1 a) $f(x) = 2\cos(\pi x) \Rightarrow f'(x) = -2\pi \sin(\pi x)$

b) $g(x) = \underbrace{\cos^2 x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v} \Rightarrow g'(x) = \overbrace{-2\cos x \cdot \sin x}^{u'} \cdot \overbrace{\sin x}^{v} + \overbrace{\cos^2 x}^{u} \cdot \overbrace{\cos x}^{v'}$

$= -2\cos x \cdot \sin^2 x + \cos^3 x$

$= \cos x \left(-2\sin^2 x + \cos^2 x\right)$

$= \cos x \left(1 - 3\sin^2 x\right)$

2 a) $\int_{-1}^{1} (2x^3 + 3x - 1)\,dx = \int_{-1}^{1} (-1)\,dx = (-x)\Big|_{-1}^{1} = -2$

Antisymmetri

b) $\int \frac{8x}{\sqrt{2x^2-1}}\,dx = \int \frac{8x}{u^{\frac{1}{2}}} \frac{du}{4x} = 2\int u^{-\frac{1}{2}}\,du$

$= 4\sqrt{u}$

$= 4\sqrt{2x^2-1} + C$

c) $\int \frac{2}{(x+3)(x+1)}\,dx$

$= \int \frac{A}{x+3}\,dx + \int \frac{B}{x+1}\,dx$

Ser at $A = -1$, $B = 1$

$= \int \frac{A(x+1) + B(x+3)}{(x+3)(x+1)}\,dx$

$= -\ln|x+3| + \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + C$

3

a) $\underline{S_n} = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(7+483)}{2} = \underline{245 \cdot n}$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = \underline{7 + (n-1) \cdot 4 = 483}$

$\underline{4n = 480}$

$n = 120$

$S_n = 245 \cdot 120 = 24500 + 4900 = \underline{\underline{29400}}$

b) $S_\infty = a_1 \cdot \frac{1}{1-K} = 24$ $\quad a_1 \cdot K = a_2 = 6$

$S_\infty = \frac{6}{K} \cdot \frac{1}{1-K} = 24$

$\frac{1}{K-K^2} = 4$

$1 = 4k - 4k^2$

$4k^2 - 4k + 1 = 0$

$k = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \underline{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{a_1 = 12}}$

$(12 + 6 + 3 + 1{,}5 + \ldots = 24)$

4

a) $2\sin(2x)=1 \qquad x\in[0,\pi]$

$\sin(2x)=\frac{1}{2}$

perioden $= \frac{2\pi}{2} = \pi$

$2x=\frac{\pi}{6} \vee \frac{5\pi}{6}$

$x=\frac{\pi}{12} \vee \frac{5\pi}{12}$

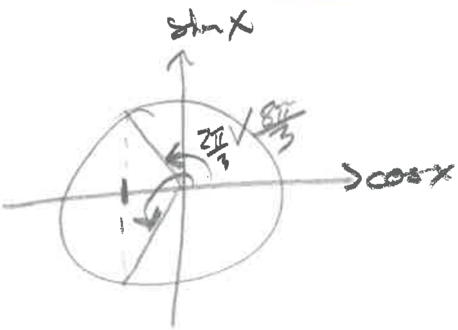
b) $2\cos^2 x-\cos x-1=0 \qquad x\in[0,4\pi]$

$\cos x = \frac{+1\pm\sqrt{1+4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}$

$= \frac{1\pm 3}{4} = 1 \vee -\frac{1}{2}$

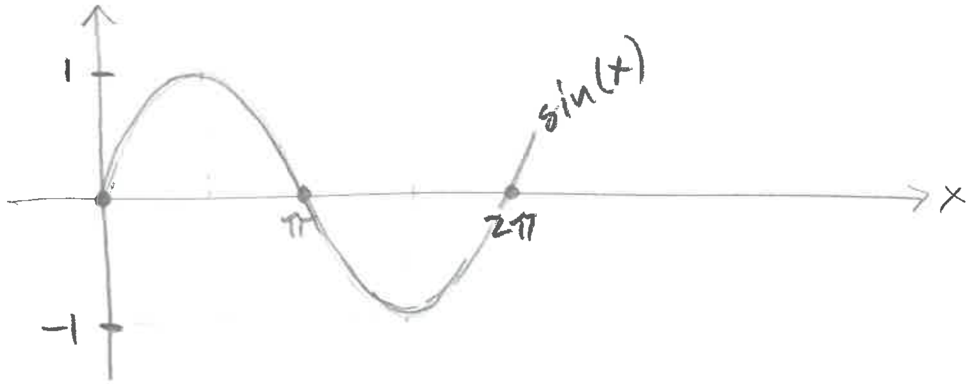
$\Rightarrow x=0 \vee 2\pi \vee 4\pi \qquad (\cos x=1)$

