Løsningsforslag eksamen 2P-Y 2019

Del 1

Oppgave 1

Sorterer tallene i stigende rekkefølge og finner de to midterste tallene:

0 0 1 1 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3 4 5 5 6 8 9

$$Median = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\begin{aligned} Gjennomsnitt \quad &= \frac{summen\ av\ verdiene}{antall\ verdier} \\ &= \frac{1+1+1+1+2+2+2+2+2+3+3+3+4+5+5+6+8+9}{20} \\ &= \frac{60}{20} = 3 \end{aligned}$$

$$Variasjonsbredde = Største\ verdi - minste\ verdi = 9 - 0 = 9$$

Oppgave 2

Alternativ 1:	Alternativ 2:
$x \cdot 0{,}8 = 640$ $x = \frac{640}{0{,}8}$ $x = 800$	Siden 640 kroner er 80% kan vi dele med 80 for å finne 1%: $\frac{640}{80} = 8$ For å finne 100% kan vi deretter multiplisere med 100: $8 \cdot 100 = 800$

Varen kostet 800 kroner før prisen ble satt ned.

Oppgave 3

$$\begin{aligned} & 7{,}03 \cdot 10^7 - 7000000 \\ = \quad & 70300000 - 7000000 \\ = \quad & 63300000 \\ = \quad & \underline{\underline{6{,}33 \cdot 10^7}} \end{aligned}$$

Oppgave 4

$$\frac{2^0 + 2^3 \cdot 2^2 + (2^3)^2 - 2}{2 \cdot 2^2} + 2^{-3}$$

$$= \quad \frac{1 + 2^{3+2} + 2^{3\cdot 2} - 2}{2^3} + 2^{-3}$$

$$= \quad \frac{1 + 2^5 + 2^6 - 2}{2^3} + \frac{1}{2^3}$$

$$= \quad \frac{1 + 32 + 64 - 2}{8} + \frac{1}{8}$$

Siden brøkene har samme nevner kan vi legge dem sammen direkte:

$$= \quad \frac{95 + 1}{8}$$

$$= \quad \frac{96}{8}$$

$$= \quad \underline{\underline{12}}$$

Oppgave 5

a) Ser at prisen har økt med 200 kroner når antall pakker har økt med 4. Det betyr at prisøkningen for hver pakke, altså stigningstallet a må være:

$$a = \frac{550 - 350}{8 - 4}$$

$$a = \frac{200}{4}$$

$$\underline{\underline{a = 50}}$$

For å finne konstantleddet kan vi nå ta utgangspunkt i punktet (4, 350) og trekke fra 50 fire ganger: $350 - 50 \cdot 4 = 350 - 200 = 150$.

Vi kan også finne konstantleddet ved å regne ut likningen:

$$350 = 50 \cdot 4 + b$$

$$350 = 200 + b$$

$$350 - 200 = b$$

$$\underline{\underline{b = 150}}$$

b) a er stigningstallet til den lineære funksjonen, og sier oss noe om hvor mye prisen øker med for hver ekstra pakke som skal sendes. Konstantleddet b sier oss at det koster 150 kroner i startpris (altså i tillegg til prisen per pakke) for å velge å sende pakker med budfirmaet. Det vil altså koste 200 kroner å sende 1. pakken, og etter dette vil prisen øke med 50 kroner/pakken.

Oppgave 6

Reisetid i minutter	Frekvens (f)	Klassemidtpunkt (X_m)	$f \cdot X_m$
$[0, 10\rangle$	60	$\frac{0+10}{2} = \frac{10}{2} = 5$	$60 \cdot 5 = 300$
$[10, 20\rangle$	80	$\frac{10+20}{2} = \frac{30}{2} = 15$	$80 \cdot 15 = 1200$
$[20, 40\rangle$	50	$\frac{20+40}{2} = \frac{60}{2} = 30$	$50 \cdot 30 = 1500$
$[40, 80\rangle$	10	$\frac{40+80}{2} = \frac{120}{2} = 60$	$10 \cdot 60 = 600$
Totalt	200		3600

a)

$$Gjennomsnitt = \frac{sum\ av\ (f \cdot X_m)}{sum\ av\ frekvens} = \frac{3600}{200} = 18$$

b) Siden vi ikke vet hvordan fordelingen av reisetid er, blir vår beste gjetning at reisetiden er jevnt fordelt i intervallene. Dette betyr at vi antar at det er nøyaktig like mange av alle de ulike reisetidene. Om vi gjør dette, kan vi komme frem til et anslag på hva medianen kan være.

