DEL 1

① a) $f'(x) = 12\cos(4x+1)+1$

b) $g'(x) = 4u'v + 4uv' = 4\cos^2 x - 4\sin^2 x$

---

② a) $\int (x^4 - x^2)dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + C$

b) $\int 4x e^{-x^2} dx = \int 4x\, e^u \frac{du}{-2x} = -2\int e^u du = -2e^{-x^2} + C$

c) $\int \frac{4}{x^2-2x-3} dx = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C$

---

③ a) $1 + 5 + 9 + \ldots + 157 = \frac{n(1+157)}{2} = \frac{40 \cdot 158}{2} = 3160$

$+4$

$1 + 4(n-1) = 157$

$4n = 160$

$n = 40$ ledd

b) $a_3 = 1 \quad a_6 = a_3 \cdot k^3 = k^3 = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

Rekka konvergerer siden $|k| < 1$

$S_\infty = a_1 \frac{k^\infty - 1}{k-1} = \frac{9}{1-\frac{1}{3}} = \frac{27}{3-1} = \frac{27}{2}$

(4)

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= a^2 \\ f(a) &= a^2 - a^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad A_{\square} = g \cdot h = a \cdot a^2 = \underline{a^3}$$

$$A_{Farge} = \int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)_0^a = a^3 - \frac{a^3}{3} = \underline{\frac{2a^3}{3}}$$

$$\underline{\frac{A_{Farge}}{A_{\square}} = \frac{\frac{2a^3}{3}}{a^3} = \frac{2}{3}} \quad ■$$

---

(5) a) $\vec{AB} = [0, 1, 4] \quad \vec{AC} = [-4, 0, 4]$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ 0 & 1 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = [4, -16, 4] = \underline{4\,[1, -4, 1]}$$

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

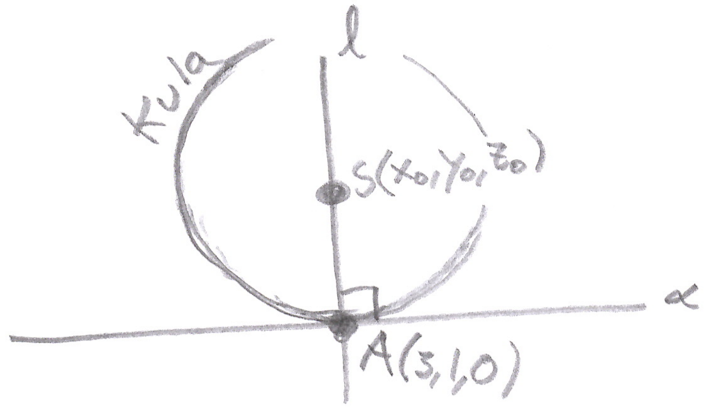
$$1 \cdot (x - 3) - 4 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z - 0) = 0$$

$$\underline{x - 4y + z + 1 = 0} \quad ■$$

b)

$$\underline{\underline{l: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = t \end{cases}}} \quad \leftarrow \text{Bruker } \vec{n} = [1, -4, 1] \text{ og } A.$$

c)



Sentrum til kula må ligge på normalen gjennom A, altså får vi

$$\boxed{\begin{aligned}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2&=r^2\\(x-3-t)^2+(y-1+4t)^2+(z-t)^2&=r^2\end{aligned}}$$

hvor

$$\boxed{\underline{r}=|\vec{SA}|=\sqrt{(\cancel{3-3}-t)^2+(\cancel{1-1+4t})^2+(0-t)^2}=\underline{\sqrt{18t^2}}}$$

altså

$$\underline{(x-3-t)^2+(y-1+4t)^2+(z-t)^2=18t^2}$$

d)

$$(4-3-t)^2+(1-1+4t)^2+(1-t)^2=18t^2$$

$$1-2t\cancel{+t^2}+\cancel{16t^2}+1-2t\cancel{+t^2}\cancel{=18t^2}$$

$$4t=2$$

$$t=\frac{1}{2}$$

$$S(3+t,\ 1-4t,\ t)=\underline{\underline{S\left(\frac{7}{2},\ -1,\ \frac{1}{2}\right)}}$$

