LF Eksamen R2 H2019 Del 1 emilga

Del 1

Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 2\cos(\pi x)$

b) $g(x) = \cos^2 x \cdot \sin x$

1 a) $f(x) = 2\cos(\pi x)$

$\Rightarrow f'(x) = -2\pi \sin(\pi x)$

b) $g(x) = \cos^2 x \cdot \sin x$

Produktregel & kjerneregel:

$g'(x) = (\cos^2 x)' \cdot \sin x + \cos^2 x (\sin x)'$

$= 2\sin x \cdot \cos x \cdot \sin x + \cos^2 x \cdot \cos x$

$g'(x) = 2\sin^2 x \cdot \cos x + \cos^3 x$

Oppgave 2 (6 poeng)

Bestem integralene

a) $\int_{-1}^{1} (2x^3 + 3x - 1)\,dx$

b) $\int \frac{8x}{\sqrt{2x^2 - 1}}\,dx$

c) $\int \frac{2}{(x+3)(x+1)}\,dx$

2 a) $\int_{-1}^{1} (2x^3 + 3x - 1)\,dx$

$= \underbrace{2\int_{-1}^{1} x^3\,dx}_{=0} + \underbrace{3\int_{-1}^{1} x\,dx}_{=0} - \int_{-1}^{1} dx = -(1-(-1)) = -2$

fordi x^3 og x er odde funksjoner over et symmetrisk intervall.

b) $\int \frac{8x}{\sqrt{2x^2-1}}\,dx$

Kjerneregel: $u = 2x^2 - 1$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x \Rightarrow \frac{du}{4x} = dx$

$= \int \frac{8x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{4x} = \int \frac{2}{\sqrt{u}}\,du = 2\int u^{-1/2}\,du = 2\frac{1}{(\frac{1}{2})} u^{1/2} + C = 4\sqrt{u} + C$

$$= 4\sqrt{2x^2-1} + C$$

Sjekker svaret ved å derivere:

$$\left(4\sqrt{2x^2-1}+C\right)' = 4\left(\sqrt{2x^2-1}\right)' = 4\,\frac{(2x^2-1)'}{2\sqrt{2x^2-1}}$$

$$= 4\,\frac{4x}{2\sqrt{2x^2-1}}$$

$$= \frac{8x}{\sqrt{2x^2-1}} \quad \text{OK!}$$

c) $$\int \frac{2}{(x+3)(x+1)}\,dx = \int\left(\frac{-1}{x+3}+\frac{1}{x+1}\right)dx = -\ln|x+3| + \ln|x+1| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + C$$

Delbrøkoppspalting: $\frac{2}{(x+3)(x+1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1} \quad \Big| \cdot (x+3)(x+1)$

$$2 = A(x+1) + B(x+3)$$

$$2 = (A+B)x + A + 3B$$

$$\Rightarrow A+B=0 \quad \text{og} \quad A+3B=2$$

$$\Rightarrow A = -B \quad \Rightarrow \quad -B+3B=2$$

$$2B = 2$$

$$\Rightarrow B = 1 \quad \text{og} \quad A = -1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(x+3)(x+1)} = \frac{-1}{x+3} + \frac{1}{x+1}$$

3

Oppgave 3 (4 poeng)

a) Bestem summen av den aritmetiske rekken

$$7+11+\cdots+479+483$$

Den uendelige geometriske rekken $a_1+a_2+a_3+\cdots$ konvergerer. Du får vite at $a_2=6$ og at summen av rekken er 24.

b) Bestem a_1.

a)

Aritmetisk rekke: $a_n = a_1 + (n-1)d$

med: $a_1 = 7$ og $d = 11-7 = 4$

Så: $a_n = 7 + (n-1)\cdot 4$

Hvilket nummer n er $a_n = 483$ i rekken?

$$483 = 7 + (n-1)\cdot 4$$

$$483 - 7 = (n-1)\cdot 4$$

$$\frac{476}{4} = n-1$$

$$119 = n-1$$

$$\underline{n = 120}$$

$$\begin{array}{r} 483 \\ -\ \ 7 \\ \hline 476 \end{array}$$

$476 : 4 = 119$

$$\begin{array}{l} -4 \\ \hline \ \ 7 \\ -4 \\ \hline \ \ 36 \\ -36 \\ \hline \ \ \ 0 \end{array}$$