$x=\frac{2\pi}{3} \vee \frac{4\pi}{3} \vee \frac{8\pi}{3} \vee \frac{10\pi}{3}$



(5)

$f(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2$



Når vi kvadrerer en funksjon vil vi få de samme nullpunktene, dermed må det være B

(6) a) $A = \int_0^2 (x+a)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + ax\right)_0^2 = 2 + 2a = 3$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$

b) $V = \pi \int_0^2 (x+a)^2\,dx$

$= \pi \frac{(x+a)^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{\pi}{3}\left((2+a)^3 - a^3\right) = \frac{98\pi}{3}$

$(4+4a+a^2)(2+a) - a^3 = 98$

$8 + 8a + 2a^2 + 4a + 4a^2 = 98$

$6a^2 + 12a - 90 = 0$

$a^2 + 2a - 15 = 0$

$a = 3$

7 a) xz-planet: $y=0$

$\boxed{\text{altså} \quad y = 2 - t = 0 \Rightarrow t=2}$

$x = 1 + 2t = 1 + 2\cdot 2 = \underline{\underline{5}}$

$z = 6 + t = 6 + 2 = \underline{\underline{8}}$

b) $\boxed{a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0}$

$2\cdot(x-2) - 1\cdot(y+2) + 1\cdot(z-6) = 0$

$\underline{\underline{2x - y + z = 12}}$

c) $\boxed{2\underbrace{(1+2t)}_{x} - \underbrace{(2-t)}_{y} + \underbrace{(6+t)}_{z} = 12}$

$4t + t + t + \cancel{2} \cancel{-2} + 6 = 12$

$6t = 6$

$t = 1$

$x = 1 + 2\cdot 1 = \underline{\underline{3}}$

$y = 2 - 1 = \underline{\underline{1}}$

$z = 6 + 1 = \underline{\underline{7}}$

8

$y' - 2y = x \qquad y(0) = 1$

a) Multipliserer med integrerende faktor og integrerer:

$$ye^{-2x} = \int \overset{u}{x}\,\overset{v'}{e^{-2x}}\,dx$$

$$= u \cdot v - \int u'v\,dx$$

$$= x \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} + \int \frac{e^{-2x}}{2}\,dx$$

