Utdannings-
direktoratet

13.11.2019

Eksamen

REA3022 Matematikk R1

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 3 timar. Del 2 skal leverast seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel	Del 1: Skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar (På del 1 er det ikkje tillate å bruke datamaskin.) Del 2: Alle hjelpemiddel er tillatne, bortsett frå opent Internett og andre verktøy som kan brukast til kommunikasjon. Når du bruker nettbaserte hjelpemiddel under eksamen, har du ikkje lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måtar å utveksle informasjon med andre er ikkje tillate.
Informasjon om oppgåva	Del 1 har 7 oppgåver. Del 2 har 4 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing. Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast.
Kjelder	Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet
Informasjon om vurderinga	Sjå eksamensrettleiinga med kjenneteikn på måloppnåing til sentralt gitt skriftleg eksamen. Eksamensrettleiinga finn du på Utdanningsdirektoratets nettsider
Vedlegg	Vedlegg 1: Binomisk og hypergeometrisk fordeling

Del 1

Oppgåve 1 (5 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = x^4 - 2x + \ln x$

b) $g(x) = x^7 \cdot e^x$

c) $h(x) = \dfrac{\ln(2x)}{x^2}$

Oppgåve 2 (2 poeng)

Skriv så enkelt som mogleg

$$4\ln(a \cdot b^3) - 3\ln(a \cdot b^2) - \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

Oppgåve 3 (5 poeng)

Polynomet P er gitt ved

$$P(x) = x^3 + 6x^2 + k \cdot x - 30$$

a) Grunngi at k må vere lik -1 for at divisjonen $P(x):(x-2)$ skal gå opp.

b) Faktoriser $x^3 + 6x^2 - x - 30$ i lineære faktorar.

c) Løys ulikskapen $x^3 + 6x^2 \leq x + 30$.

1 a) $f(x) = x^4 - 2x + \ln x$

$\Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{4x^3 - 2 + \frac{1}{x}}}$

b) $g(x) = x^7 \cdot e^x$

Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\Rightarrow g'(x) = 7x^6 \cdot e^x + x^7 \cdot e^x$

$\underline{\underline{= x^6(7+x)e^x}}$

c) $h(x) = \dfrac{\ln(2x)}{x^2}$

Brøkregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ med $u = \ln(2x) \Rightarrow u' = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$

$v = x^2 \Rightarrow v' = 2x$

Så $h'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln(2x) \cdot 2x}{(x^2)^2}$

$= \dfrac{x - \ln(2x) \cdot 2x}{x^4} = \underline{\underline{\dfrac{1 - 2\ln(2x)}{x^3}}}$

2 $4\ln(a\cdot b^3) - 3\ln(a\cdot b^2) - \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$= 4\left(\ln a + \ln(b^3)\right) - 3\left(\ln a + \ln(b^2)\right) - (\ln a - \ln b)$

$= 4(\ln a + 3\ln b) - 3(\ln a + 2\ln b) - (\ln a - \ln b)$

$= 4\ln a + 12\ln b - 3\ln a - 6\ln b - \ln a + \ln b$

$= (4-3-1)\ln a + (12-6+1)\ln b$

$= 0\cdot\ln a + 7\ln b$

$= 7\ln b$

3 $P(x) = x^3+6x^2+kx-30$

a) $P(x):(x-2)$

$$
\begin{aligned}
&(x^3+6x^2+kx-30):(x-2) = x^2+8x+(k+16)+\frac{2(k+16)-30}{(x-2)}\\
&-(x^3-2x^2)\\
&\quad 8x^2+kx-30\\
&\quad -(8x^2-16x)\\
&\qquad (k+16)x-30\\
&\qquad -((k+16)x-2(k+16))\\
&\qquad\quad -30+2(k+16)
\end{aligned}
$$