Så summen er: $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$

$$S_{120} = \frac{a_1 + a_{120}}{2}\cdot 120$$

$$= \frac{7+483}{2}\cdot 120$$

$$= \frac{490}{2}\cdot 120$$

$$= 245 \cdot 120$$

$$\underline{\underline{= 29\,400}}$$

$$\begin{array}{r} 245\cdot 120 \\ 000 \\ 490\ \ \\ 245\ \ \ \ \\ \hline 29400 \end{array}$$

b) Geometrisk rekke:

$$S = a_1 + a_2 + \dots$$

$a_2 = 6$ og $S = 24$. Vet at $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$ for $|k| < 1$.

Så $a_2 = a_1 \cdot k$ og: $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

$$= a_1 (1 + k + k^2 + \dots)$$

$$S = a_1 \left(\frac{1}{1-k} \right) = \frac{a_1}{1-k}$$

Altså har vi likningene: $6 = a_1 \cdot k$ og $24 = \frac{a_1}{1-k}$

$$24(1-k) = a_1 \quad | \cdot k$$

$$24(1-k) \cdot k = a_1 k$$

$a_1 k = 6$

$$24(1-k)k = 6$$

$$4(1-k)k = 1$$

$$\Rightarrow -4k^2 + 4k - 1 = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-4)}$$

$$\underline{k} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{-8} = \underline{\frac{1}{2}}$$

Så $6 = a_1 k \Rightarrow 6 = a_1 \cdot \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a_1 = 12}}$$

4

Oppgave 4 (4 poeng)

Løs likningene

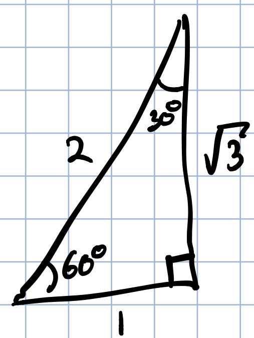
a) $2\sin(2x) = 1$, der $x \in [0, \pi]$

b) $2\cos^2 x - \cos x = 1$, der $x \in [0, 4\pi]$

a) $2\sin(2x) = 1$ for $x \in [0, \pi]$

$\sin(2x) = \frac{1}{2}$

$30°-60°-90°$- Trekant



$\sin(30°) = \frac{1}{2}$

$30° = \frac{\pi}{6}$ rad

Setter $\varphi = 2x$

$\sin(\varphi) = \frac{1}{2}$

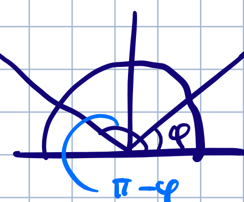
$\Rightarrow$ (I) $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

og (II) $\varphi = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$= \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

[Enhets-sirkel:

Husk at $\sin(\cdot)$ er symmetrisk om y-aksen:



$\sin(\varphi) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin(\pi - \varphi) = \frac{1}{2}$]

(I) gir oss $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$x = \frac{\pi}{12} + \pi k$ $\Rightarrow$ Bare $k=0$ gir oss en løsning $x = \frac{\pi}{12}$ som er innenfor intervallet $x \in [0, \pi]$.

(II) gir oss: $\varphi = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

$2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

$x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$ $\Rightarrow$ Bare $x = \frac{5\pi}{12}$ er en løsning

$$\Rightarrow \quad x \in \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \right\}$$

b) $2\cos^2 x - \cos x = 1 \,, \quad x \in [0, 4\pi]$

Setter $u = \cos x$

$$\Rightarrow \quad 2u^2 - u = 1$$

$$2u^2 - u - 1 = 0$$

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{4}{4} = 1 \\ \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Så $u = 1$ eller $u = \frac{-1}{2}$

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0 + 2\pi k \Rightarrow \underline{x = 0, 2\pi, 4\pi}$

$\cos x = \frac{-1}{2}$ Vet at $\cos(60°) = \frac{1}{2}$ (fra enhetssirkelen)