$$= -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C$$

$y(0) = 1$ gir $C = \frac{5}{4}$

$$\Rightarrow y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{2x}$$

b) $y - y(0) = y'(0)(x - 0)$

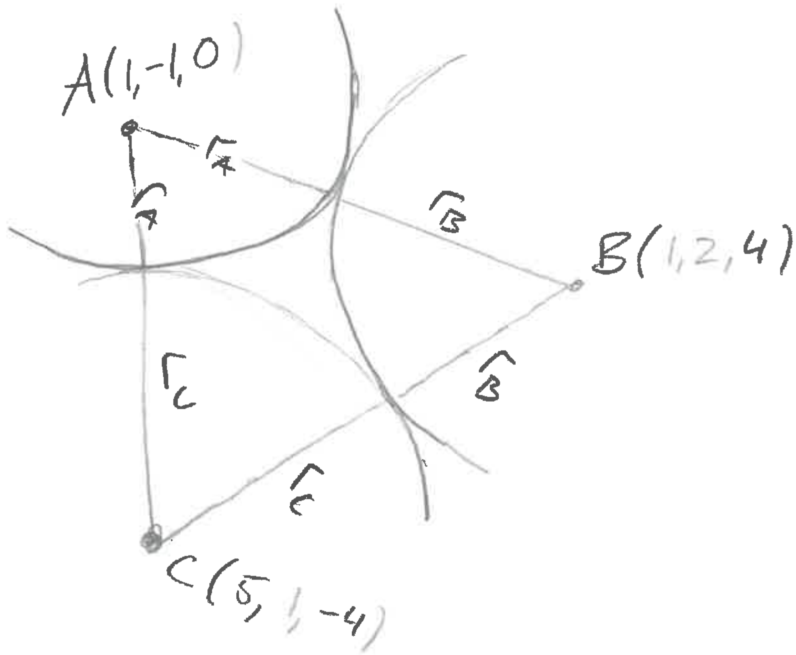
$y - 1 = 2(x - 0)$

$y = 2x + 1$

$y' = x + 2y$

$y'(0) = 0 + 2 \cdot 1$

9



$AB = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$AC = \sqrt{4^2+2^2+4^2} = 6$

$BC = \sqrt{4^2+1^2+8^2} = 9$

$r_A + r_B = 5$

$r_A + r_C = 6$

$r_B + r_C = 9$

$(r_A + r_C) - (r_A + r_B) = 5 - 6$

$r_C - r_B = 1$

$(r_B + r_C) + (r_C - r_B) = 9 + 1$

$2r_C = 10$

$r_C = 5$

$r_B = 4 \quad (r_C - r_B = 1)$

$r_A = 1 \quad (r_A + r_B = 5)$

(10) $n^3 - n$ delelig med 3 for $n \in \mathbb{N}$

$\Longleftrightarrow$

$\boxed{n^3 - n = 3 \cdot (m-1) \text{ hvor } m \in \mathbb{N}}$

BEVIS:

(1) $n=1$: $1^3 - 1 = 0$ ← Delelig på 3.

(2) Antar at $k^3 - k = 3 \cdot (m-1)$ hvor k er et heltall, og undersøker om dette medfører at $(k+1)^3 - (k+1)$ er delelig på 3:

$$(k+1)^3 - (k+1)$$

$$= (k^2+2k+1)(k+1) - k - 1$$

$$= k^3 + 3k^2 + 3k \cancel{+1} - k \cancel{-1}$$

$$= \underbrace{k^3 - k}_{3(m-1)} + 3(k^2+k)$$

$$= 3(m - 1 + k^2 + k)$$ ← Delelig på 3.

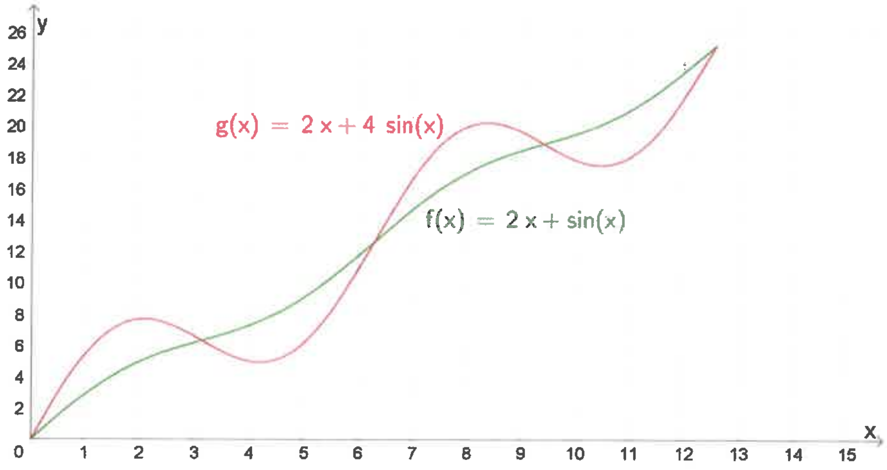
Altså er $n^3 - n$ delelig på 3 når $n=1$, og delelig på 3 når $n=k+1$ dersom det er delelig på 3 når $n=k$.

Dermed er uttrykket delelig på 3 for alle $n \in \mathbb{N}$

Q.E.D.

Oppgave 1

a) Tegner grafene i GeoGebra;



b) Arealene under begge grafene er $\underline{\underline{16\pi^2}}$.

CAS

1 Af := Integral(f, 0, 4pi)

→ $Af := 16\pi^2$

2 Ag := Integral(g, 0, 4pi)

→ $Ag := 16\pi^2$

c) Volumet av de to omdreiningslegemene står i henholdsvis felt 3 og 4 nedenfor.