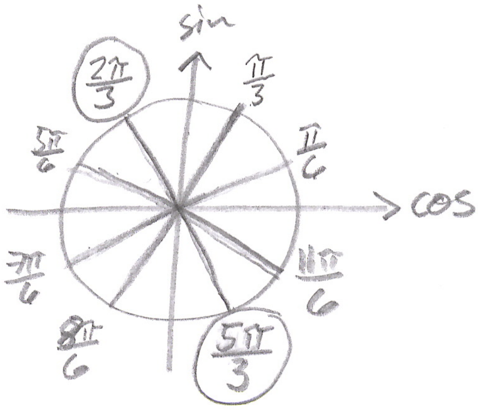
⑥ a) $\sin(2x) = 1 \qquad x \in [0, 2\pi]$

$$2x = \frac{\pi}{2} \pm 2\pi \cdot n$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \pi \cdot n$$

$$\underline{\underline{x = \frac{\pi}{4} \vee \frac{5\pi}{4}}}$$

b) $\sin(\pi x) = -\sqrt{3}\cos(\pi x)$



$$\frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} = -\sqrt{3}$$

$$\pi x = \frac{2\pi}{3} \pm 2\pi n \vee \frac{5\pi}{3} \pm 2\pi \cdot n$$

$$x = \frac{2}{3} \pm \cancel{2 \cdot n} \vee \frac{5}{3} \pm \cancel{2 \cdot n}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{2}{3} \vee \frac{5}{3}}}$$

(7)

1) $y' = \frac{x}{y}$

$\lim\limits_{y \to 0} \left(\frac{x}{y}\right) \to \infty$ Stemmer med C

2) $y' = x \cdot y$

$y = 0$ gir $y' = 0$ Kan bare stemme med B

3) $y' = 2x$

Stigningstallet er uavhengig av y, stemmer med A

---

(8) Stemmer for $n=1$:

$$3 \cdot 4 = 1 \cdot (1+1) \cdot (1+5)$$
$$12 = 1 \cdot 2 \cdot 6$$
$$12 = 12$$

Stemmer for $n=k+1$ hvis det stemmer for $n=k$:

$$\underbrace{k(k+1)(k+5)}_{\text{Første } k \text{ ledd}} + \underbrace{3(k+1)(k+4)}_{\text{Ledd nr. } k+1} = (k+1)\left((k^2+5k) + (3k+12)\right)$$

$$= \underbrace{(k+1)(k+2)(k+6)}_{\text{Formel for summen av } k+1 \text{ ledd}}$$

Q.E.D.

9

a) Farten (y') er ($=$) proporsjonal (k) med kvadratrota av høyden ($\sqrt{y}$):

$$\underline{\underline{y' = k \cdot \sqrt{y}}} \quad k<0$$

b)

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= k \cdot \sqrt{y} \\ \int y^{-\frac{1}{2}}\,dy &= \int k\,dt \\ 2y^{\frac{1}{2}} &= k \cdot t + c \\ y &= \left(\frac{kt+c}{2}\right)^2 \end{aligned}}$$

Endringen må være negativ ($k<0$)

$$y(0) = \frac{c^2}{4} = 100 \Rightarrow \underline{c = \pm 20}$$

$$y(2) = (k+10)^2 = 81 \qquad \underline{k=-1 \vee -19}$$

eller

$$\cancel{y(2) = (k-10)^2 = 81 \qquad k = 19 \vee 1}$$

$$y(t) = \left(\frac{-t+20}{2}\right)^2 \quad \text{eller} \quad y(t) = \left(\frac{-19t+20}{2}\right)^2$$