Vi vil at polynomdivisjonen skal gå opp. Altså må resten $\frac{2(k+16)-30}{(x-2)}$ være lik 0:

$$
\begin{aligned}
2(k+16)-30 &= 0\\
\Rightarrow \quad k+16 &= \frac{30}{2}\\
k+16 &= 15\\
k &= 15-16\\
\underline{\underline{k}} &\underline{\underline{= -1}}
\end{aligned}
$$

Alternativt: $P(x):(x-2)$ går opp hvis og bare hvis $x=2$ er en løsning til $P(x)=0$:

$$P(2) = 2^3+6\cdot 2^2+k\cdot 2-30 = 0$$

$$8+24+2k-30=0$$

$$32+2k=30$$

$$2k=-2$$

$$\underline{\underline{k=-1}}$$

b) Når $k=-1$:

$$(x^3+6x^2-x-30):(x-2) = x^2+8x+15$$

$$\Rightarrow \quad x^3+6x^2-x-30 = (x-2)\cdot(x^2+8x+15)$$

$$= \underline{\underline{(x-2)(x+5)(x+3)}}$$

Bruker abc-formel på: $x^2 + 8x + 15 = 0$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{2} = -4 \pm 1$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = -5$$
$$x_1 = -3$$

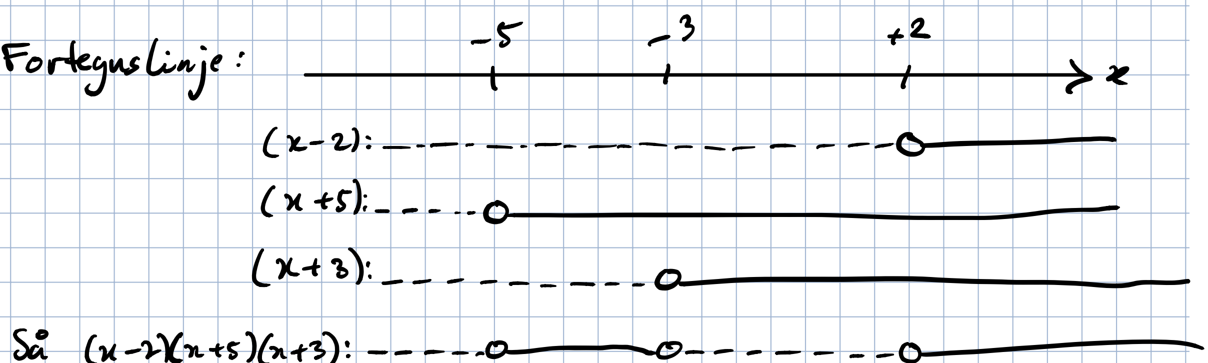
$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 8x + 15 = (x - x_0)(x - x_1)$$
$$= (x+5)(x+3)$$

c) $\quad x^3 + 6x^2 \leq x + 30$

$$\Rightarrow \quad x^3 + 6x^2 - x - 30 \leq 0$$
$$(x-2)(x+5)(x+3) \leq 0$$

Fortegnslinje:



$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x \in (-\infty, -5] \cup [-3, -2]}}$$

Oppgåve 4 (6 poeng)

Firkanten $ABCD$ er gitt ved $A(-2,1)$, $B(2,-1)$, $C(4,2)$ og $D(t,3)$.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BC}$.

b) Avgjer om $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.

c) Bruk vektorrekning til å bestemme t slik at $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.

d) For kva verdiar av t er firkanten $ABCD$ eit trapes?

Oppgåve 5 (6 poeng)

I ei R1-gruppe kjem 7 elevar frå klasse A og 5 elevar frå klasse B. Blant desse 12 elevane skal det veljast tilfeldig ein komité som skal bestå av 3 elevar frå klasse A og 2 elevar frå klasse B.

a) Kor mange slike komitear er det mogleg å setje saman?

Anne og Jens er elevar i R1-gruppa. Anne går i klasse A, og Jens går i klasse B.

