# Eksamen, forkurs matematikk, 1.aug 2016

## Del 1

### Oppgave 1

Sorterer data:

-12, -8, -2, -2, -2, 3, 3, 4, 6, 8

Gjennomsnitt:

$$\frac{(-12)+(-8)+(-2)+(-2)+(-2)+3+3+4+6+8}{10} °C = -0{,}2°C$$

Median:

$$\frac{(-2)+3}{2} = 0{,}5°\text{C}$$

Typetall: -2 °C

### Oppgave 2

$$3:4 = x:12$$
$$\frac{3}{4} = \frac{x}{12}$$
$$12 \cdot \frac{3}{4} = x$$
$$\underline{\underline{9 = x}}$$

9 jenter + 12 gutter = 21 elever

<u>Det er 21 elever i klassen.</u>

### Oppgave 3

$$\frac{200kr}{0{,}4} = \frac{2000kr}{4} = 500kr$$

<u>Varen koster 300 kr.</u>

## Oppgave 4

Legger sammen sidene:

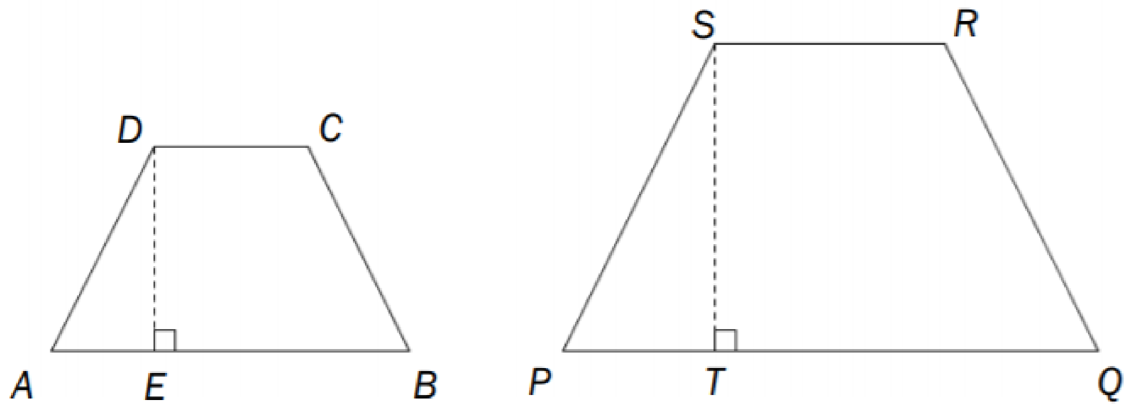
$$
\begin{aligned}
x + (x+3) + 5 + (2x-5) &= 27 \\
4x + 3 &= 27 \\
4x &= 27 - 3 \\
\frac{4x}{4} &= \frac{24}{4} \\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 6}}
\end{aligned}
$$

## Oppgave 5

For å løse denne oppgaven, kan det være greit å gjøre om potensuttrykkene slik at alle har felles grunntall:

$$
\begin{aligned}
4^2 + 4^{-1} \cdot (2^3)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} &= (2^2)^2 + (2^2)^{-1} \cdot (2^3)^2 + (2^{-1})^{-3} \\
&= 2^{2\cdot 2} + 2^{2\cdot(-1)} \cdot 2^{3\cdot 2} + 2^{(-1)\cdot(-3)} \\
&= 2^4 + 2^{-2} \cdot 2^6 + 2^3 \\
&= 2^4 + 2^{(-2)+6} + 2^3 \\
&= \underbrace{2^4 + 2^4} + 2^3 \\
&= 2 \cdot 16 + 8 \\
&\underline{\underline{= 40}}
\end{aligned}
$$