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

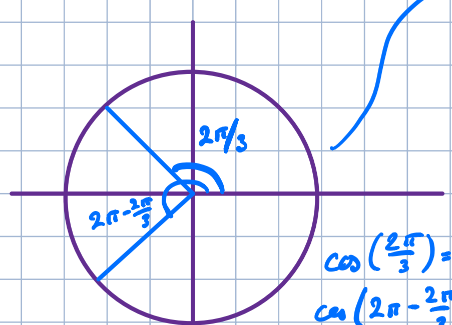
$$\Rightarrow \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$$

fordi $\cos(\cdot)$ skifter fortegn når vi speiler den om y-aksen på enhetssirkelen.

Så: $\cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow \underline{x = \frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}}$

og $\quad x = \left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) + 2\pi k$

$x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow \underline{x = \frac{4\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}}$



$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$

$\cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$

$$\Rightarrow \quad x \in \left\{ 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi, \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, 4\pi \right\}$$

5

$f(x) = \sin^2 x$ $\Rightarrow f(x) \geq 0$ (aldri negativ!)

Har nullpkt. som $\sin x \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$

$f(x)$ har topp.pkt når $\sin x$ har toppunkt $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

og når $\sin x$ har bunnpkt: $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$

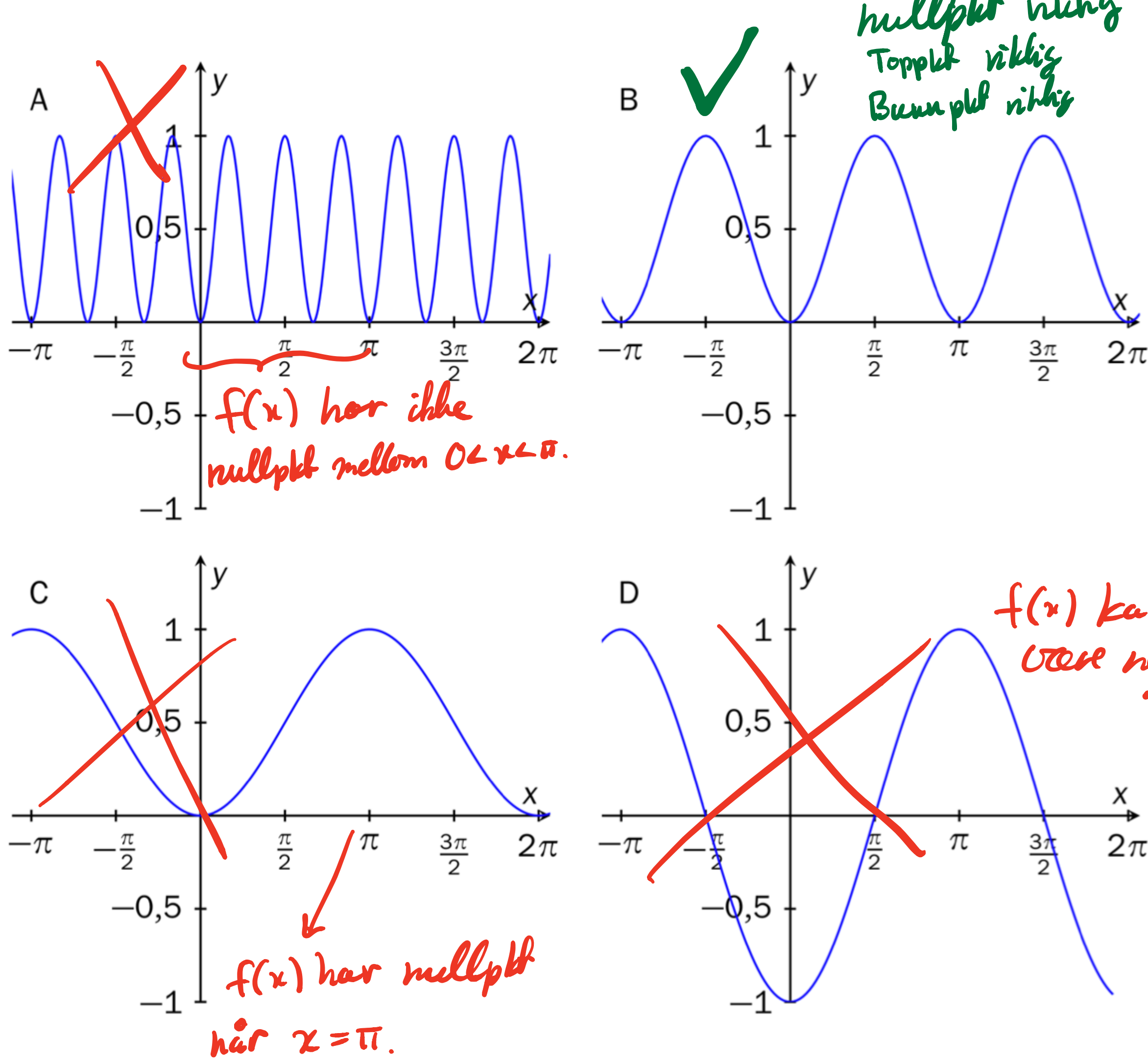
Graf B

Oppgave 5 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \sin^2 x$$

Nedenfor ser du fire grafer. Bestem hvilken av disse som er grafen til f. Begrunn svaret.



6

Oppgave 6 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

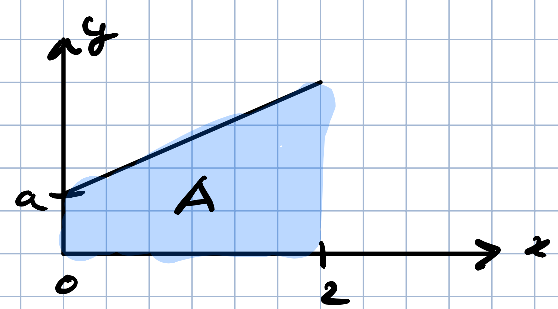
$$f(x) = x + a \ , \quad 0 \le x \le 2 \ , \ a > 0$$

a) Bestem a slik at arealet under grafen til f blir 3.

