Utdannings-
direktoratet

Eksamen

13.11.2019

REA3026 Matematikk S1

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Del 1

Oppgåve 1 (4 poeng)

Løys likningane

a) $x^2+4x-12=0$

b) $\lg(5-2x)=1$

Oppgåve 2 (2 poeng)

Løys ulikskapen

$$x^2-2x<0$$

Oppgåve 3 (2 poeng)

Løys likningssystemet

$$\begin{aligned} x^2+4y&=4x \\ 4x-2y&=6 \end{aligned}$$

Oppgåve 4 (6 poeng)

Skriv så enkelt som mogleg

a) $(a+2)^3-a\cdot(a+2)^2$

b) $\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x+5}{x^2+x-2}$

c) $2\lg(2x^2)+\lg\left(\dfrac{5}{x}\right)-\lg(2x^3)$

Oppgåve 1 (4 poeng)

Løys likningane

a) $x^2 + 4x - 12 = 0$

b) $\lg(5 - 2x) = 1$

<u>1</u>

a) $x^2 + 4x - 12 = 0$

abc-formel:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 16 + 48 = 64$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{-12}{2} = -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = 2 \text{ og } x = -6}}$$

b) $\lg(5 - 2x) = 1$

$$10^{\lg(5-2x)} = 10^1$$

$$5 - 2x = 10$$

$$5 - 10 = 2x$$

$$-5 = 2x \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{-5}{2}}}$$

Oppgåve 2 (2 poeng)

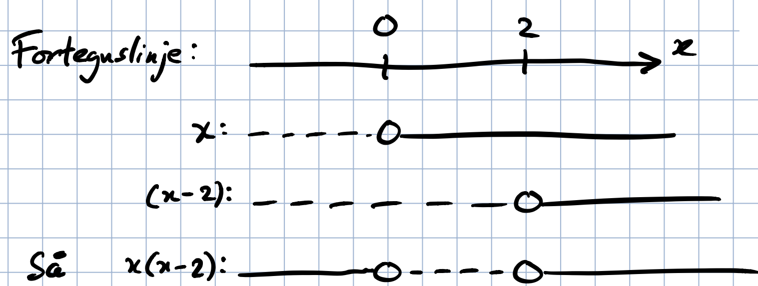
Løys ulikskapen

$$x^2 - 2x < 0$$

2

$x^2 - 2x < 0$

$x(x-2) < 0$



$\Rightarrow$ $\underline{\underline{0 < x < 2}}$

Oppgåve 3 (2 poeng)

Løys likningssystemet

$$x^2 + 4y = 4x$$
$$4x - 2y = 6$$

3

(I) $x^2 + 4y = 4x$

(II) $4x - 2y = 6$

(II) $4x - 6 = 2y$

$2x - 3 = y$

Setter inn for y i (I): $x^2 + 4\cdot(2x-3) = 4x$

$x^2 + 8x - 12 = 4x$

$x^2 + 4x - 12 = 0$

Dette er samme likning som i oppg. 1 a)

$\Rightarrow$ $x = 2$ og $x = -6$

Når $x=2$: $y = 2x - 3 = 2\cdot 2 - 3 = 1$

Og når $x=-6$: $y = 2x - 3 = 2\cdot(-6) - 3 = -12 - 3 = -15$

$\Rightarrow$ Likningssystemet har løsningene:

$x=2, y=1$ og $x=-6, y=-15$

4

a) $(a+2)^3 - a\cdot(a+2)^2$

$= (a+2)^2\big((a+2) - a\big)$

$= (a+2)^2\cdot(\cancel{a}+2-\cancel{a})$

$= 2(a+2)^2$

Oppgåve 4 (6 poeng)

Skriv så enkelt som mogleg

a) $(a+2)^3 - a\cdot(a+2)^2$

b) $\dfrac{x+1}{x+2} - \dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x+5}{x^2+x-2}$

c) $2\lg(2x^2) + \lg\left(\dfrac{5}{x}\right) - \lg(2x^3)$

b) $\dfrac{x+1}{x+2} - \dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x+5}{x^2+x-2}$