## Oppgave 6




$$
\begin{aligned}
\frac{DE}{ST} &= \frac{AB}{PQ} = \frac{DC}{SR} \\
\frac{4}{6} &= \frac{7}{PQ} = \frac{DC}{4{,}5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{6} &= \frac{7}{PQ} \\
PQ \cdot 4 &= 7 \cdot 6 \\
\underline{PQ} &= \frac{42}{4} = \underline{10{,}5}
\end{aligned}
$$

$$\frac{4}{6} = \frac{DC}{4{,}5}$$
$$4{,}5 \cdot \frac{4}{6} = DC$$
$$\frac{18}{6} = DC$$
$$\underline{DC = 3}$$

$$\underline{\underline{A}} = \frac{(PQ + SR) \cdot ST}{2} = \frac{(10{,}5 + 4{,}5) \cdot 6}{2} = \frac{15 \cdot 6}{2} = 15 \cdot 3 = \underline{\underline{45}}$$

$$\underline{\underline{A}} = \frac{(AB + DC) \cdot DE}{2} = \frac{(7 + 3) \cdot 4}{2} = \frac{10 \cdot 4}{2} = \underline{\underline{20}}$$

<u>Arealet av trapesene er 20 og 45 (hhv. lite og stort).</u>

## Oppgave 7

$$AB = AC - BC$$

Pythagoras læresetning gir:

$$BC + CD = BD^2$$
$$BC^2 + 6^2 = 10^2$$
$$BC^2 = 100 - 36 = 64$$
$$BC = \sqrt{64} = 8$$

$$AB = 12 - 8 = 4$$

$$\underline{\underline{A}} = \frac{4 \cdot 6}{2} = \underline{\underline{12}}$$

<u>Arealet av ΔABD er 12.</u>

## Oppgave 8

Antall telys: 6 røde + 2 hvite = 8 telys

Når vi tar ut to telys, vil trekk nr to være avhengig av første trekk.

a) $P(to\ røde) = \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{30}{56} = \frac{30:2}{56:2} = \frac{15}{28}$

b) $P(et\ rødt\ og\ et\ hvitt) = P(først\ rødt,\ deretter\ hvitt) +$
$P(først\ hvitt, deretter\ rødt)$
$= \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{12}{56} + \frac{12}{56} = \frac{24}{56} = \frac{24:6}{56:6} = \frac{3}{7}$

## Oppgave 9

| Lengde (km) | Veker | Midtpunkt ($x_m$) | $x_m \cdot f$ |
|---|---|---|---|
| $[0, 5\rangle$ | 4 | 2,5 | 10 |
| $[5, 10\rangle$ | 6 | 7,5 | 45 |
| $[10,20\rangle$ | 4 | 15 | 60 |
| $[20, 40\rangle$ | 6 | 30 | 180 |
| **Sum** | **20** | | **295** |

Gjennomsnittet av det klassedelte materialet er: $\underline{\underline{\bar{x}}} = 295: 20 = \underline{\underline{14{,}75 km}}$

b)

## Oppgave 10

Endring i pris fra 1955 til 2015: $\frac{28kr}{1kr} = \underline{28}$

Endring i KPI fra 1955 til 2015: $\frac{139{,}8}{10{,}1}$

Siden dette er tungvint og tar litt tid å beregne, gjør vi heller et overslag:

$$\frac{139{,}8}{10{,}1} < \frac{140}{10} = \underline{14}$$

Ved å runde opp teller og runde ned nevner vil vi få en verdi som er litt større enn den egentlige. Siden overslagsberegning av KPI-økning fortsatt er vesentlig lavere enn prisøkningen, er det klart at $\underline{\underline{\text{prisen for kroneis har steget mer enn } \frac{28}{14} = 2 \text{ ganger så mye som prisøkningen.}}}$

## Oppgave 11

Den prosentvise endringen vil normalt foregå ut i fra prisen på **endringstidpunktet, ikke den opprinnelige prisen**.