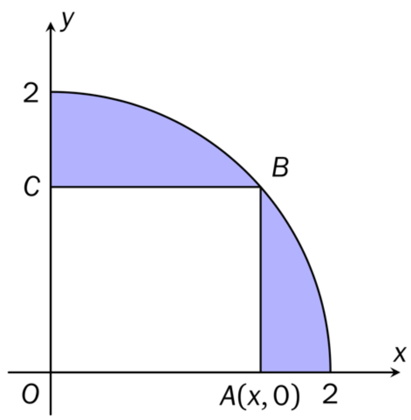
b) Bestem sannsynet for at både Anne og Jens blir med i komiteen.

c) Bestem sannsynet for at berre éin av dei blir med i komiteen.

Oppgåve 6 (4 poeng)

Skissa til høgre viser ein kvartsirkel med radius 2.

Firkanten $OABC$ er eit rektangel, der O er origo, A ligg på x-aksen, B på kvartsirkelen og C på y-aksen.

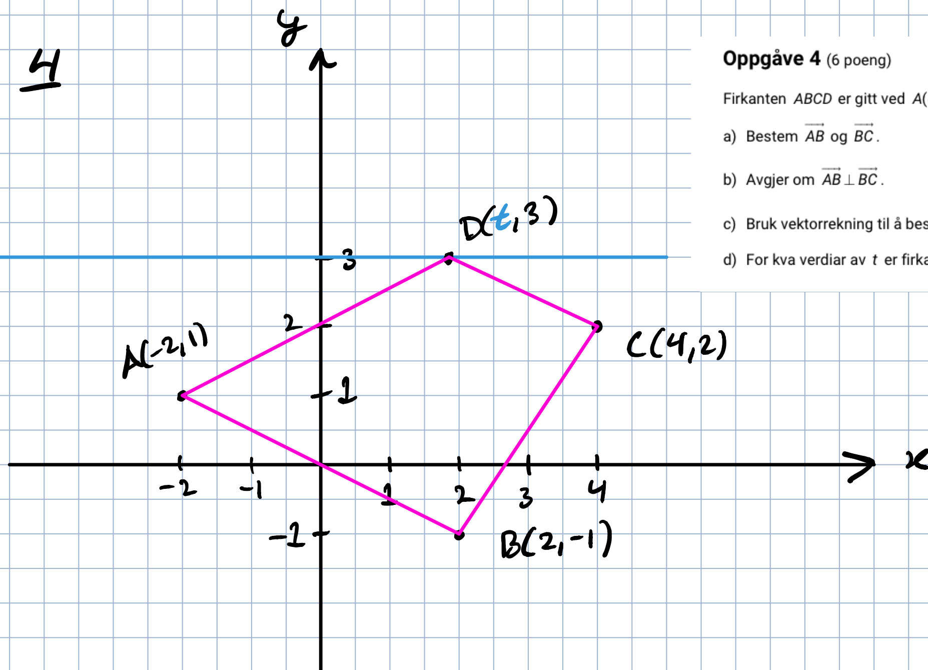


a) Vis at arealet F til det fargelagde området er gitt ved

$$F(x) = \pi - x\sqrt{4-x^2}\ , \quad 0 \le x \le 2$$

b) Kva er det minste arealet det fargelagde området kan ha?

4



Oppgåve 4 (6 poeng)

Firkanten $ABCD$ er gitt ved $A(-2,1)$, $B(2,-1)$, $C(4,2)$ og $D(t,3)$.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BC}$.

b) Avgjer om $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.

c) Bruk vektorrekning til å bestemme t slik at $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.

d) For kva verdiar av t er firkanten $ABCD$ eit trapes?

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [2,-1] - [-2,1] = [2+2, -1-1] = \underline{\underline{[4,-2]}}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = [4,2] - [2,-1] = [4-2, 2+1] = \underline{\underline{[2,3]}}$

b) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$?