Grafen til f dreies $360°$ om x-aksen. Vi får da en rett avkortet kjegle.

b) Bestem a slik at volumet av den rett avkortede kjeglen blir $\frac{98}{3}\pi$.

a) $f(x) = x + a$ for $0 \le x \le 2$, $a > 0$



$$A = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (x+a)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + ax\right]_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2a = 2 + 2a$$

Vil ha $A = 3 \Rightarrow \quad 3 = 2 + 2a$

$\qquad 1 = 2a \Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{1}{2}}}$

b) Omdreiningslegeme: $dV = \pi f^2(x)\,dx$

$$V = \int_0^2 dV = \int_0^2 \pi f^2(x)\,dx = \pi \int_0^2 (x+a)^2\,dx$$

$$= \pi \int_0^2 (x^2 + 2ax + a^2)\,dx = \pi\left[\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + a^2x\right]_0^2$$

$$= \pi\left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 + a\cdot 2^2 + a^2\cdot 2\right)$$

$$= \pi\left(\frac{8}{3} + 4a + 2a^2\right) = \pi\left(\frac{8 + 12a + 6a^2}{3}\right)$$

Vil ha: $V = \frac{98}{3}\pi \implies 8 + 12a + 6a^2 = 98$

$$12a + 6a^2 = 90$$

$$4a + 2a^2 = 30$$

$$2a + a^2 = 15$$

$$a^2 + 2a - 15 = 0$$

$$(a+5)(a-3) = 0$$

$$\implies a = -5 \text{ eller } a = 3$$

Altså $\underline{\underline{a = 3}}$ (siden vi må ha $a \geq 0$.)

7

Oppgave 7 (5 poeng)

Den rette linjen ℓ er gitt ved parameterframstillingen

$$\ell : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 6 + t \end{cases}$$

a) Bestem skjæringspunktet mellom linjen ℓ og xz-planet.

Linjen ℓ står vinkelrett på et plan α. Punktet $P(2, -2, 6)$ ligger i planet α.

b) Bestem en likning for planet α.

c) Bestem skjæringspunktet mellom α og ℓ.

a) Et pkt i xz-planet har y-koordinat lik 0.