Pris på vare: *x*

Varen settes først ned med 10 %: $0{,}90 \cdot x = \underline{0{,}9x}$

Varen settes deretter ned med nye 10 %: $0{,}90 \cdot 0{,}9x = \underline{0{,}81x}$

Varen settes deretter opp med 20 %: $1{,}20 \cdot 0{,}81x = \underline{\underline{0{,}972x}}$

Varen vil koste 97,2 % av den opprinnelige prisen, altså mindre enn opprinnelig.

Mellomregning:

$1{,}20 \cdot 0{,}81$

162

81

$= \quad 0{,}972$

## Oppgave 12

a) Generell formel for lineær funksjon: A(x) = ax + b der a er stigningstall og b er konstantledd. Siden vi skal beregne folketall etter 2016 kan man sette dette til år 0. Da blir b = 4000.

Stigningstallet kan beregnes ut fra formel for stigningstall:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4800 - 4000}{2020 - 2016} = \frac{800}{4} = \underline{200}$$

Modell for folketallet blir da:

A(x) = 200x + 4000

der x er antall år etter 2016.

b) Igjen er x satt til å være antall år etter 2016:

| X år etter 2016 | Innbyggertall ( B(x) ) |
|---|---|
| 0 | 4000 |
| 1 | 4080 |

Formel for eksponentiell vekst er:

$B(x) = a \cdot p^x$ der a er innbyggertall ved år null og p er vekstfaktoren. Dette gir formelen

$B(x) = 4000 \cdot p^x$

Etter 1 år er innbyggertallet 4080, og vi kan sette inn i formelen:

$$B(1) = 4080$$
$$4000 \cdot p^1 = 4080$$
$$\frac{4000 \cdot p}{4000} = \frac{4080}{4000} = \frac{4000}{4000} + \frac{80}{4000} = 1 + \frac{80}{40 \cdot 100} = 1 + \frac{2}{100} = 1{,}02$$

$$\underline{p = 1{,}02}$$

Det betyr en prosentvis vekst på 2 % per år.

Modellen for folketallet blir:

$$\underline{\underline{B(x) = 4000 \cdot 1{,}02^x}}$$

## Del 2

### Oppgave 1

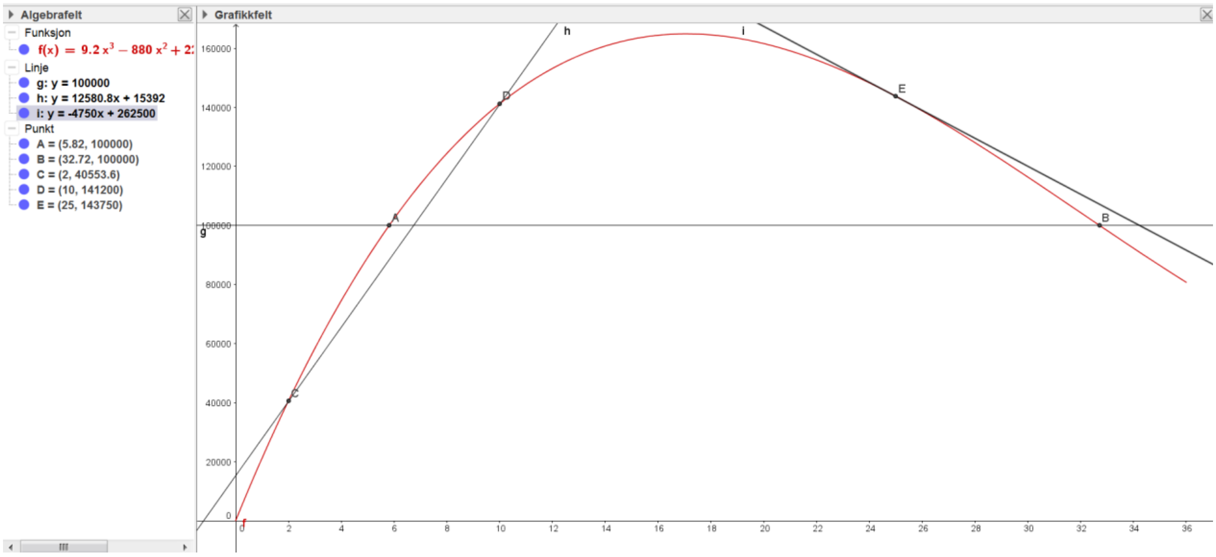
Høyde Burj Khalifa: 828 m

Tykkelse på kronestykke: 1,7 mm = $1{,}7 \cdot 10^{-3}$ m

Antall kronestykker som trengs for å bygge et tårn like høyt som Burj Khalifa:

$$\frac{828\,m}{1{,}7 \cdot 10^{-3} m} \approx 487059 = \underline{\underline{4{,}87059 \cdot 10^5 kronestykker}}$$

### Oppgave 2




b) Bedriften selger over 100 000 enhet er ifra 6. måned til 32. måned etter oppstart.
<u>I følge modellen vil bedriften selge over 100 000 enheter i 32-6 = 26 måneder.</u>

c) <u>Gjennomsnittlig vekstfart er i 2. til 10. måned på 12 580,8 enheter. Dette betyr at salget øker i gjennomsnitt med 12 580,8 enheter hver måned i perioden.</u>

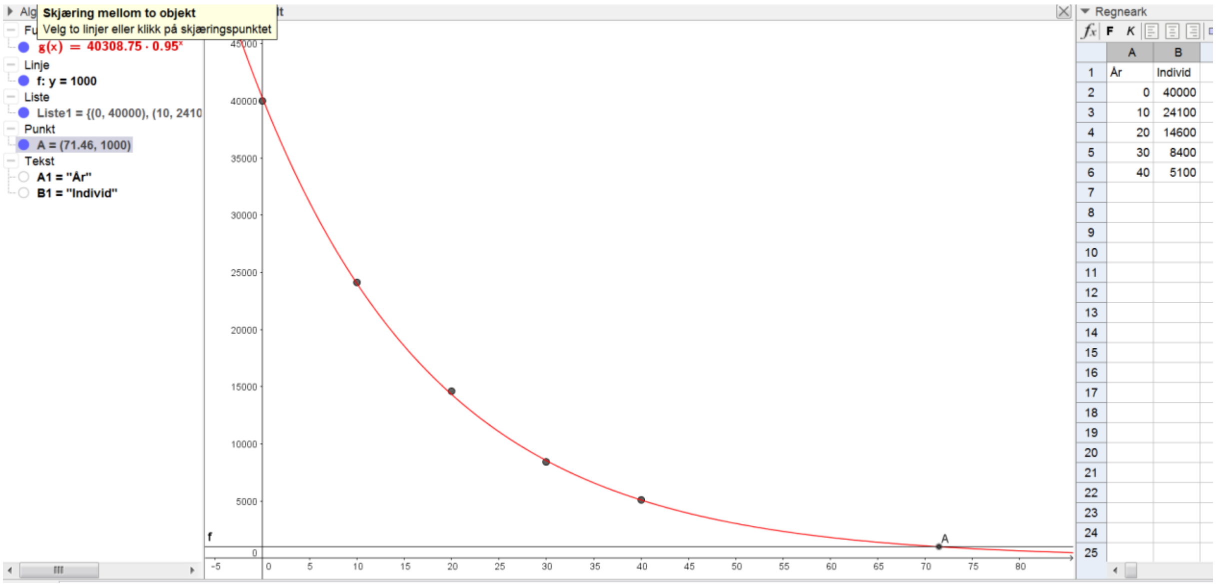
d) <u>Momentan vekstfart er i 25. måned på -4750 enheter. Dette betyr at salget avtar med 4750 enheter denne måneden.</u>

## Oppgave 3

a) Oppgaven kan løses i Excel eller Geogebra. Her har jeg valgt Geogebra. Setter 1970 til år 0.