Siden det er 200 ulike reisetider er medianen gjennomsnittet av reisetid nummer 100 og 101 om vi hadde sortert reisetidene i stigende rekkefølge. De første 60 reisetidene ligger i intervallet $[0, 10\rangle$. Siden de neste 80 ligger i intervallet $[10, 20\rangle$, vil også medianen ligge i dette intervallet.

Om vi trekker bort frekvensene fra forrige intervall vil medianen være reisetid nummer $100 - 60 = 40$ i intervallet $[10, 20\rangle$. Siden det frekvensen for dette intervallet er 80 er det 80 verdier i intervallet $[10, 20\rangle$. Verdi nummer 40 i dette intervallet må derfor være i midten av intervallet siden det er 80 verdier, og reisetiden midt mellom 10 og 20 er 15. Derfor kan vi anslå medianen til å være 15.

c) Regner ut klassebredden og histogramhøyden slik som vist i tabellen under.

Reisetid i minutter	Frekvens	Klassebredde	$Histogramhøyde = \dfrac{frekvens}{klassebredde}$
$[0, 10\rangle$	60	$10 - 0 = 10$	$\dfrac{60}{10} = 6$
$[10, 20\rangle$	80	$20 - 10 = 10$	$\dfrac{80}{10} = 8$
$[20, 40\rangle$	50	$40 - 20 = 20$	$\dfrac{50}{20} = \dfrac{25}{10} = 2{,}5$
$[40, 80\rangle$	10	$80 - 40 = 40$	$\dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$
Totalt	200		

Selve histogrammet:

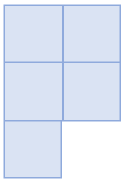
Oppgave 7

a) Ser at differansen øker med 2 for hver figur og bruker dette til å fylle ut tabellen:

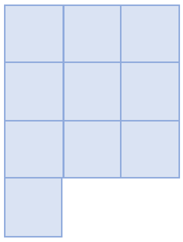
Figur nummer	1	2	3	4	5	6	7	8
Antall kvadrater	2	5	10	17	26	37	50	65
Differanse	3	5	7	9	11	13	15	

b)

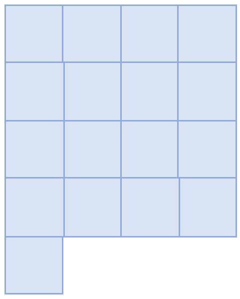
Figur 2



Figur 3



Figur 4



c) Her kan vi se at figuren er ganske lik figuren i den forrige deloppgaven. Om vi setter opp en tabell ser

Figur nummer	1	2	3	4
Antall kvadrater i blå figurer	2	5	10	17
Antall kvadrater i grønne figurer	2	6	12	20

Antallet kvadrater i de grønne figurene er altså $n - 1$ flere enn i de blå. Da kan vi ta uttrykket som vi fikk oppgitt til oppgave b og legge til $n - 1$ slik:

$$n^2 + 1 + (n - 1) = n^2 + 1 + n - 1 = n^2 + n$$

Et uttrykk for antall grønne kvadrater i figur nummer n er altså $n^2 + n$.

