Eksamen R2 Våren 2019 - Løsning

Dennis Christensen

24. mai 2019

Del 1 - Uten hjelpemidler

Oppgave 1

(a)

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\sin(4x+1) + x \\ f'(x) &= 4 \cdot 3\cos(4x+1) + 1 = 12\cos(4x+1) + 1. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} g(x) &= 4\sin x \cos x \\ g'(x) &= 4\left(\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)\right) = 4\cos(2x). \end{aligned}$$

Oppgave 2

(a)

$$\int (x^4 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + C,$$

der $C \in \mathbb{R}$ er en integrasjonskonstant.

(b)

La $u = -x^2$, så $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = -2x$. Substitusjon gir at

$$\int 4xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -2\int e^u\,\mathrm{d}u = -2e^u + C = -2e^{-x^2} + C,$$

der $C \in \mathbb{R}$ er en integrasjonskonstant.

(c)

$$\int \frac{4}{x^2 - 2x - 3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4}{(x-3)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \ln|x-3| - \ln|x+1| + C,$$

der $C \in \mathbb{R}$ er en integrasjonskonstant.

Oppgave 3

(a)

Ettersom $157 = 1 + 4 \times 39$, er det 40 ledd i rekken. Formelen gir

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{40}{2}(1 + 157) = 20 \times 158 = 3160.$$

(b)

Ettersom både a_3 og a_6 er positive og $a_6 < a_3$, er har kvotienten k i rekken tilfredstiller $|k| < 1$, hvilket vil si at rekken konvergerer.

Vi vet at $a_6 = a_3 k^3$. Altså, $k^3 = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$. Dermed er $k = \frac{1}{3}$, så summen S av rekken blir

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{a_3 k^{-2}}{1-k} = \frac{9}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{27}{2}.$$

Oppgave 4

Vi merker oss at f har positivt nullpunkt for $x = a$ og konstantledd a^2, så

$$\begin{aligned}
\frac{\text{Areal}_{\text{fargelagt område}}}{\text{Areal}_{\text{rektangel}}} &= \frac{\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x}{a \cdot a^2} \\
&= \frac{1}{a^3}\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a^3}\left[a^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a \\
&= \frac{1}{a^3}\left(a^3 - \frac{1}{3}a^3\right) \\
&= \frac{1}{a^3}\cdot\frac{2}{3}a^3 \\
&= \frac{2}{3},
\end{aligned}$$

hvilket skulle vises.

Oppgave 5

(a)

Ettersom

$$\begin{aligned}
3 - 4\cdot 1 + 0 + 1 &= 0, \\
3 - 4\cdot 2 + 4 + 1 = 3 - 8 + 5 &= 0, \\
-1 - 4\cdot 1 + 4 + 1 = -5 + 5 &= 0,
\end{aligned}$$

ser vi at likningen for α er tilfredsstilt i alle tre punktene, så punktene ligger i planet.

(b)

Vektoren $[1, -4, 1]$ står normalt på α, så vi kan bruke denne som retningsvektor for linja l. Da får vi parameterfremstillingen

$$l : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = t \end{cases}.$$

(c)

Kuleflaten tangerer α i A. Altså står kulas radius normalt på α i punktet A, hvilket må bety at kulas sentrum S ligger på linja l. A priori tilfredsstiller alle punkter (x, y, z) på kula en likning på formen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2,$$

der $S = (x_0, y_0, z_0)$ er kulas sentrum og r er dens radius. Ettersom S ligger på l, vet vi at det finnes en $t \in \mathbb{R}$ slik at $(x_0, y_0, z_0) = (3 + t, 1 - 4t, t)$. Dermed ser vi også at kvadratet av kulas radius er gitt ved

$$r^2 = |\vec{SA}|^2 = (3 + t - 3)^2 + (1 - 4t - 1)^2 + t^2(1 + 16 + 1)t^2 = 18t^2,$$

så kulas likning er på formen

$$(x - 3 - t)^2 + (y - 1 + 4t)^2 + (z - t)^2 = 18t^2.$$

(d)

Om vi substituerer $P = (x, y, z)$ inn i likningen for kuleflaten får vi

$$\begin{aligned}(4-3-t)^2 + (1-1+4t)^2 + (1-t)^2 &= 18t^2\\ 16t^2 + 2(1-2t+t^2) &= 18t^2\\ 18t^2 - 4t + 2 &= 18t^2\\ 4t &= 2\\ t &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Om vi nå substituerer dette tilbake i likningen for kuleflaten får vi likningen

$$\begin{aligned}\left(x-3-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1+2)^2 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{18}{4}\\ \left(x-\frac{7}{2}\right)^2 + (y+1)^2 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{9}{2},\end{aligned}$$

hvilket gir at $S = \left(\frac{7}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$.