Legg verdiene inn i regnearket og velg «Regresjonsanalyse». Velg eksponentiell modell.

| År | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| Individ | 40000 | 24100 | 14600 | 8400 | 5100 |




b) Generell formel for eksponentiell vekst: $y = a \cdot p^x$, der p er vekstfaktor.
1 - 0,95 = 0,05 = <u>5 %</u>
<u>Antall individer minker med 5 % per år.</u>

c) Legg inn linje y = 1000, og deretter velg «Skjæring mellom to objekt».
1970 + 71,46 = <u>2041,46</u>
<u>Antall individer synker under tusen i løpet av år 2041 iht. modellen.</u>

## Oppgave 4

Vi kan lage et kryssdiagram for å vå oversikt:

| | Eldre søsken | Ikke eldre søsken | Totalt |
|---|---|---|---|
| Yngre søsken | 10-3= 7 , 15-8= 7 | 10-2= 8 | 15 |
| Ikke yngre søsken | 5-2= 3 | 2 | 20-15= 5 |
| Totalt | 10 | 20-10= 10 | 20 |

Tre elever har eldre, men ikke yngre søsken.

<u>Sannsynligheten for å trekke ut en elev som har eldre, men ikke yngre søsken blir da 3/20.</u>

## Oppgave 5

Stokkene er formet som en sylinder delt i to, langsgående med lengden på stokken/sylinderen.

Formel for overflaten av en sylinder: $A = \pi dh + 2\pi r^2$

Volumet av en halv sylinder blir da: $A = \frac{\pi dh}{2} + \pi r^2 + dh$ (overflaten av utsiden av stokken + flaten der den er delt)

d = 30 cm = 0, 30 m

Siden det er tre stokker blir den totale overflaten:

$$A = 3 \cdot \left(\frac{\pi dh}{2} + 2\pi r^2 + dh\right) = 3 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 0{,}3\text{ m} \cdot 2{,}5\text{ m}}{2} + \pi \cdot (0{,}15\text{m})^2 + 0{,}3\text{ m} \cdot 2{,}5\text{ m}\right) \approx \underline{6\text{ m}^2}$$

Mengde lakk dersom 10 dl dekker 10 $m^2$

$$6\text{ m}^2 \cdot {}^{10\text{ dl}}/_{10\text{ m}^2} = \underline{\underline{6\text{ dl}}}$$

<u>Det trengs omtrent 6 dl lakk til å dekke de tre halve stokkene.</u>

## Oppgave 6

Løser denne i Excel.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Dag** | **Treningstid Kristian** | **Foreslått treningtid for Ståle** | Formel (B) | Formel (C) |
| 2 | Mandag | 60 | 50 | | |
| 3 | Tirsdag | 90 | 100 | | |
| 4 | Onsdag | 60 | 50 | | |
| 5 | Torsdag | 80 | 90 | | |
| 6 | Fredag | 75 | 75 | | |
| 7 | Lørdag | 60 | 50 | | |
| 8 | Søndag | 100 | 110 | | |
| 9 | **Gjennomsnitt** | **75** | **75** | =GJENNOMSNITT(B2:B8) | =GJENNOMSNITT(C2:C8) |
| 10 | **Standardavvik** | **14,9** | **23,8** | =STDAV.P(B2:B8) | =STDAV.P(C2:C8) |
| 11 | | | | | |

a) <u>Kristian trener i gjennomsnitt 75 min per dag.</u>

b) <u>Standardavviket for treningstidene er på omtrent 15 min.</u>

c) <u>Ståle kan ha trent som i kolonne C over. Siden standardavviket hans er større enn Kristians, betyr det at treningstidene hans varierer mer i lengde. Siden det ikke er oppgitt noen verdi, har jeg valgt å trekke fra 10 min på tidene under gjennomsnittet, og legge til 10 min på tidene over gjennomsnittet. Han har nå samme gjennomsnitt, men et større standardavvik, som vist i tabellen.</u>