Del 2

Oppgave 1

a) $V(0) = (10 - 0{,}1 \cdot 0^2)^3$

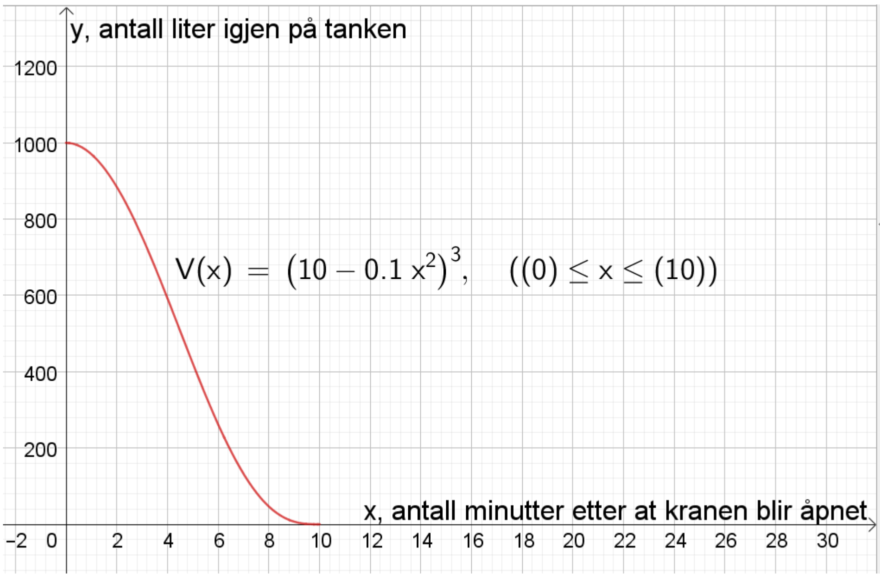
$V(0) = (10 - 0)^3$

$V(0) = 10^3$

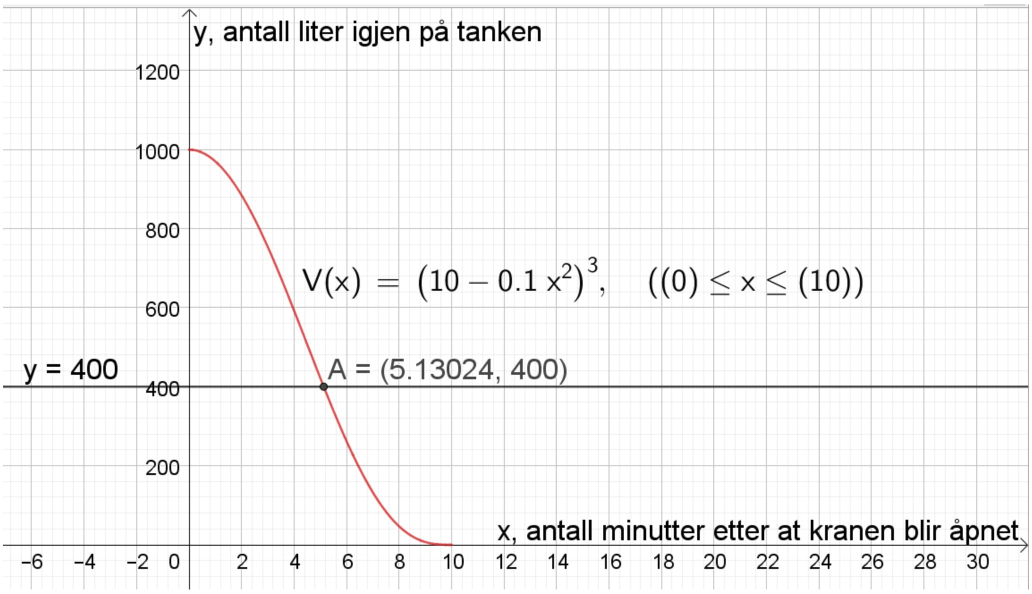
$V(0) = 1000$

Dette forteller oss at tanken rommer 1000 liter vann (antall liter igjen i tanken etter 0 minutter).

b)



c) Skriver inn y=400, velger «skjæring mellom to objekt» og markerer grafen og linjen. Får punktet A (se bildet under). Dette betyr at det tar 5,13 minutter før det er 400 liter igjen på tanken. Altså omtrent 5 minutter og 8 sekunder fra kranen åpnes til det er 400 liter igjen på tanken.