3 Vf := pi*Integral(f^2, 0, 4pi)

→ $Vf := \frac{256}{3}\pi^4 - 14\pi^2$

4 Vg := pi*Integral(g^2, 0, 4pi)

→ $Vg := \frac{256}{3}\pi^4 - 32\pi^2$

d) Jeg definerer funksjonen i CAS (felt 5) og regner ut arealet (felt 6). Vi ser at arealet ikke inneholder h, og er dermed uavhengig av h, som var det som skulle vises.

5 h(x) := 2x + k*sin(x)

→ $h(x) := k \sin(x) + 2x$

6 F := Integral(h, 0, 4pi)

→ $F := 16\pi^2$

e) Jeg definerer volumet av omdreiningslegemet (felt 7) og deriverer uttrykket (felt 8). Utfra uttrykket for den deriverte (felt 8) ser vi at volumet synker når $k < 4$ og vokser når $k > 4$. Dermed er volumet på sitt minste når $\underline{\underline{k = 4}}$.

7 Vh(k) := pi*Integral(h^2, 0, 4pi)

→ $Vh(k) := \frac{256}{3}\pi^4 + 2k^2\pi^2 - 16k\pi^2$

8 Faktoriser(Derivert(Vh))

→ $4\pi^2(k-4)$

Oppgave 2

a) Dette kan løses som et ligningssett med tre ukjente;

▸ CAS

1	Løsninger({2x-2y-z=4, 2x+y-z=-2, 3y+2z=6}, {x, y, z})
	→ $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

Planene skjærer hverandre i punktet $\underline{\underline{(3, -2, 6)}}$.

b) xy-planet gir ligningen $z = 0$.

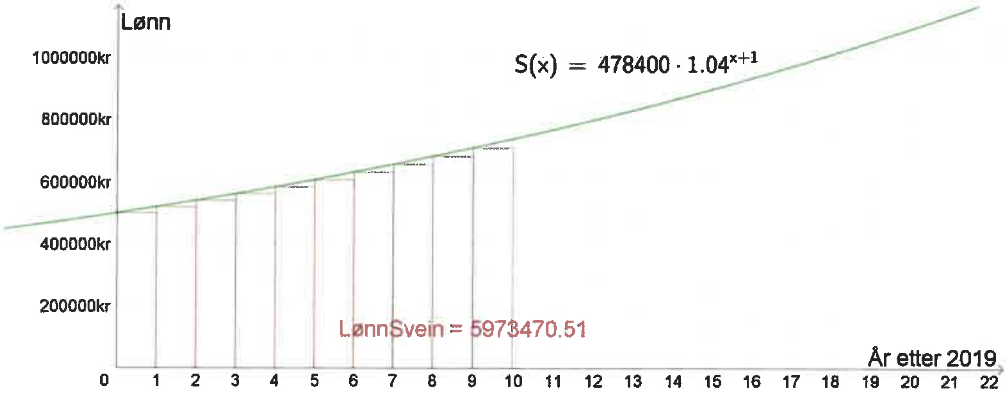
For å bestemme hjørnene til pyramiden bestemmer jeg skjæringen mellom to og to plan og xy-planet, før jeg definerer pyramiden utfra skjæringspunktene og toppunktet fra a);

2	Løsninger({2x-2y-z=4, 2x+y-z=-2, z=0}, {x, y, z})
	→ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
3	Løsninger({2x-2y-z=4, z=0, 3y+2z=6}, {x, y, z})
	→ $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
4	Løsninger({z=0, 2x+y-z=-2, 3y+2z=6}, {x, y, z})
	→ $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
5	Pyramide((3, -2, 6), (0, -2, 0), (4, 2, 0), (-2, 2, 0))
	→ 24

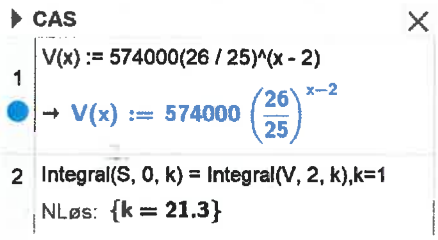
Volumet av pyramiden er $\underline{\underline{24}}$.