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = [4,-2] \cdot [2,3] = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3$

$= 8 - 6 = 2 \neq 0$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BC}$ er <u>ikke</u> vinkelrett på hverandre.

c) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [t,3] - [-2,1] = [t+2, 3-1] = [t+2, 2]$

Vil ha: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

$[4,-2] \cdot [t+2, 2] = 0$

$4(t+2) - 2 \cdot 2 = 0$

$4(t+2) = 4$

$t + 2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{t = -1}}$

d) ABCD er et trapes dersom:

1) $\vec{AB} \parallel \vec{DC}$, eller

2) $\vec{AD} \parallel \vec{BC}$

1) $\vec{AB} = [4,-2]$

$\vec{DC} = \vec{OC} - \vec{OD} = [4,2] - [t,3] = [4-t,-1]$

$\vec{AB} \parallel \vec{DC} \Rightarrow [4,-2] \parallel [4-t,-1]$

$$\frac{4-t}{-1} = \frac{4}{-2}$$

$$t-4 = -2$$

$$\underline{\underline{t = 2}}$$

2) $\vec{AD} = [t+2,2]$

$\vec{BC} = [2,3]$

$\vec{AD} \parallel \vec{BC} \rightarrow [t+2,2] \parallel [2,3]$

$$\Rightarrow \frac{t+2}{2} = \frac{2}{3}$$

$$t+2 = \frac{4}{3}$$

$$t = \frac{4}{3} - 2 = \frac{4-6}{3} = \underline{\underline{\frac{-2}{3}}}$$

5

7 elever i klasse A
5 elever i klasse B

Skal velge 3 fra A og 2 fra B.

a) $\binom{7}{3}\binom{5}{2} = \frac{7!}{3!\,4!} \cdot \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cancel{4}}{3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$
$= 35 \cdot 10$
$= \underline{\underline{350}}$

b) Anne i A og Jens i B. Ssh for at begge blir trukket?

Ssh for at Anne blir trukket er $\frac{3}{7}$
— " — Jens — " — $\frac{2}{5}$

ssh for begge: $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \underline{\underline{\frac{6}{35}}}$

c) Ssh for kun én av dem:

ssh for at Anne blir trukket og ikke Jens: $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{35}$

ssh for at ikke Anne blir trukket og Jens blir trukket: $\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{35}$

ssh for nøyaktig én av dem: $\frac{9}{35} + \frac{8}{35} = \underline{\underline{\frac{17}{35}}}$

Alternativt: P(nøyaktig én av dem) = 1 − P(både J og A) − P(hverken J eller A)
$= 1 - \frac{6}{35} - \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5}$
$= \frac{35}{35} - \frac{6}{35} - \frac{12}{35} = \frac{35-18}{35} = \underline{\underline{\frac{17}{35}}}$

$\begin{array}{r} 35 \\ -18 \\ \hline 17 \end{array}$

6

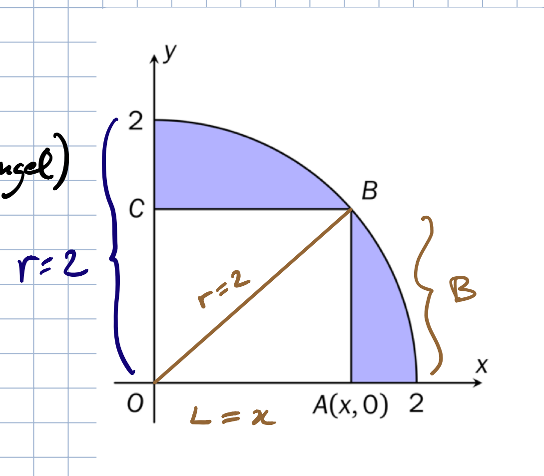
a) (Areal fargelagt område)

$= (\text{Areal kvart sirkel}) - (\text{Areal rektangel})$

$= \frac{1}{4}\pi r^2 \quad - \quad L \cdot B$

$= \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2 - x\cdot\sqrt{4-x^2}$

$= \underline{\underline{\pi - x\sqrt{4-x^2}}}$



$2^2 = x^2 + B^2$

$\Rightarrow B = \sqrt{4-x^2}$

b) $F(x) = \pi - x\sqrt{4-x^2}$, $0 \le x \le 2$

$F'(x) = -\left(\sqrt{4-x^2} + x\left(\sqrt{4-x}\right)'\right)$

$= -\left(\sqrt{4-x^2} + x\,\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)$