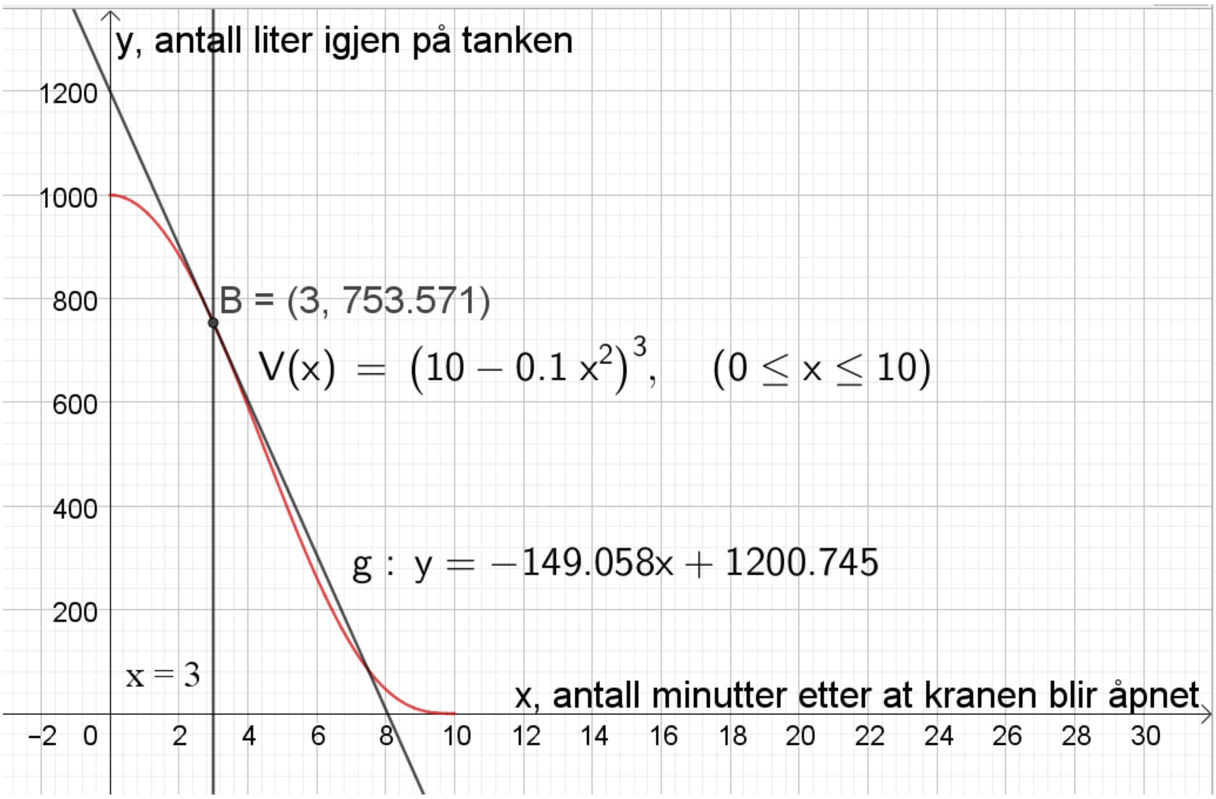


d) Siden tanken tømmes i hele perioden fra 0 til 10 minutter kan vi finne gjennomsnittlig vekstfart mellom x=0 og x=10. Vi vet allerede at y=1000 når x=0, og siden tanken er tom når x=10 vil y=0 i dette punktet. Vi skal altså finne gjennomsnittlig vekstfart mellom (0,1000) og (10,0). Dette kan vi enkelt gjøre ved regning:

$$\frac{1000-0}{0-10} = \frac{1000}{-10} = -100$$

Det vil si at det har runnet ut 100 liter vann per minutt i gjennomsnitt fra kranen ble åpnet til tanken var tom.

e) Skriver inn x=3 i geogebra, velger «skjæring mellom to objekt» og markerer denne linjen og grafen. Får punktet B. Velger så «tangent» og markerer B og grafen til V. Får da en rett linje g (se bildet under). Stigningstallet til denne rette linjen er den momentane vekstfarten til funksjonen V når x=3. Den momentane vekstfarten er altså -149,058 i dette punktet. Dette forteller oss at etter 3 minutter rant vannet ut av kranen med en fart på omtrent 149 liter i minuttet.



Oppgave 2

a)

$5\,300\,000 \cdot 180 = 954\,000\,000$ — Regner først ut antall plastposer i året

$954\,000\,000 \cdot 0{,}035 = 33\,390\,000$ — Multipliserer med tykkelsen på plastposene

$\frac{33\,390\,000}{1000} = 33\,390$ — Gjør om fra millimeter til meter

Stabelen ville altså blitt omtrent 33 390 meter høy (33,390 kilometer).

b) Det er 365 dager i året og 24 timer på et døgn. Det vil si at det er $365 \cdot 24 = 8760$ timer på et år. På disse 8760 timene skal det kastes 33 390 meter plast, så for å finne ut hvor mye dette blir i timen deler vi antall meter plast på antall timer:

$$\frac{33390}{8760} \approx 3{,}81$$

<u>Vi kaster altså omtrent 3,81 meter plast i timen.</u>

For å finne ut hvor mange timer som trengs for å nå 324 meter kan vi sette opp likningen