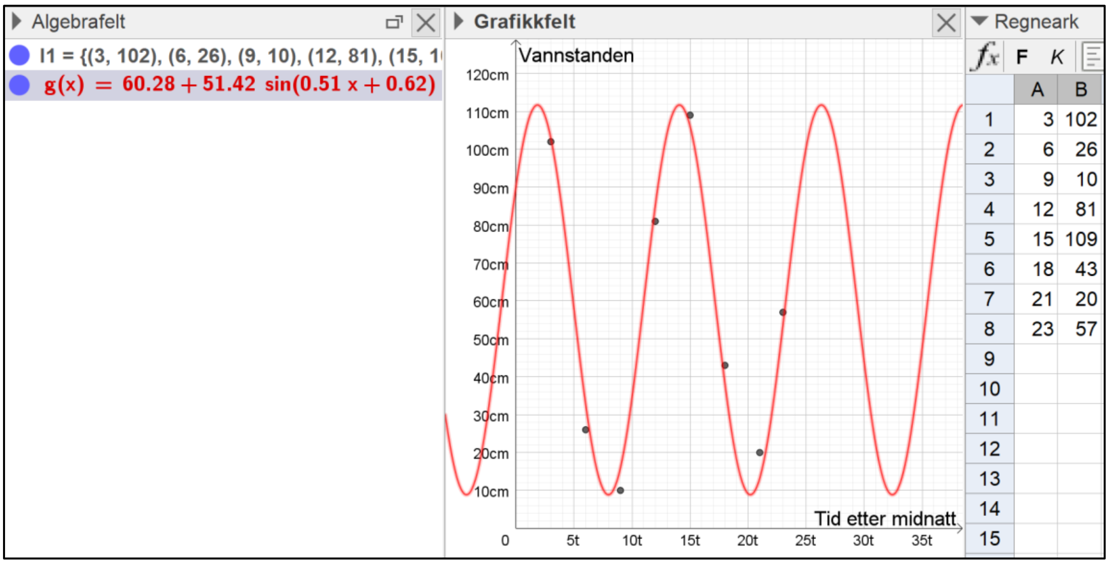
$y=0$ når $\underline{\underline{t = 20 \text{ timer}}}$ eller $\cancel{t = \frac{20}{19}} < 2$ timer

(Det må ta mer enn 2 timer)

Oppgave 1

a) Jeg legger inn verdiene i regnearket i GeoGebra og bruker regresjonsverktøyet. Modellen som passer godt er

$$\underline{\underline{g(x) = 60{,}28 + 51{,}42\sin(0{,}51x + 0{,}62)}}$$



b) Perioden er

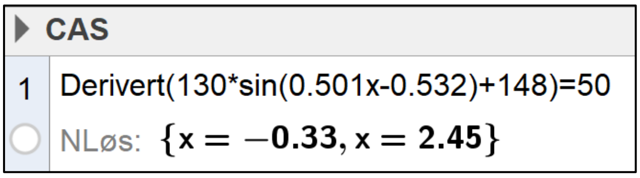
$$\frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0{,}501} \approx \underline{\underline{12{,}54 \text{ timer}}}$$

<u>Den praktiske tolkningen min av dette tallet er at **det er så lang tid det er mellom hver gang det er flo, og det er så lang tid det er mellom hver gang det er fjære**</u>.

c) <u>Den praktiske tolkning min av tallet 148 er at den gjennomsnittlige høyden vannstanden er over nullnivået dette døgnet er 148 cm</u>.

<u>Den praktiske tolkning min av tallet 130 er at vannet går maksimalt 130 cm over gjennomsnittsverdien og maksimalt 130 cm under gjennomsnittsverdien i løpet av døgnet</u>.

d) <u>Vannstanden øker med 50 cm per time **ca. klokka 2:30**, **ca. klokka 12:00** ($\approx -0{,}33 + 12{,}54$) og **ca. klokka 15:00** ($\approx 2{,}45 + 12{,}54$)</u>. *Jeg oppgir svarene med ca.-verdier fordi vi fra a) ser at en sinusfunksjon ikke er helt perfekt til å beskrive tidevannsendringene*.



Oppgave 2

a) Jeg definerer P og Q og lager en kule med sentrum midt mellom disse punktene og radius lik halvparten av avstanden mellom dem;

CAS	
1	Kule(Midtpunkt(P, Q), Avstand(P, Q)/2)
	$\rightarrow\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$

Dette er ligningen oppgaveteksten ba meg komme frem til.

b) Den minsten avstanden er $\underline{\underline{3\sqrt{3}-3}}$.

For å komme frem til dette har jeg lagd en linje L normalt på planet, gjennom A (**linje 3**). Deretter fant jeg skjæringspunktene mellom linja og kula (**linje 4 - 5**) og skjæringen mellom linja og planet (**linje 6 - 7**). Så finner jeg avstanden mellom skjæringspunktene til kula og skjæringspunktet til planet (**linje 8 - 9**). *Jeg fikk ikke kommandoen **Avstand(α, S)** til å fungere.*