$= -\left(\frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\right)$

$= -\left(\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}\right) = \frac{2x^2-4}{\sqrt{4-x^2}}$

Kjerneregel:

$\left(\sqrt{4-x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)$

$= \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

$F'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4 = 0$

$2x^2 = 4$

$x^2 = 2 \Rightarrow \underline{x = \sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ Arealet er $F(\sqrt{2}) = \pi - \sqrt{2}\cdot\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}$

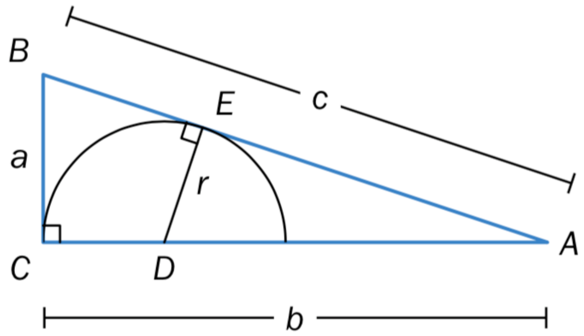
$= \pi - \sqrt{2}\cdot\sqrt{4-2}$

$= \pi - \sqrt{2}\,\sqrt{2} = \underline{\underline{\pi - 2}}$

Oppgåve 7 (8 poeng)

I denne oppgåva skal vi bevise Pytagoras’ setning.

I ein rettvinkla trekant ABC med sidene a, b og c har vi teikna ein innskriven halvsirkel med sentrum i D og radius $r = DC = DE$. Halvsirkelen tangerer hypotenusen i punktet E. Sjå figuren.

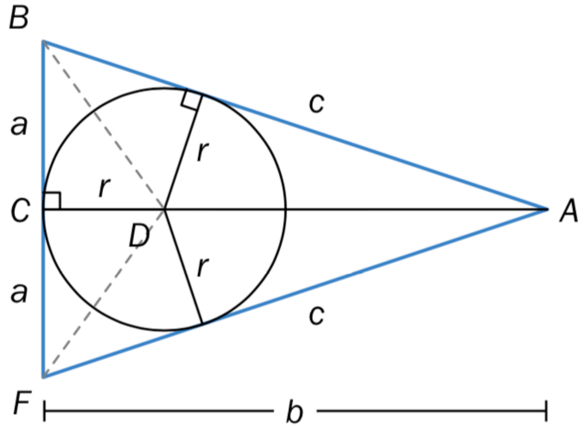


a) Grunngi at $\triangle CEB$ er likebeint.
   Bruk dette til å vise at $EA = c - a$.

b) Grunngi at $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. Bruk dette til å vise at

$$r = \frac{a \cdot (c-a)}{b}$$

Vi speglar heile figuren om AC og får ein trekant ABF med ein innskriven sirkel.



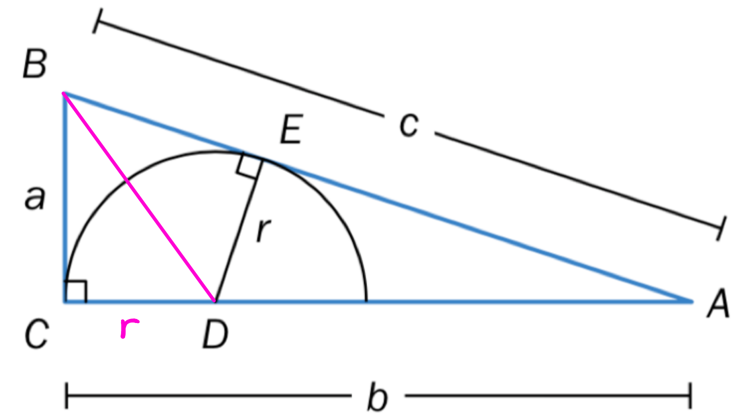
c) Vis ved arealbetraktningar at

$$a \cdot b = (a + c) \cdot r$$

d) Bruk resultata frå oppgåve b) og c) til å bevise Pytagoras’ setning.

a) Grunngi at $\triangle CEB$ er likebeint.
Bruk dette til å vise at $EA = c - a$.