$\implies \ell$ skjærer xz-planet for $t = 2$:

$$\ell : \begin{cases} x = 1 + 2t = 1 + 2\cdot 2 = 5 \\ y = 2 - t = 2 - 2 = 0 \\ z = 6 + t = 6 + 2 = 8 \end{cases} \implies \ell \text{ skjærer } xz\text{-planet i:}$$

$$P = (5, 0, 8).$$

b) $l \perp$ plan $\alpha \Rightarrow \vec{r}_l \parallel \vec{n}_\alpha$ og $\vec{r}_l = [2, -1, 1]$

Altså er $\vec{n}_\alpha = \vec{r}_l = [2, -1, 1]$ en normalvektor for planet.
$P(2, -2, 6)$ ligger i planet, altså blir planlikningen:

$$\vec{n}_\alpha \cdot [x-2, y-(-2), z-6] = 0$$

$$2(x-2) - 1\cdot(y+2) + 1(z-6) = 0$$

$$2x - 4 - y - 2 + z - 6 = 0$$

$$\underline{\underline{\alpha: \quad 2x - y + z - 12 = 0}}$$

c) Skjæringspunktet mellom l og α:

$l: \; P = (1+2t, \; 2-t, \; 6+t)$ må passe inn i planlikningen.

$$\alpha: \quad 2x - y + z - 12 = 0$$

$$2(1+2t) - (2-t) + (6+t) - 12 = 0$$

$$\cancel{2} + 4t - \cancel{2} + t + 6 + t - 12 = 0$$

$$6t - 6 = 0$$

$$\underline{t = 1}$$

Altså er skjæringspunktet $P = (1+2t, \; 2-t, \; 6+t)$

$$= (1 + 2\cdot 1, \; 2-1, \; 6+1)$$

$$\underline{\underline{= (3, 1, 7)}}$$

8

Oppgave 8 (4 poeng)

Vi har gitt differensiallikningen

$$y' - 2y = x \ , \ \ y(0) = 1$$

a) Løs differensiallikningen.

b) Bestem likningen for tangenten til grafen til y i punktet $(0, 1)$.

a) $y' - 2y = x \ , \ y(0) = 1$

Integrerende faktor: $e^{\int -2\,dx} = e^{-2x}$

$$y' - 2y = x \quad \Big/ \cdot e^{-2x}$$

$$e^{-2x} y' - 2e^{-2x} y = x e^{-2x}$$

$$\left(y e^{-2x} \right)' = x e^{-2x}$$

$$y e^{-2x} = \int x e^{-2x} \, dx$$

$$\int \underset{u}{x} \, \underset{v'}{e^{-2x}} \, dx = \left| \begin{array}{ll} \text{Delvis integrasjon:} & \\ u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-2x} \Rightarrow & v = \frac{-1}{2} e^{-2x} \end{array} \right| = uv - \int u'v \, dx$$

$$= \frac{-1}{2} x e^{-2x} - \int \frac{-1}{2} e^{-2x} \, dx$$

$$= \frac{-1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} e^{-2x} + C$$

$$= \frac{-1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C$$

Så:

$$y e^{-2x} = \int x e^{-2x} \, dx$$

$$y e^{-2x} = \frac{-1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C$$

$$y(x) = \frac{-1}{2} x - \frac{1}{4} + C e^{2x}$$

Og siden $y(0) = 1 \Rightarrow y(0) = 0 - \frac{1}{4} + C = 1$

$\Rightarrow \quad C = 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow C = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y(x) = \frac{-1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{2x}}}$

b) Tangenten til y i punktet $(0,1)$

Tangenten har stigningstall y'