$$3{,}81x = 324$$

$$x = \frac{324}{3{,}81}$$

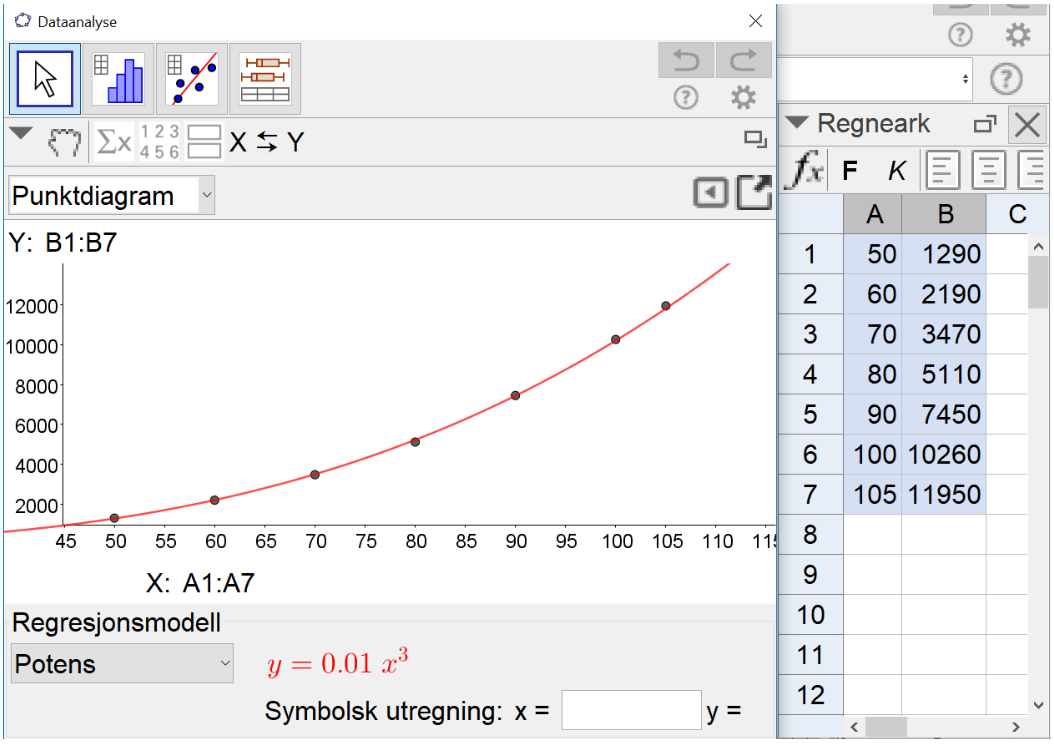
$$x = 85{,}04$$

Det tar altså rett over 85 timer for at stabelen skal bli like høy som Eiffeltårnet.

PS: Denne oppgaven kunne også blitt løst i geogebra ved å lage en lineær funksjon f(x)=3,87x, sette inn en linje y=324 og finne skjæringspunktet mellom dem.

Oppgave 3

a) Siden funksjonen V står på formen $V(x) = a \cdot x^b$ er det en potensfunksjon. Setter da inn dataene fra tabellen inn i regnearket i geogebra, velger «regresjonsanalyse», «analyser», og velger «potensfunksjon». Får da opp funksjonsuttrykket slik som vist under (se bildet), og kan lese av at $\underline{a = 0{,}01, \text{ og } b = 3.}$



b) Når lengden øker med 25% er vektsfaktoren 1+0,25=1,25. Det betyr at vi skal finne ut hvor mange prosent større $V_1(x) = 0{,}01 \cdot (1{,}25x)^3$ er enn den originale funksjonen.
Om vi regner ut uttrykket til V_1 får vi:

$$0{,}01 \cdot 1{,}25^3 \cdot x^3$$

$$= 0{,}01 \cdot 1{,}953125x^3$$

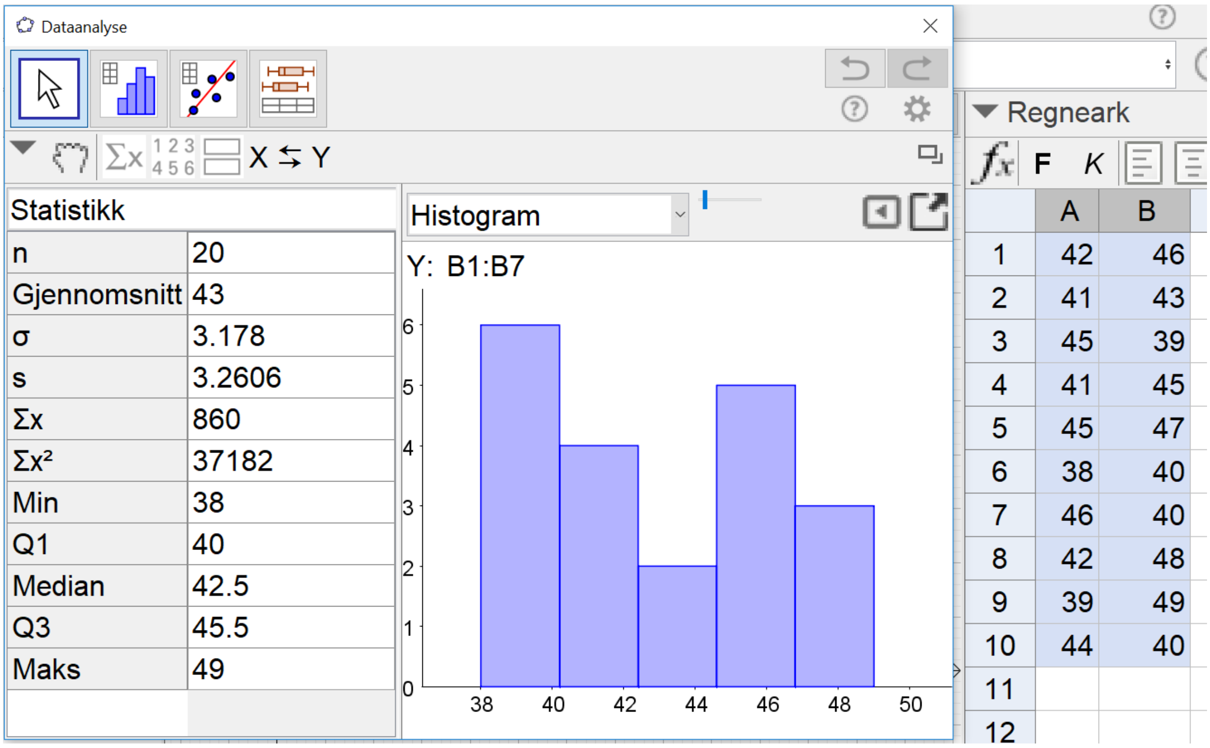
$$\approx 0{,}01 \cdot 1{,}9531x^3$$

Verdien til V_1 blir altså 1,9531 ganger så stor som verdien til V. Dette betyr at V_1 blir 95,31% større.

<u>Vekten til laksen øker altså med 95,31% når lengden øker med 25%.</u>

Oppgave 4

a) Skriver opp alle verdiene i regnearket i geogebra, markerer dem og trykker på «analyse av en variabel». Trykker så på «analyser» og på «vis statistikk». Får opp vinduet under. Kan dermed lese av at <u>gjennomsnittet er 43 mandler og standardavviket er 3,178.</u>



b) 1) Denne påstanden kan ikke være riktig. Dette fordi at summen av gjennomsnittet er den samme som summen av de faktiske verdiene. Siden Ida har lavere gjennomsnitt vil hun derfor også ha mindre mandler totalt enn Emil.

2) Denne påstanden kan heller ikke være riktig siden Ida har et større standardavvik enn Emil. Om hun hadde hatt like mange mandler i hver pose ville standardavviket vært 0, og dermed ville det vært mindre enn standardavviket til Emil.

3) Denne påstanden *kan* være riktig. Vi vet ikke, men det er et fult mulig scenario. Eks. La oss si at Ida har 45 mandler i halvparten av posene og 35 mandler i den andre halvparten. Det vil gi henne et gjennomsnitt på 40 (som er mindre enn Emils), og et standardavvik på 5 (som er høyere enn Emils).

Oppgave 5

Situasjon 1 passer til graf H. Dette fordi man betaler en fast pris for kurven (konstantleddet) og deretter vil grafen vokse lineært fordi prisen vil øke jevnt basert på hvor mange hekto man plukker.

Situasjon 2 passer til graf B. Dette fordi at funksjonen vil være en eksponentialfunksjon hvor beløpet som settes inn vil være grafens skjæring med y-aksen, og beløpet deretter vil vokse med mer og mer for hvert år ettersom at beløpet på kontoen øker (siden renten er det samme hvert år).

Situasjon 3 passer til graf F. Dette fordi at grafen vokser eksponentielt helt frem til dyrebestanden jevner seg ut, og grafen flater ut når antall dyr som blir født er omtrent det samme som antall dyr som dør.

Situasjon 4 passer til graf C. Dette fordi at man betaler en fast pris uavhengig av vekt innenfor de bestemte intervallene. Med en gang man går over i et nytt intervall vil prisen øke momentant, og ikke gradvis slik som de andre grafene viser.

Oppgave 6

a)

	Vaksinert	Ikke vaksinert	SUM
Fikk influensa	$0{,}025 \cdot 1080 = 27$	$0{,}1 \cdot 920 = 92$	119
Fikk ikke influensa	$1080 - 27 = 1053$	$920 - 92 = 828$	1881
SUM	$0{,}54 * 2000 = 1080$	$2000 - 1080 = 920$	2000

b)

$$P(får\ influensa) = \frac{antall\ som\ fikk\ influensa}{totalt\ antall\ ansatte} = \frac{119}{2000} = 0{,}0595 = 5{,}95\%$$

<u>Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt ansatt ved bedriften fikk influensa i løpet av denne høsten og vinteren var 5,95%.</u>

c) 1) Her har Per funnet ut sannsynligheten for at en ansatt som fikk influensa ikke hadde tatt vaksinen.