Fellesnevner: $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)} - \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+2)} - \frac{x+5}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1) - (x+1)(x+2) - (x+5)}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{(x+1)\big((x-1)-(x+2)\big)-x-5}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1-x-2)-x-5}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{(x+1)(-3)-x-5}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{-3x-3-x-5}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{-4x-8}{(x+2)(x-1)} = \frac{-4\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-1)} = \frac{-4}{x-1} = \underline{\underline{\frac{4}{1-x}}}$$

c) $2\lg(2x^2)+\lg\left(\frac{5}{x}\right)-\lg(2x^3)$

c) $2\lg(2x^2)+\lg\left(\frac{5}{x}\right)-\lg(2x^3)$

$$= 2\left(\lg 2+\lg x^2\right)+\lg 5-\lg x-\left(\lg 2+\lg x^3\right)$$

$$= 2(\lg 2+2\lg x)+\lg 5-\lg x-(\lg 2+3\lg x)$$

$$= 2\lg 2+\cancel{4\lg x}+\lg 5\cancel{-\lg x}-\lg 2\cancel{-3\lg x}$$

$$= \lg 2+\lg 5 = \lg(2\cdot 5) = \lg 10 = \underline{\underline{1}}$$

Oppgåve 5 (6 poeng)

I ei S1-gruppe kjem 7 elevar frå klasse A og 5 elevar frå klasse B. Blant desse 12 elevane skal det veljast tilfeldig ein komité som skal bestå av 3 elevar frå klasse A og 2 elevar frå klasse B.

a) Kor mange slike komitear er det mogleg å setje saman?

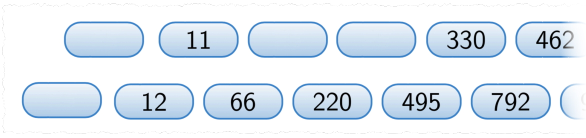
Anne og Jens er elevar i S1-gruppa. Anne går i klasse A, og Jens går i klasse B.

b) Bestem sannsynet for at både Anne og Jens blir med i komiteen.

c) Bestem sannsynet for at berre éin av dei blir med i komiteen.

Oppgåve 6 (2 poeng)

Nedanfor ser du eit utsnitt av Pascals taltrekant.
Skriv av tala, og fyll inn dei fire tala som manglar.



Oppgåve 7 (3 poeng)

Ein organisasjon driv u-hjelp. Familien til Kari gir pengar til organisasjonen. Pengane går til skolegang og barneheimsplassar for barn.

Ein månad gav familien 700 kroner. Dette finansierte skolegang for to barn i éin månad og barneheimsplass for eitt barn i éin månad.

Ein annan månad gav dei 1700 kroner. Dette finansierte skolegang for fire barn i éin månad og barneheimsplass for tre barn i éin månad.

Klassen til Kari bestemmer seg for å støtte organisasjonen slik at 20 barn får skolegang og 20 barn får barneheimsplass.

Kor mykje pengar må dei samle inn kvar månad?

5 (Denne oppgaven var også på R1-eksamen.)

Oppgåve 5 (6 poeng)

I ei S1-gruppe kjem 7 elevar frå klasse A og 5 elevar frå klasse B. Blant desse 12 elevane skal det veljast tilfeldig ein komité som skal bestå av 3 elevar frå klasse A og 2 elevar frå klasse B.

a) Kor mange slike komitear er det mogleg å setje saman?

Anne og Jens er elevar i S1-gruppa. Anne går i klasse A, og Jens går i klasse B.

b) Bestem sannsynet for at både Anne og Jens blir med i komiteen.

c) Bestem sannsynet for at berre éin av dei blir med i komiteen.