$$y' - 2y = x$$

$$\Rightarrow y' = x + 2y$$

$y' = 0 + 2 \cdot 1 = 2$ i punktet $(0,1)$

Ettpunktsformel: $y - y_0 = a(x - x_0)$

$$y - 1 = 2(x - 0)$$

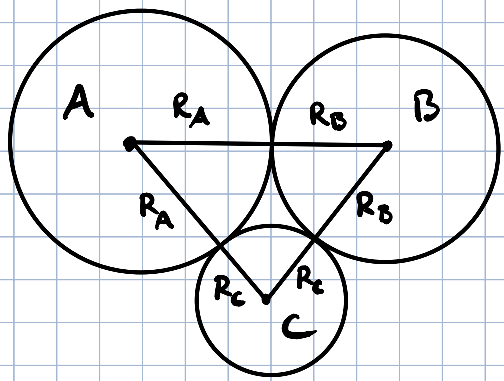
$$\underline{\underline{y = 2x + 1}}$$

9

Oppgave 9 (2 poeng)

Punktene $A(1,-1,0)$, $B(1,2,4)$ og $C(5,1,-4)$ er sentrum i hver sin kuleflate. De tre kuleflatene tangerer hverandre.

Bestem radien til hver av de tre kulene.



$$\vec{AB} = [1-1, 2-(-1), 4-0]$$
$$= [0, 3, 4]$$
$$|\vec{AB}| = \sqrt{0^2+3^2+4^2} = 5$$

$$\vec{BC} = [5-1, 1-2, -4-4]$$
$$= [4, -1, -8]$$
$$|\vec{BC}| = \sqrt{4^2+1^2+8^2}$$
$$= \sqrt{81} = 9$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ +\ \ 1 \\ +\ 64 \\ \hline = 81 \end{array}$$

$$\vec{CA} = [5-1, 1-(-1), -4-0]$$
$$= [4, 2, -4]$$
$$|\vec{CA}| = \sqrt{4^2+2^2+4^2}$$
$$= \sqrt{36} = 6$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ +\ \ 4 \\ +\ 16 \\ \hline = 36 \end{array}$$

At de tre kuleflatene tangerer gir oss likningene:

$$R_A + R_B = |\vec{AB}|$$
$$R_A + R_C = |\vec{AC}|$$
$$R_B + R_C = |\vec{BC}|$$

Så:

$$\text{(I)} \quad R_A + R_B = 5$$
$$\text{(II)} \quad R_A + R_C = 6$$
$$\text{(III)} \quad R_B + R_C = 9$$

$$\text{(II)}-\text{(I)}: \quad \cancel{R_A} + R_C - \cancel{R_A} - R_B = 6-5$$
$$(*) \quad R_C - R_B = 1$$

$$(*)+\text{(III)}: \quad R_C - \cancel{R_B} + \cancel{R_B} + R_C = 1+9$$
$$2R_C = 10$$
$$\underline{R_C = 5}$$

$$\text{(II)} \quad \underline{R_A} = 6 - R_C = 6-5 = \underline{1}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{(I)} \quad \underline{R_B} = 5 - R_A = 5-1 = \underline{4}$$

Så radiene i de to kulene er:

$$\underline{\underline{R_A = 1, \quad R_B = 4, \quad \text{og} \quad R_C = 5}}$$

10

Oppgave 10 (2 poeng)

Bruk induksjon til å vise at $n^3 - n$ er delelig med 3 for alle $n \in \mathbb{N}$.

Anta at $n^3 - n$ er delbar med 3 for $n = k$.

Vil vise at dette impliserer at $n^3 - n$ er delbar med 3 også for $n = k+1$.

$$
\begin{aligned}
(k+1)^3 - (k+1) &= (k+1)(k+1)^2 - k - 1 \\
&= (k+1)(k^2 + 2k + 1) - k - 1 \\
&= k^3 + 2k^2 + k + k^2 + 2k + 1 - k - 1 \\
&= k^3 + 3k^2 + 3k - k \\
&= \underbrace{k^3 - k}_{\text{er delbar med } 3} + \underbrace{3(k^2 + k)}_{\text{er delbar med } 3}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ hvis $n^3 - n$ er delbar med 3 for $n = k$, så er $n^3 - n$ også delbar med 3 for $n = k+1$.

Sjekker at $n^3 - n$ er delbar med 3 for $n = 1$:

$1^3 - 1 = 0$, som er delbar med 3.

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{n^3 - n \text{ er delbar med 3 for alle } n \in \mathbb{N}.}}$