Oppgave 6

(a)

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= 1\\ 2x &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}\\ x &= \frac{\pi}{4} + \pi n.\end{aligned}$$

Vi ønsker løsningene i intervallet $[0, 2\pi]$, så n kan ta verdiene $n = 0, 1$ og vi ender med løsningene $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.

(b)

$$\begin{aligned}\sin(\pi x) + \sqrt{3}\cos(\pi x) &= 0\\ \frac{1}{2}\sin(\pi x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\pi x) &= 0\\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(\pi x) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(\pi x) &= 0\\ \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right) &= 0\\ \pi x + \frac{\pi}{3} &= \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}\\ x &= n - \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Vi ønsker løsningene i intervallet $[0, 2]$, så n kan ta verdiene $n = 1, 2$ og vi ender med løsningene $x = \frac{2}{3}, \frac{5}{3}$.

Oppgave 7

Ettersom det finnes punkter både i diagram B og C hvor $y' > 0$ for negativ x, ser vi umiddelbart at likning 3 korresponderer til diagram A.

Ettersom y' er tegnet opp langs x-aksen i diagram C, kan ikke dette diagrammet samsvare til likning 1, for i likning 1 er y' udefinert når $y = 0$.

Dermed korresponderer likning 1 til diagram B, likning 2 til diagram C og likning 3 til diagram A.

Oppgave 8

Basistilfelle: $n = 1$.

$$VS = 3 \cdot 4 = 12 = 1 \cdot 2 \cdot 6 = 1(1+1)(1+5) = HS \checkmark$$

Induksjon: Anta at påstanden gjelder for n. Da har vi at

$$\begin{aligned}
&3 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 9 \cdot 6 + \cdots + (3n)(n+3) + (3(n+1))((n+1)+3) \\
=&\underbrace{3 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 9 \cdot 6 + \cdots + (3n)(n+3)}_{=n(n+1)(n+5)} + (3n+3)(n+4) \\
=&n(n+1)(n+5) + 3(n+1)(n+4) \\
=&(n+1)\left(n^2 + 5n + 3n + 12\right) \\
=&(n+1)(n+2)(n+6) \\
=&(n+1)((n+1)+1)((n+1)+5),
\end{aligned}$$

så påstanden er bevist ved induksjon.

Oppgave 9

(a)

$$y' = -k\sqrt{y},$$

der $k > 0$ er en konstant.

(b)

Først løser vi differensiallikningen.

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{\sqrt{y}} &= -k \\
2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{y} &= -k \\
\sqrt{y} &= -\frac{k}{2}x + C \\
y &= \frac{k^2}{4}t^2 - kCt + C^2
\end{aligned}$$

der $C > 0$ er en integrasjonskonstant. Vi bruker dataen oppgitt:

$$\begin{aligned}
y(0) &= 100 \\
C^2 &= 100 \\
C &= 10.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(2)&81 \\
k^2 - 20k + 100 &= 81 \\
k^2 - 20k + 19 &= 0 \\
(k-19)(k-1) &= 0
\end{aligned}$$

Dersom $k = 19$ får vi at $y = \left(10 - \frac{19}{2}t\right)^2$. Denne funksjonen har et bunnpunkt for $t = \frac{20}{19} < 2$, og gir derfor ikke fysisk mening som en modell for de første to timene. Dermed velger vi $k = 1$. Dermed er modellen for vannhøyden y (i cm) målt etter t timer gitt ved

$$y(t) = \left(10 - \frac{1}{2}t\right)^2 = \frac{1}{4}t^2 - 10t + 100.$$

For å finne tidspunktet hvor tanken er tom, løser vi likningen $y(t) = 0$.

$$\begin{aligned} y(t) &= 0 \\ \left(10 - \frac{1}{2}t\right)^2 &= 0 \\ 10 - \frac{1}{2}t &= 0 \\ t &= 20. \end{aligned}$$

Tanken er altså tom etter 20 timer.