7 elever i A → skal trekke 3

5 elever i B → skal trekke 2

a) Antall måter å trekke 3 elever fra en klasse på 7: $\binom{7}{3}$

—— " —— 2 —— " —— 5: $\binom{5}{2}$

Antall forskjellige komiteer: $\binom{7}{3}\binom{5}{2} = \frac{7!}{3!\,4!} \cdot \frac{5!}{2!\,3!}$

$$= \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot \cancel{2}} \cdot \frac{5\cdot \cancel{4}}{\cancel{2}}$$

$$= 7\cdot 2\cdot 5\cdot 5$$

$$= 35\cdot 10 = \underline{\underline{350}}$$

b) Ssh for å trekke Anne fra klasse A: $\frac{3}{7}$

—— " —— Jens —— " —— B: $\frac{2}{5}$

Disse hendelsene er uavhengige.

Ssh for å trekke begge: $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{5} = \underline{\underline{\frac{6}{35}}}$

c) Ssh for å trekke nøyaktig én av dem:

P(nøyaktig én av Anne og Jens) = P(A og ikke J) + P(ikke A og J)

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{5}$$

$$= \frac{9}{35} + \frac{8}{35}$$

$$= \underline{\underline{\frac{17}{35}}}$$

Alternativt: $P(\text{nøyaktig én av dem}) = 1 - P(\text{begge}) - P(\text{ingen})$

$$= 1 - \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} - \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{35}{35} - \frac{6}{35} - \frac{12}{35}$$

$$= \frac{35-18}{35} = \underline{\underline{\frac{17}{35}}}$$

6 Pascals Talltrekant

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

enere langs kanten

Plusser 6 og 4 for å lage 10

Oppgåve 6 (2 poeng)

Nedanfor ser du eit utsnitt av Pascals taltrekant.
Skriv av tala, og fyll inn dei fire tala som manglar.

1	11	55	165	330	462	
1	12	66	220	495	792	

$11 + ? = 66$

$? = 66 - 11 = 55$

$? + 330 = 495$

$? = 495 - 330$

$? = 165$

$$\begin{array}{r} 495 \\ -330 \\ \hline 165 \end{array}$$

7

S = prisen for skolegang til eitt barn i éin mnd.

B = — " — barneheimsplass — " —

Oppgåve 7 (3 poeng)

Ein organisasjon driv u-hjelp. Familien til Kari gir pengar til organisasjonen. Pengane går til skolegang og barneheimsplassar for barn.

Ein månad gav familien 700 kroner. Dette finansierte skolegang for to barn i éin månad og barneheimsplass for eitt barn i éin månad.

Ein annan månad gav dei 1700 kroner. Dette finansierte skolegang for fire barn i éin månad og barneheimsplass for tre barn i éin månad.

Klassen til Kari bestemmer seg for å støtte organisasjonen slik at 20 barn får skolegang og 20 barn får barneheimsplass.

Kor mykje pengar må dei samle inn kvar månad?

$(\mathrm{I})\ 700 = 2S + B$

Hva blir $20S + 20B$?

$(\mathrm{II})\ 1700 = 4S + 3B$

$(\mathrm{I}) \Rightarrow B = 700 - 2S$

Setter (I) inn i (II): $1700 = 4S + 3(700 - 2S)$

$$1700 = 4S + 2100 - 6S$$

$$1700 = -2S + 2100$$

$$2S = 2100 - 1700$$

$$2S = 400$$

$$\underline{S = 200}$$

$$\begin{array}{r} \overset{10}{\cancel{2}}100 \\ -1700 \\ \hline 400 \end{array}$$

$\Rightarrow \underline{B} = 700 - 2S = 700 - 2 \cdot 200 = 700 - 400 = \underline{300}$

Så $20S + 20B = 20(S + B) = 20(200 + 300)$

$$= 20 \cdot 500$$

$$= \underline{\underline{10\,000}}$$

Oppgåve 8 (7 poeng)

Ei bedrift produserer og sel ei vare. Dei totale kostnadene K (i kroner) ved produksjon og sal av x einingar per dag er gitt ved

$$K(x) = 0{,}2x^2 + 50x + 2000 \ , \quad 0 \leq x \leq 400$$

a) Bestem $K'(100)$. Kva fortel denne verdien oss?