2) Her har per funnet sannsynligheten for at en som ikke fikk influensa hadde tatt vaksinen.

Løsningsforslag laget av: Jon Bjarne Bø

Oppgave 7

a) Vekstfaktoren når renten er 4% er 1+0,04=1,04. Vi kan da bruke vekstfaktoren til å regne ut beløpet om 10 år slik:

$$850\,000 \cdot 1{,}04^{10} = 1\,258\,207{,}64$$

For å regne ut hvor mye Petter hadde fått i renter tar vi dette beløpet og trekker fra det som Petter satte inn:

$$1\,258\,207{,}64 - 850\,000 = 408\,207{,}64$$

Petter hadde altså fått til sammen 408 207,64 kroner i rente i løpet av de ti årene om han hadde valgt tilbud 1.

b) Uten formler:

	A	B	C	D	E
1	Sparebeløp	kr 850 000,00			
2					
3	År	Rentesats	På kontoen før renter er lagt til	Renter	På kontoen etter at renter er lagt til
4	2008	5,4 %	kr 850 000,00	kr 45 900,00	kr 895 900,00
5	2009	3,5 %	kr 895 900,00	kr 31 356,50	kr 927 256,50
6	2010	2,3 %	kr 927 256,50	kr 21 326,90	kr 948 583,40
7	2011	2,4 %	kr 948 583,40	kr 22 766,00	kr 971 349,40
8	2012	2,2 %	kr 971 349,40	kr 21 369,69	kr 992 719,09
9	2013	2,2 %	kr 992 719,09	kr 21 839,82	kr 1 014 558,91
10	2014	2,1 %	kr 1 014 558,91	kr 21 305,74	kr 1 035 864,64
11	2015	1,6 %	kr 1 035 864,64	kr 16 573,83	kr 1 052 438,48
12	2016	1,2 %	kr 1 052 438,48	kr 12 629,26	kr 1 065 067,74
13	2017	1,1 %	kr 1 065 067,74	kr 11 715,75	kr 1 076 783,49
14					
15			Sum renter	kr 226 783,49	

Med formler:

	A	B	C	D	E
1	Sparebeløp	850000			
2					
3	År	Rentesats	På kontoen før renter er lagt til	Renter	På kontoen etter at renter er lagt til
4	2008	0,054	=B1	=B4*C4	=C4+D4
5	2009	0,035	=E4	=B5*C5	=C5+D5
6	2010	0,023	=E5	=B6*C6	=C6+D6
7	2011	0,024	=E6	=B7*C7	=C7+D7
8	2012	0,022	=E7	=B8*C8	=C8+D8
9	2013	0,022	=E8	=B9*C9	=C9+D9
10	2014	0,021	=E9	=B10*C10	=C10+D10
11	2015	0,016	=E10	=B11*C11	=C11+D11
12	2016	0,012	=E11	=B12*C12	=C12+D12
13	2017	0,011	=E12	=B13*C13	=C13+D13
14					
15			Sum renter	=SUMMER(D4:D13)	

Løsningsforslag laget av: Jon Bjarne Bø

c) Uten formler:

	G	H	I	J	K
1	Sparebeløp	kr 850 000,00			
2	Tilbud 1	Fast rente:	4,0 %		
3	År	Rentesats	På kontoen før renter er lagt til	Renter	På kontoen etter at renter er lagt til
4	2008	4,0 %	kr 850 000,00	kr 34 000,00	kr 884 000,00
5	2009	4,0 %	kr 884 000,00	kr 35 360,00	kr 919 360,00
6	2010	4,0 %	kr 919 360,00	kr 36 774,40	kr 956 134,40
7	2011	4,0 %	kr 956 134,40	kr 38 245,38	kr 994 379,78
8	2012	4,0 %	kr 994 379,78	kr 39 775,19	kr 1 034 154,97
9	2013	4,0 %	kr 1 034 154,97	kr 41 366,20	kr 1 075 521,17
10	2014	4,0 %	kr 1 075 521,17	kr 43 020,85	kr 1 118 542,01
11	2015	4,0 %	kr 1 118 542,01	kr 44 741,68	kr 1 163 283,69
12	2016	4,0 %	kr 1 163 283,69	kr 46 531,35	kr 1 209 815,04
13	2017	4,0 %	kr 1 209 815,04	kr 48 392,60	kr 1 258 207,64
14					
15			Sum renter	kr 408 207,64	