Oppgave 3

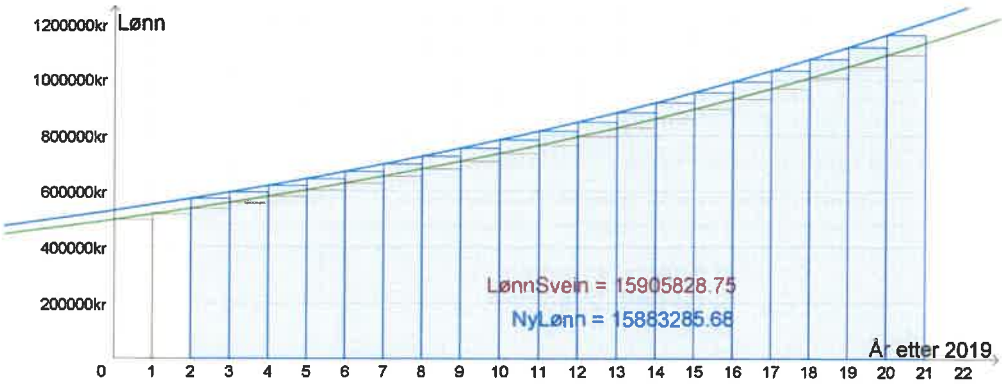
a) Jeg definerer funksjonen som beskriver lønnen x år etter 2019 og bruker kommandoen **SumUnder** til å vise at lønnen til Svein blir ca. 5,97 millioner, som var det som skulle vises.



b) For å løse det enklest mulig i CAS bruker jeg integral (tilsvarer en kontinuerlig lønnsøkning) og finner at lønna blir det samme 21 år etter 2019, altså at han må jobbe til og med år 2040 før etterutdanningen begynner å gi avkasting.



For å kontrollere at utregningen stemmer bra med trinnvis lønnsvekst kan vi teste løsningen med **SumUnder**-kommandoen[1];



[1] Dette stemmer bra, med et avvik på bare ≈ 23000/15905829 ≈ 0,14 %.

Oppgave 4

a) Når farten y øker til k får vi at akselerasjonen blir

$$y' = 9{,}81\left(1 - \frac{k^2}{k^2}\right) = 0$$

dermed vil ikke farten øke noe mer, altså er den største verdien på farten $v_a = k$.

b) Jeg setter inn opplysningene fra oppgaveteksten og får det som skulle vises;

▸ CAS

1 v(x) := LøsODE(y' = 9.81*(1-y^2/1.8^2), (0, 0))

$\approx v(x) := \dfrac{-9\,e^{-10.9x} + 9}{5\,e^{-10.9x} + 5}$

MERK: Dette er det samme som uttrykket i oppgaveteksten når vi faktoriserer ut 9 og 5.

c) Jeg definerer strekningsfunksjonen (felt 2) og bestemmer når den har falt 12 meter (felt 3).

2 s(x) := Integral(v, 0, x)

$\to s(x) := -\dfrac{36}{109}\ln(2) + \dfrac{36}{109}\ln\left(e^{-\frac{109}{10}x} + 1\right) + \dfrac{9}{5}x$

3 s = 12,x=1

NLøs: $\{x = 6.79\}$

Det tar ca. $\underline{\underline{6{,}8 \text{ sekunder}}}$ å falle 12 meter.

d) Jeg definerer fartsfunksjonen med den ukjente k-verdien (felt 4) og tilhørende strekningsfunksjon (felt 5). For at muffinsene skal falle 12 meter på 4,7 sekunder må terminalfarten være $\underline{\underline{2{,}66 \text{ m/s}}}$ (felt 6).

4 v_2(x) := LøsODE(y' = 9.81*(1-y^2/k^2), (0, 0))

$\to v_2(x) := \dfrac{k\,e^{981\cdot\frac{x}{50k}} - k}{e^{981\cdot\frac{x}{50k}} + 1}$

5 s_2(x) := Integral(v_2, 0, x)

$\to s_2(x) := -k\,x - \dfrac{100}{981}k^2\ln(2) + \dfrac{100}{981}k^2\ln\left(e^{981\cdot\frac{x}{50k}} + 1\right)$

6 s_2(4.7) = 12

NLøs: $\{k = -2.66, k = 2.66\}$