Overskotet O (i kroner) ved produksjon og sal av x einingar per dag er gitt ved

$$O(x) = -0{,}3x^2 + 90x - 2000 \ , \quad 0 \leq x \leq 400$$

b) Bestem den produksjonsmengda som gir størst overskot.

c) Bestem inntekta ved produksjon og sal av 100 einingar per dag.

Auka konkurranse gjer at inntektene til bedrifta endrar seg. Inntekta I (i kroner) ved produksjon og sal av x einingar per dag vil no vere gitt ved

$$I(x) = -0{,}1x^2 + a \cdot x$$

der a er ein konstant.

For ein verdi av a får bedrifta størst overskot når dei produserer og sel 100 einingar per dag.

d) Bestem denne verdien til a.

$\underline{8}$ $K(x) = 0{,}2 \cdot x^2 + 50x + 2000 \quad , \quad 0 \le x \le 400$

Oppgåve 8 (7 poeng)

Ei bedrift produserer og sel ei vare. Dei totale kostnadene K (i kroner) ved produksjon og sal av x einingar per dag er gitt ved

$$K(x) = 0{,}2x^2 + 50x + 2000 \,, \quad 0 \le x \le 400$$

a) Bestem $K'(100)$. Kva fortel denne verdien oss?

a) $K'(x) = 0{,}2 \cdot 2 \cdot x + 50$

$= 0{,}4x + 50$

$K'(100) = 0{,}4 \cdot 100 + 50$

$= 40 + 50$

$= \underline{\underline{90}}$

Når produksjonsmengden er 100 er den marginale kostnaden, dvs. kostnaden ved å produsere én ekstra vare, 90 kr.

b) $O(x) = -0{,}3x^2 + 90x - 2000 \quad , \quad 0 \le x \le 400$

Overskotet O (i kroner) ved produksjon og sal av x einingar per dag er gitt ved

$$O(x) = -0{,}3x^2 + 90x - 2000 \,, \quad 0 \le x \le 400$$

b) Bestem den produksjonsmengda som gir størst overskot.

Vi har maks overskudd når:

$O'(x) = 0$

$O'(x) = -0{,}3 \cdot 2x + 90 = -0.6x + 90$

$-0{,}6x + 90 = 0$

$90 = 0{,}6x$

$90 = \frac{6}{10} x$

$90 \cdot 10 = 6x$

$\frac{90 \cdot 10}{6} = x \Rightarrow x = \frac{\cancel{3} \cdot 30 \cdot 5 \cdot \cancel{2}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 30 \cdot 5 = \underline{\underline{150}}$

c) Bestem inntekta ved produksjon og sal av 100 einingar per dag.

c) Overskudd = Inntekt − Kostnad

$\Rightarrow$ Inntekt = Overskudd + Kostnad

$$I(x) = O(x) + K(x)$$

$$O(x) = -0{,}3x^2 + 90x - 2000$$

$$K(x) = 0{,}2 \cdot x^2 + 50x + 2000$$

$$\Rightarrow I(x) = \overbrace{-0{,}3x^2 + 90x - \cancel{2000}}^{O(x)} + \overbrace{0{,}2 \cdot x^2 + 50x + \cancel{2000}}^{K(x)}$$

$$= -0{,}1x^2 + 140x$$

$$I(100) = -0{,}1 \cdot 100^2 + 140 \cdot 100$$

$$= -0{,}1 \cdot 10000 + 14000$$

$$= -1000 + 14000$$

$$= \underline{\underline{13000}}$$

Auka konkurranse gjer at inntektene til bedrifta endrar seg. Inntekta I (i kroner) ved produksjon og sal av x einingar per dag vil no vere gitt ved

$$I(x) = -0{,}1x^2 + a \cdot x$$

der a er ein konstant.