7



$\triangle BDE$ er kongruent med $\triangle BDC$, fordi:

1) BD er en felles side

2) $CD = DE \quad (= r)$

3) Motstående vinkel til den lengste siden i hver trekant er like:

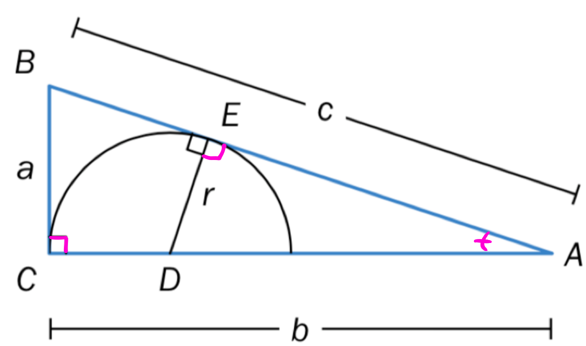
$\angle BCD = \angle BED = 90^\circ$

$\Rightarrow \quad BC = BE \quad (= a) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\triangle CEB \text{ er likebeint.}}}$

$\Rightarrow \quad EA = BA - BE$

$\underline{\underline{EA = c - a}}$

b)



Formlike

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$ fordi

1) $\angle CAB = \angle EAD$, og

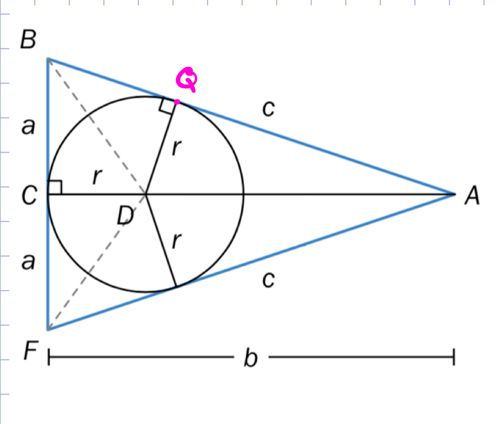
2) $\angle ACB = \angle AED = 90^\circ$

$\Rightarrow \quad \dfrac{ED}{BC} = \dfrac{AE}{AC}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{r}{a} = \dfrac{c-a}{b} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{r = \dfrac{a(c-a)}{b}}}$

c)

$$(\text{Areal } \Delta ABF) = \frac{(\text{gr.linje}) \cdot (\text{høyde})}{2}$$



$$= \frac{BF \cdot CA}{2}$$

$$= \frac{2a \cdot b}{2} = \underline{a \cdot b}$$

$$(\text{Areal } \Delta ABF) = 2 \cdot \left((\text{Areal } \Delta BCD) + (\text{Areal } \Delta ADB) \right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{BC \cdot CD}{2} + \frac{AB \cdot DQ}{2} \right)$$

$$= 2\left(\frac{a \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} \right)$$

$$= a \cdot r + c \cdot r = \underline{(a+c) \cdot r}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{a \cdot b = (a+c) \cdot r}}$$

d) Vil vise at: $a^2 + b^2 = c^2$

Resultat fra b) $\quad r = \frac{a(c-a)}{b} \quad (\mathrm{I})$

— " — c) $\quad a \cdot b = (a+c) \cdot r \Rightarrow r = \frac{ab}{a+c} \quad (\mathrm{II})$

Setter (II) inn i (I): $\quad \frac{ab}{a+c} = \frac{a(c-a)}{b}$

$$\Rightarrow \quad ab^2 = a(c-a)(a+c) = a(c^2 - a^2)$$

$$\Rightarrow \quad b^2 = c^2 - a^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{a^2 + b^2 = c^2}}$$