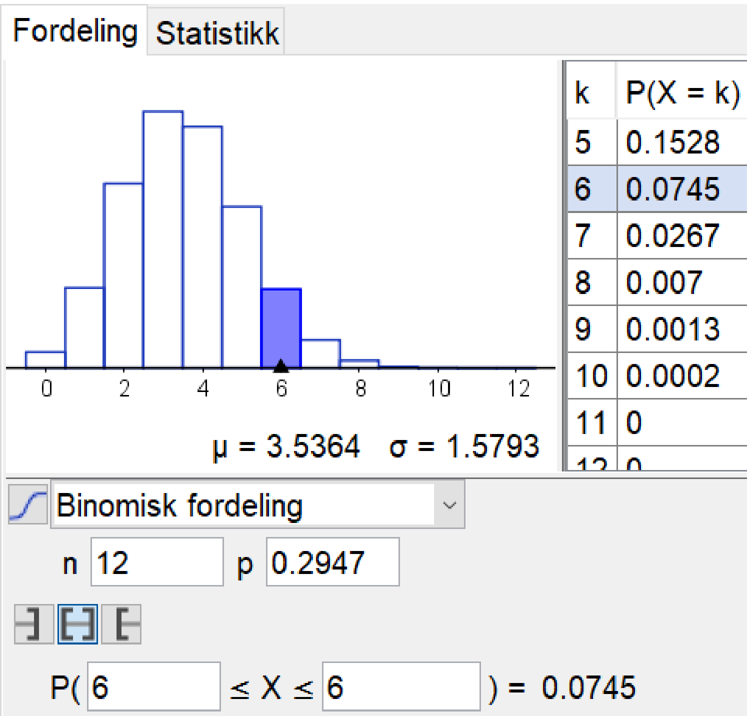
Oppgave 2

a) Kan se på dette som en hypergeometrisk sannsynlighet, med 12 kvinner og 8 menn som de to gruppene. Bruker Sannsynlighetskalkulator i GeoGebra:



<u>Ser at sannsynligheten for at nøyaktig 2 av de 3 som trekkes ut er menn, blir ca. 0,2947 (som var det vi skulle vise).</u>

b) Kan se på dette som et binomisk forsøk, der det i hvert forsøk (de 12 lotteriene) er lik sannsynlighet for «suksess» (at nøyaktig 2 menn trekkes ut). Denne sannsynligheten er det vi fant i a). Vi får da:



<u>Ser at sannsynligheten for at nøyaktig to av vinnerne er menn i 6 av de 12 lotteriene er ca. 0,0745.</u>

c) Kan her bruke

$$P(\text{tre vinnerne samme kjønn i minst ett av lotteriene}) = 1 - P(\text{tre samme kjønn i ingen av lotteriene})$$

Sannsynligheten i ett lotteri for at de tre har samme kjønn, er gitt ved $P(KKK) + P(MMM)$, som blir:

1	MMM := 8/20 * 7/19 * 6/18 ≈ **MMM := 0.049**
2	KKK := 12/20 * 11/19 * 10/18 ≈ **KKK := 0.193**
3	Samme := MMM + KKK ≈ **Samme := 0.242**

Sannsynligheten for at de tre *ikke* har samme kjønn i ett lotteri er da:

4	Ikkesamme := 1 - Samme ≈ **Ikkesamme := 0.758**

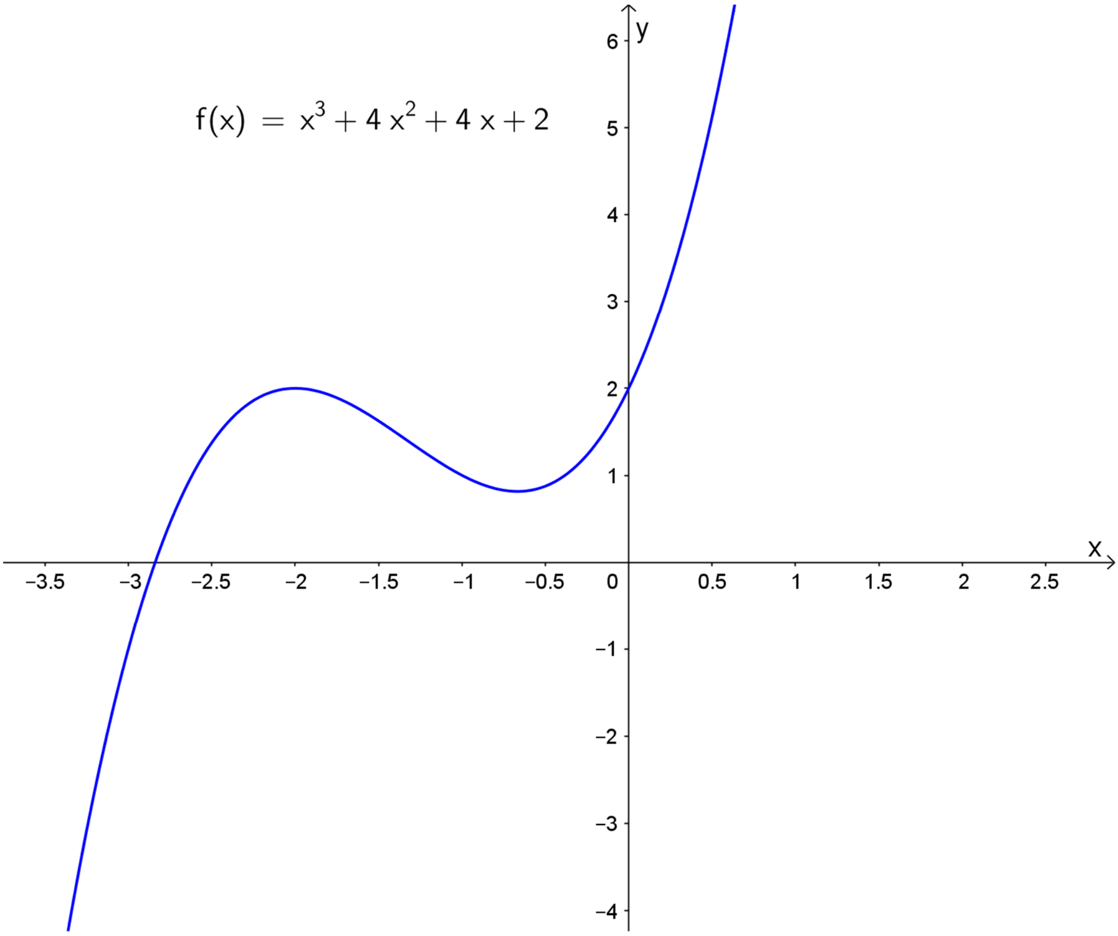
Totalt over 12 lotterier får vi:

5	1 - Ikkesamme^12 ≈ **0.964**

<u>Sannsynligheten er altså ca. 0,964 for at de tre vinnerne har samme kjønn i minst ett av de 12 lotteriene.</u>

Oppgave 3

a) Tegner i GeoGebra:



b) Løser i CAS:

1	Ekstremalpunkt(f) $\rightarrow \left\{(-2, 2), \left(-\frac{2}{3}, \frac{22}{27}\right)\right\}$
2	Vendepunkt(f) $\rightarrow \left\{\left(-\frac{4}{3}, \frac{38}{27}\right)\right\}$

Fra grafen ser vi at førstnevnte koordinat i linje 1 er toppunktet og det andre er bunnpunktet. Vendepunkter gitt i linje 2.

c) Grafen til g har toppunkter/bunnpunkter der $g'(x) = 0$ (og skifter fortegn). Skal den ha både et toppunkt og et bunnpunkt må likningen $g'(x) = 0$ gi to svar, der det ene vil være toppunktet og det andre bunnpunktet:

1	g(x) := x^3 + a x^2 + 4x + 2 $\rightarrow\ \mathbf{g(x) := x^3 + a\,x^2 + 4\,x + 2}$
2	g'(x) = 0 Løs: $\left\{x = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 12}}{3}, x = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 12}}{3}\right\}$
3	a^2 > 12 Løs: $\left\{-2\sqrt{3} > a, a > 2\sqrt{3}\right\}$

<u>Vi får to svar dersom uttrykket under rottegnet er positivt. Ser at vi da må ha $a < -2\sqrt{3}$ eller $a > 2\sqrt{3}$.</u>

d) Finner først x- og y-koordinatene til vendepunktet til g (linje 5 og 6). Skal det ligge på grafen til h må funksjonsverdien til h være det samme som funksjonsverdien til g for denne x-verdien (linje 7):

4	h(x) := -2x^3 + 4x + 2 $\rightarrow\ \mathbf{h(x) := -2\,x^3 + 4\,x + 2}$
5	g''(x) = 0 Løs: $\left\{x = -\frac{1}{3}\,a\right\}$
6	g(-1/3 a) $\rightarrow\ \frac{2}{27}\,a^3 - \frac{4}{3}\,a + 2$
7	h(-1/3 a) $\rightarrow\ \frac{2}{27}\,a^3 - \frac{4}{3}\,a + 2$

<u>Vi ser at funksjonsverdiene blir like, dermed vil alltid vendepunktet til g ligge på grafen til h.</u>

Oppgave 4

a) Trekantene er kongruente dersom de både er formlike og har samme størrelse:

1. $\angle ACB = \angle DCG$, siden de er toppvinkler.
2. Siden $ACDE$ er et kvadrat, er kateten AC lik kateten DC.
3. Siden $CBFG$ er et kvadrat, er kateten CB lik kateten CG.
4. Dermed er trekantene formlike, siden den ene vinkelen er lik og de to sidene som spenner ut fra denne vinkelen er nøyaktig like lange. Dermer de også like store, og er kongruente. **QED.**

b) Trekant AHC er likebeint hvis to av vinkelbeina er like lange:

1. Siden $\angle ACB = 90°$, har vi fra Tales' setning av denne vinkelen må ligge på halvsirkelen med AB som diameter.
2. Det betyr at AH er radius i denne halvsirkelen (siden H er midt på AB og dermed sentrum i halvsirkelen). Samtidig er da også HC radius i denne halvsirken.
3. Dermed er $AH = HC$, altså er vinkelbeina i trekant AHC like og trekanten er likebeint. **QED.**

c) Viser at $\angle CIG = 90°$ ved å vise at trekant CIG er formlik med trekant DCG som vi vet er rettvinklet:

1. $\angle ACH = \angle GCI$, siden de er toppvinkler.
2. $\angle ACH = \angle BAC$, siden trekant AHC er likebeint.
3. Dermed er $\angle GDC = \angle BAC$, siden trekant ACB er formlik med trekant DCG.
4. Dermed er $\angle GCI = \angle GDC$.
5. Nå vet vi at trekant CIG deler to vinkler med trekant DCG, siden de også deler vinkel G. Dermed er trekantene formlike, og siden vi vet at trekant DCG er vinkelrett (fra resultatet i a)), må også trekant CIG være vinkelrett. Ergo er $\angle CIG = 90°$. **QED.**

Denne oppgaven kan løses på mange ulike måter! Her er en annen metode (lik som forrige i de første stegene):

1. $\angle ACH = \angle GCI$, siden de er toppvinkler.
2. $\angle ACH = \angle BAC$, siden trekant AHC er likebeint.
3. $\angle GDC = \angle BAC$, siden trekant ACB er formlik med trekant DCG.
4. Dermed er $\angle GCI = \angle GDC$. Det betyr at vinkelbeina til disse vinklene må stå parvis vinkelrette på hverandre.
5. Dermed må venstre vinkelbein i $\angle GCI$, altså lengden CI, så vinkelrett på venstre vinkelbein i $\angle GDC$, altså lengden DG.
6. Dermed er $\angle CIG = 90°$. **QED.**