For ein verdi av a får bedrifta størst overskot når dei produserer og sel 100 einingar per dag.

d) Bestem denne verdien til a.

d) $I(x) = -0{,}1x^2 + ax$ $\quad K(x) = 0{,}2 \cdot x^2 + 50x + 2000$

$$\Rightarrow O(x) = I(x) - K(x)$$

$$= -0{,}1x^2 + ax - 0{,}2x^2 - 50x - 2000$$

$$O(x) = -0{,}3x^2 + (a-50)x - 2000$$

Vi har størst overskudd når $O'(x) = 0$.
Vi vil at dette skal skje for $x = 100$.

$$O'(x) = -0{,}6x + a - 50$$

$$O'(100) = 0$$
$$-0{,}6 \cdot 100 + a - 50 = 0$$
$$-60 + a - 50 = 0$$
$$a = 50 + 60$$
$$\underline{\underline{a = 110}}$$

Oppgåve 9 (4 poeng)

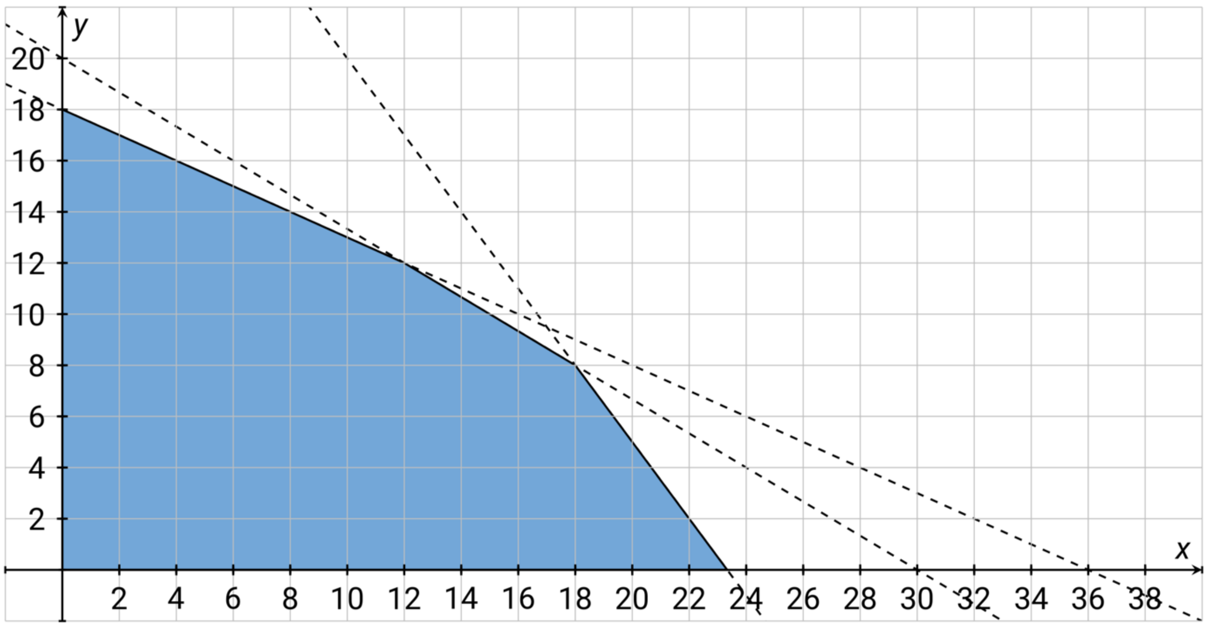
Før jul bestemmer klassen til Kari seg for å lage gåvepakker til barneheimen dei støttar. Dei har kjøpt inn 70 esker med fargestiftar, 72 sprettballar og 60 hoppestrikkar.

Dei ønskjer å lage to typar gåvepakker.

- Pakke A skal innehalde 3 esker med fargestiftar, 2 sprettballar og 2 hoppestrikkar.
- Pakke B skal innehalde 2 esker med fargestiftar, 4 sprettballar og 3 hoppestrikkar.