## Oppgave 7

Formler for hver celle er angitt i cellene til høyre for den aktuelle cella.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Personinntekt | kr 666 000,00 | | | | | | | |
| 2 | Samlet fradrag | kr 154 100,00 | | | | | | | |
| 3 | Alminnelig inntekt | kr 511 900,00 | =B1-B2 | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | |
| 5 | | Prosentsats | Beløp | | | | | | |
| 6 | Skatt av alminnelig inntekt | 25,00 % | kr 127 975,00 | =B$3*B6 | | | | | |
| 7 | Trygdeavgift | 8,20 % | kr 41 975,80 | =B$3*B7 | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | **Trinnskatt** | | | | | | | | |
| 10 | | **Prosentsats** | Fra | **Til** | Skatt på trinn | | | | |
| 11 | Trinn 1 | 0,44 % | kr 159 800,00 | kr 224 900,00 | kr 286,44 | =(D11-C11)*B11 | | | |
| 12 | Trinn 2 | 1,70 % | kr 224 900,00 | kr 565 400,00 | kr 5 788,50 | =(D12-C12)*B12 | | | |
| 13 | Trinn 3 | 10,70 % | kr 565 400,00 | kr 909 500,00 | kr 10 764,20 | =HVIS(B$1>D13;(D13-C13)*B13; (B$1-C13)*B13) | | | |
| 14 | Trinn 4 | 13,70 % | kr 909 500,00 | | kr - | =STØRST(B1-C14;0)*B14 | | | |
| 15 | **Totalt** | | | | **kr 16 839,14** | =SUMMER(E11:E14) | | | |
| 16 | | | | | | | | | |
| 17 | **Samlet skatt:** | **kr 186 789,94** | =SUMMER(C6:C7;E15) | | | | | | |

a) Som vist i formlene i rute F11 og F12, er skatten beregnet ut fra differansen mellom «Fra»- og «Til»-kolonnene.

b) og c)

Ved å bruke logiske tester, kan regnearket benyttes til å beregne på Ola og Karis samlede skatt.

<u>Ole har en samlet skatt på 186 789,94 kr.</u>

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Personinntekt | kr 1 114 000,00 | | | | | | | |
| 2 | Samlet fradrag | kr 184 500,00 | | | | | | | |
| 3 | Alminnelig inntekt | kr 929 500,00 | =B1-B2 | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | |
| 5 | | Prosentsats | Beløp | | | | | | |
| 6 | Skatt av alminnelig inntekt | 25,00 % | kr 232 375,00 | =B$3*B6 | | | | | |
| 7 | Trygdeavgift | 8,20 % | kr 76 219,00 | =B$3*B7 | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | **Trinnskatt** | | | | | | | | |
| 10 | | **Prosentsats** | Fra | **Til** | Skatt på trinn | | | | |
| 11 | Trinn 1 | 0,44 % | kr 159 800,00 | kr 224 900,00 | kr 286,44 | =(D11-C11)*B11 | | | |
| 12 | Trinn 2 | 1,70 % | kr 224 900,00 | kr 565 400,00 | kr 5 788,50 | =(D12-C12)*B12 | | | |
| 13 | Trinn 3 | 10,70 % | kr 565 400,00 | kr 909 500,00 | kr 36 818,70 | =HVIS(B$1>D13;(D13-C13)*B13; (B$1-C13)*B13) | | | |
| 14 | Trinn 4 | 13,70 % | kr 909 500,00 | | kr 28 016,50 | =STØRST(B1-C14;0)*B14 | | | |
| 15 | **Totalt** | | | | **kr 70 910,14** | =SUMMER(E11:E14) | | | |
| 16 | | | | | | | | | |
| 17 | **Samlet skatt:** | **kr 379 504,14** | =SUMMER(C6:C7;E15) | | | | | | |

<u>Kari har en samlet skatt på 379 504,14 kr.</u>

## Oppgave 8

Lager tabell over rutene i figuren:

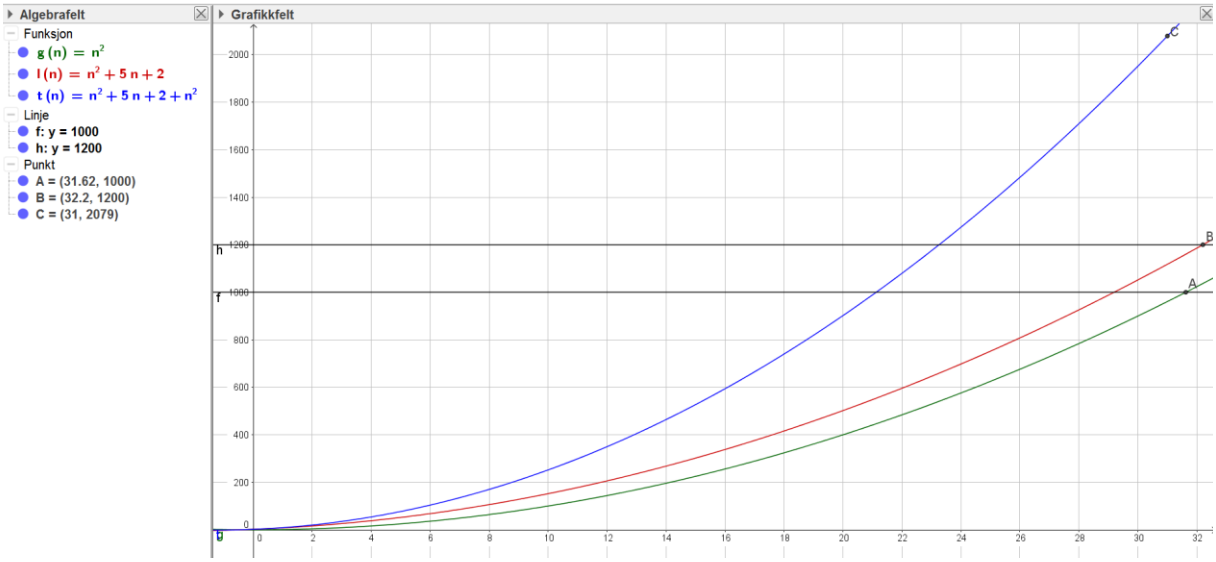
| Figur | 1 | 2 | 3 | 4 | n |
|---|---|---|---|---|---|
| Totalt antall ruter | $3 \cdot 3 = 9$ | $4 \cdot 5 = 20$ | $5 \cdot 6 = 30$ | $6 \cdot 7 = 42$ | $(n+2)(2n+1)$ $= 2n^2 + 5n + 2$ |
| Antall grå ruter | $1^2 = 1$ | $2^2 = 4$ | $3^2 = 9$ | $4^2 = \underline{\underline{16}}$ | $\underline{\underline{n^2}}$ |
| Antall lilla ruter | $3 \cdot 3 - 1^2 = 8$ | $4 \cdot 5 - 2^2 = 16$ | $5 \cdot 7 - 3^2 = 21$ | $6 \cdot 9 - 4^2 = 40$ | $2n^2 + 5n + 3 - n^2$ $= \underline{\underline{n^2+5n+2}}$ |

d) Lager funksjonene for antall ruter og plotter inn i Geogebra:

Grå ruter: $g(n) = n^2$

Lilla ruter: $l(n) = n^2 + 5n + 2$

Totalt antall ruter: $t(n) = g(n) + t(n)$




Løser i Geogebra

$$g(n) = 1000 \quad \Rightarrow \quad n = 31{,}62$$
$$l(n) = 1200 \quad \Rightarrow \quad n = 32{,}19$$

Vi vil ha tilstrekkelig med grå ruter til figur 31, men ikke figur 32.

Lager punkt (31, t(31)) i Geogebra.

Totalt antall ruter blir: $\underline{t(31) = 2111 \text{ ruter}}$