Med formler:

	G	H	I	J	K
1	Sparebeløp	850000			
2	Tilbud 1	Fast rente:	0,04		
3	År	Rentesats	På kontoen før renter er lagt til	Renter	På kontoen etter at renter er lagt til
4	2008	=$I$2	=H1	=H4*I4	=I4+J4
5	2009	=$I$2	=K4	=H5*I5	=I5+J5
6	2010	=$I$2	=K5	=H6*I6	=I6+J6
7	2011	=$I$2	=K6	=H7*I7	=I7+J7
8	2012	=$I$2	=K7	=H8*I8	=I8+J8
9	2013	=$I$2	=K8	=H9*I9	=I9+J9
10	2014	=$I$2	=K9	=H10*I10	=I10+J10
11	2015	=$I$2	=K10	=H11*I11	=I11+J11
12	2016	=$I$2	=K11	=H12*I12	=I12+J12
13	2017	=$I$2	=K12	=H13*I13	=I13+J13
14					
15			Sum renter	=SUMMER(J4:J13)	
16					

d) For å bruke tabellen fra forrige oppgave til å løse dette må vi endre på renten helt til rentesummen blir den samme. Etter å ha prøvd litt ulike renter (alt etter hvor nøyaktig man er og når det er man sier seg ferdig) vil kan komme frem til at en fast rente på 2,39316% vil gi det samme rentebeløpet som tilbud 2 (formlene på bildet under er lik som i forrige oppgave, tar dem derfor ikke med her).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Sparebeløp	kr 850 000,00					Sparebeløp	kr 850 000,00			
2	Tilbud 2						Tilbud 1	Fast rente:	2,39316 %		
3	År	Rentesats	På kontoen før renter er lagt til	Renter	På kontoen etter at renter er lagt til		År	Rentesats	På kontoen før renter er lagt til	Renter	På kontoen etter at renter er lagt til
4	2008	5,4 %	kr 850 000,00	kr 45 900,00	kr 895 900,00		2008	2,39 %	kr 850 000,00	kr 20 341,86	kr 870 341,86
5	2009	3,5 %	kr 895 900,00	kr 31 356,50	kr 927 256,50		2009	2,39 %	kr 870 341,86	kr 20 828,67	kr 891 170,53
6	2010	2,3 %	kr 927 256,50	kr 21 326,90	kr 948 583,40		2010	2,39 %	kr 891 170,53	kr 21 327,14	kr 912 497,67
7	2011	2,4 %	kr 948 583,40	kr 22 766,00	kr 971 349,40		2011	2,39 %	kr 912 497,67	kr 21 837,53	kr 934 335,20
8	2012	2,2 %	kr 971 349,40	kr 21 369,69	kr 992 719,09		2012	2,39 %	kr 934 335,20	kr 22 360,14	kr 956 695,34
9	2013	2,2 %	kr 992 719,09	kr 21 839,82	kr 1 014 558,91		2013	2,39 %	kr 956 695,34	kr 22 895,25	kr 979 590,59
10	2014	2,1 %	kr 1 014 558,91	kr 21 305,74	kr 1 035 864,64		2014	2,39 %	kr 979 590,59	kr 23 443,17	kr 1 003 033,76
11	2015	1,6 %	kr 1 035 864,64	kr 16 573,83	kr 1 052 438,48		2015	2,39 %	kr 1 003 033,76	kr 24 004,20	kr 1 027 037,96
12	2016	1,2 %	kr 1 052 438,48	kr 12 629,26	kr 1 065 067,74		2016	2,39 %	kr 1 027 037,96	kr 24 578,66	kr 1 051 616,62
13	2017	1,1 %	kr 1 065 067,74	kr 11 715,75	kr 1 076 783,49		2017	2,39 %	kr 1 051 616,62	kr 25 166,87	kr 1 076 783,49
14											
15			Sum renter	kr 226 783,49					Sum renter	kr 226 783,49	
16											

e) Etter 10 år vil jeg at det skal stå 1 076 783, 49 kroner på kontoen. Etter at jeg har tegner grafen skriver jeg derfor y=1076783,49 og velger «skjæring mellom to objekt». Deretter markerer jeg grafen og linjen og får punktet B. x-verdien i dette punktet er vekstfaktoren, så da kan vi lese av at vekstfaktoren fra forrige oppgave stemmer (se bildet under).