2	α := x-y+z=7
	$\rightarrow\ \alpha:\ x-y+z=7$
3	L(t) := (1+t, 2-t, -1+t)
	$\rightarrow\ L(t)\ :=\ (t+1, -t+2, t-1)$
4	((t+1) - 1)² + ((-t+2) - 2)² + ((t-1) + 1)² = 9
	Løs: $\{t=-\sqrt{3}, t=\sqrt{3}\}$
5	{L(-sqrt(3)), L(sqrt(3))}
	$\rightarrow\ \left\{\left(-\sqrt{3}+1, \sqrt{3}+2, -\sqrt{3}-1\right), \left(\sqrt{3}+1, -\sqrt{3}+2, \sqrt{3}-1\right)\right\}$
6	(1+t) - (-t+2) + (t-1) = 7
	Løs: $\{t=3\}$
7	L(3)
	$\rightarrow\ (4, -1, 2)$
8	Avstand((4, -1, 2),(-sqrt(3) + 1, sqrt(3) + 2, -sqrt(3) - 1))
	$\rightarrow\ 3\sqrt{3}+3$
9	Avstand((4, -1, 2),(sqrt(3) + 1, -sqrt(3) + 2, sqrt(3) - 1))
	$\rightarrow\ 3\sqrt{3}-3$

c) Jeg bruker formelen for avstand mellom punkt og plan til å vise at vi får uttrykket;

$$d(t)=\frac{|ax+by+cy+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2\cdot 1+1\cdot 2+t\cdot(-1)-3t+1|}{\sqrt{2^2+1^2+t^2}}=\frac{|5-4t|}{\sqrt{5+t^2}}$$

d) For at β skal tangere kuleflata må avstanden være lik radiusen til kula;

$$d(t) = \frac{|5-4t|}{\sqrt{5+t^2}} = 3$$

Jeg bruker CAS for å finne de eksakte verdiene til løsningen;

CAS

1 abs(5-4t)/sqrt(5+t^2) = 3

Løs: $\left\{ t = \frac{-6\sqrt{15}+20}{7}, t = \frac{6\sqrt{15}+20}{7} \right\}$

Oppgave 3

a) **Rekke er summen av arealene til rektanglene**.
Arealet av det første (røde) rektangelet er $a_1 = 1 \cdot 1 = 1$.
Arealet av de andre rektanglene må være mindre enn arealet under grafen, altså gjelder

$$\int_1^k f(x)\,dx = \int_1^k \frac{1}{x^2}dx > a_2 + a_3 + \cdots + a_k$$

altså gjelder

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq 1 + \int_1^k \frac{1}{x^2}dx$$

som var det som skulle forklares.

Jeg har strengt tatt forklart at summen er mindre (<) ikke mindre eller lik (≤).

b) Fra a) får vi

$$S \leq 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 1 - 0 - (-1) = 2$$

c) CAS-verktøyet i GeoGebra gir

Sum(1/n^2, n, 1, ∞)

$\rightarrow \frac{1}{6}\pi^2$

Oppgave 4

a) Sirkelligningen gir at sirkelen er gitt ved

$$x^2 + (y-5)^2 = 2^2$$

$$(y-5)^2 = 4 - x^2$$

$$y - 5 = \pm\sqrt{4-x^2}$$

$$y = 5 \pm \sqrt{4-x^2}$$

dermed kan den øvre sirkelen beskrives med f og den nedre med g.

b) Bruker formelen for volum av omdreiningslegeme og regner ut omdreiningslegemet til f minus ''hullet i smultringen'', som er omdreiningslegemet til g;

CAS

1 pi*Integral((5+sqrt(4-x^2))^2, -2, 2) - pi*Integral((5-sqrt(4-x^2))^2, -2, 2)

$$\checkmark\ \pi \int_{-2}^{2} \left(5+\sqrt{4-x^2}\right)^2 dx - \pi \int_{-2}^{2} \left(5-\sqrt{4-x^2}\right)^2 dx$$

2 $1

$$\rightarrow\ 40\,\pi^2$$

c) Sirkelligningen gir

$$(x-2)^2 + (y-7)^2 = 9$$

$$y = 7 \pm \sqrt{9-(x-2)^2}$$

Tilsvarende utregning som i b) gir dermed

CAS

1 pi*Integral((7+sqrt(9-(x-2)^2))^2, -1, 5) - pi*Integral((7-sqrt(9-(x-2)^2))^2, -1, 5)

$$\checkmark\ \pi \int_{-1}^{5} \left(7+\sqrt{9-(x-2)^2}\right)^2 dx - \pi \int_{-1}^{5} \left(7-\sqrt{9-(x-2)^2}\right)^2 dx$$

2 $1

$$\rightarrow\ 126\,\pi^2$$