La x vere talet på gåvepakker av type A og y talet på gåvepakker av type B som dei kan lage.

a) Forklar at dei moglege verdiane for x og y må ligge i det farga området nedanfor.



b) Kva er det maksimale talet på gåvepakker dei til saman kan lage av type A og B?

9 a) Vi har
- 70 fargestifter F
- 72 sprettballer S
- 60 hoppestrikker H

Pakke A: 3F, 2S, 2H

Pakke B: 2F, 4S, 3H

- Pakke A skal innehalde 3 esker med fargestiftar, 2 sprettballar og 2 hoppestrikkar.
- Pakke B skal innehalde 2 esker med fargestiftar, 4 sprettballar og 3 hoppestrikkar.

La x være antall pakker av typen A

La y ——— " ——— B

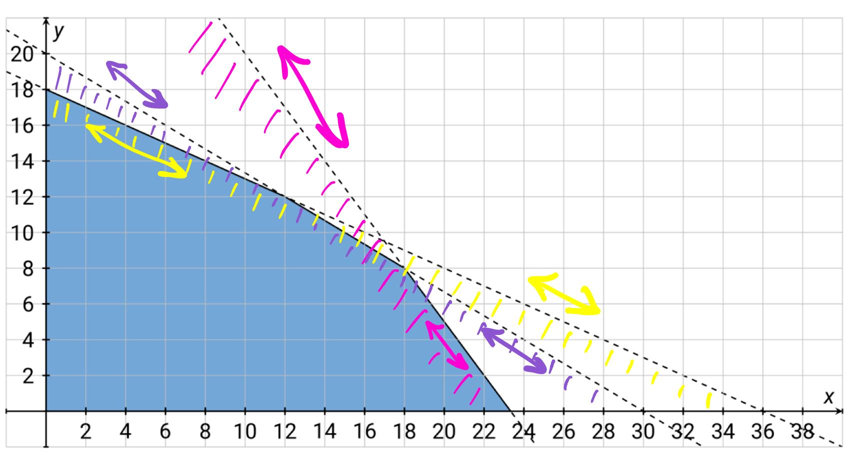
Antall brukte fargestifter blir da: $3x + 2y \leq 70$

som gir oss linjen $3x + 2y = 70$

$2y = 70 - 3x$

$\boxed{y = 35 - \frac{3}{2}x}$

a) Forklar at dei moglege verdiane for x og y må ligge i det farga området nedanfor.



Antall brukte sprettballer blir da: $2x + 4y \leq 72$

som gir oss linjen: $2x + 4y = 72$

$$4y = 72 - 2x$$

$$\boxed{y = 18 - \frac{1}{2}x}$$

$72 : 4 = 18$
-4
32
-32
0

Antall brukte hoppestrikker: $2x + 3y \leq 60$

linjen: $2x + 3y = 60$

$$3y = 60 - 2x$$

$$\boxed{y = 20 - \frac{2}{3}x}$$

Alle tre ulikhetene må være oppfylt samtidig:

$$3x + 2y \leq 70$$
$$2x + 4y \leq 72$$
$$2x + 3y \leq 60$$

slik at vi sitter igjen med det skraverte området.

b) Kva er det maksimale talet på gåvepakker dei til saman kan lage av type A og B?

b) Maks antall pakker: Vil ha summen $x+y$ størst mulig.

$S(x,y) = x + y$

I lineær optimering vet vi at $S(x,y)$ alltid vil være størst i et av hjørnepunktene.

Vi har 4 hjørnepunkter:

$\rightarrow (0, 18) \Rightarrow S(0,18) = 0 + 18 = 18$

$\rightarrow (12, 12) \Rightarrow S(12,12) = 12 + 12 = 24$

$\rightarrow (18, 8) \quad \boxed{\Rightarrow S(18,8) = 18 + 8 = 26}$

$\rightarrow (\text{ca } 23{,}5,\ 0) \Rightarrow S(\text{ca } 23{,}5,\ 0) = \text{ca. } 23{,}5$

$\Rightarrow$ Vi maksimerer antall pakker ved å lage 18 pakker av typen A og 8 pakker av typen B.