Løsningsforslag eksamen R2 våren 2020

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x)=x\cdot\sin x \Rightarrow f'(x)=1\cdot\sin x + x\cdot\cos x = \underline{\underline{\sin x + x\cdot\cos x}}$

b)

$$g(x)=\frac{\cos\left(x^2\right)}{x}$$

$$g'(x)=\frac{-\sin\left(x^2\right)\cdot 2x\cdot x-\cos\left(x^2\right)\cdot 1}{x^2}=\underline{\underline{\frac{-2x^2\cdot\sin\left(x^2\right)-\cos\left(x^2\right)}{x^2}=-2\sin\left(x^2\right)-\frac{\cos\left(x^2\right)}{x^2}}}$$

Oppgave 2

a) Her kan vi integrere ledd for ledd.

$$\int\left(x^2+3+e^{2x}\right)dx=\underline{\underline{\frac{1}{3}x^3+3x+\frac{1}{2}e^{2x}+C}}$$

b) Her bruker vi substitusjon.

$$\int 6x\cdot\sin\left(x^2\right)dx$$

$u=x^2$ gir $\dfrac{du}{dx}=2x$, slik at $dx=\dfrac{du}{2x}$

$$\int 6x\cdot\sin u\frac{du}{2x}=\int 3\sin u\ du=3\int\sin u\ du=-3\cos u+C=\underline{\underline{-3\cos\left(x^2\right)+C}}$$

c) Her bruker vi delvis integrasjon. Bestemmer først det ubestemte integralet, slik at jeg ikke trenger å bekymre med for integrasjonsgrensene underveis.
Setter $u'=x$ og $v=\ln x$.

$$\int x\cdot\ln x\ dx=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln x-\int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$$

så

$$\int_1^e x\cdot\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\cdot\ln x-\frac{1}{4}x^2\right]_1^e=\frac{1}{2}e^2\cdot\ln e-\frac{1}{4}e^2-\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\ln 1-\frac{1}{4}\cdot 1^2\right)=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2-\left(0-\frac{1}{4}\right)=\underline{\underline{\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}}}$$

Oppgave 3

a)

$$S_5 = 55$$

$$så$$

$$\frac{3+a_5}{2} \cdot 5 = 55$$

$$3 + a_5 = \frac{110}{5}$$

$$a_5 = 22 - 3$$

$$a_5 = 19$$

Bestemmer differansen *d*.

$$a_5 = 19$$

$$så$$

$$3 + (5-1)d = 19$$

$$4d = 19 - 3$$

$$d = \frac{16}{4}$$

$$d = 4$$

Da har vi

$$a_{10} = 3 + (10-1)4 = 3 + 9 \cdot 4 = 3 + 36 = 39$$

Da kan vi regne ut summen av de 10 første leddene i rekka.

$$S_{10} = \frac{3+39}{2} \cdot 10 = 42 \cdot 5 = \underline{\underline{210}}$$

b)

$$k = \frac{\frac{7}{2}}{7} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

Vi har altså $-1 < k < 1$, så rekka konvergerer.
Regner ut summen av den uendelige geometriske rekka:

$$S = \frac{7}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{7}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{14}}$$

Oppgave 4

$f(x) = 2\sin\left(\pi x + \pi\right) - 1 \quad , \quad x \in \left\langle -1, 3 \right\rangle$

a) *Det er muligens mest vanlig, og kanskje enklere, å løse denne oppgaven ved hjelp av derivasjon. Jeg velger imidlertid å presentere en annen løsningsmetode, der jeg tar utgangspunkt i at den aktuelle sinusfunksjonen beskriver en harmonisk svingning.*

Her har vi en sinusfunksjon på formen $f(x) = A\sin\left(cx + \varphi\right) + d$.
(Harmonisk svingning)

Vi kan se at amplituden er 2 og at likevektslinja er $y = -1$.
Det betyr at toppunktene har y-koordinat 1 og bunnpunktene har y-koordinat -3.

Vi kan så bestemme perioden:

$$p = \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

Perioden er altså 2.

Finner så forskyvningen langs likevektslinja:

$$x_0 = -\frac{\varphi}{c} = -\frac{\pi}{\pi} = -1$$

Vi vet nå at grafen til f er stigende og skjærer likevektslinja når $x = -1$.
Det første toppunktet vil da ligge en fjerdedel inn i perioden og dermed ha x-koordinat $-1 + \frac{2}{4} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Det neste toppunktet vil ha x-koordinat $-\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$.
Går vi en hel periode videre nå, er vi ute av definisjonsområdet.

Det første bunnpunktet kommer tre fjerdedeler inn i perioden fra grafen skjærer likevektslinja, altså fra $x = -1$.

Det betyr at det første bunnpunktet har x-koordinat $-1 + \frac{3}{4} \cdot 2 = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ og det neste bunnpunktet har x-koordinat $\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$.

$$\underline{\underline{\text{Grafen til } f \text{ har toppunkter } \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \text{ og } \left(\frac{3}{2}, 1\right) \text{ og bunnpunkter } \left(\frac{1}{2}, -3\right) \text{ og } \left(\frac{5}{2}, -3\right)}}$$

b) Skjæringspunktet mellom grafen til *f* og *y*-aksen har koordinater $\left(0, f(0)\right)$

$$f(0) = 2\sin\left(\pi \cdot 0 + \pi\right) - 1 = 2\sin\left(\pi\right) - 1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

For å finne *x*-koordinatene til skjæringspunktene mellom *x*-aksen og grafen til *f*, må vi løse likningen $f(x) = 0$ og velge løsningene som ligger innenfor definisjonsområdet.

$$2\sin\left(\pi x + \pi\right) - 1 = 0$$

$$\sin\left(\pi x + \pi\right) = \frac{1}{2}$$

$$gir$$

$$\pi x + \pi = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \vee \pi x + \pi = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad , k \in Z$$

$$\pi x = -\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \vee \pi x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

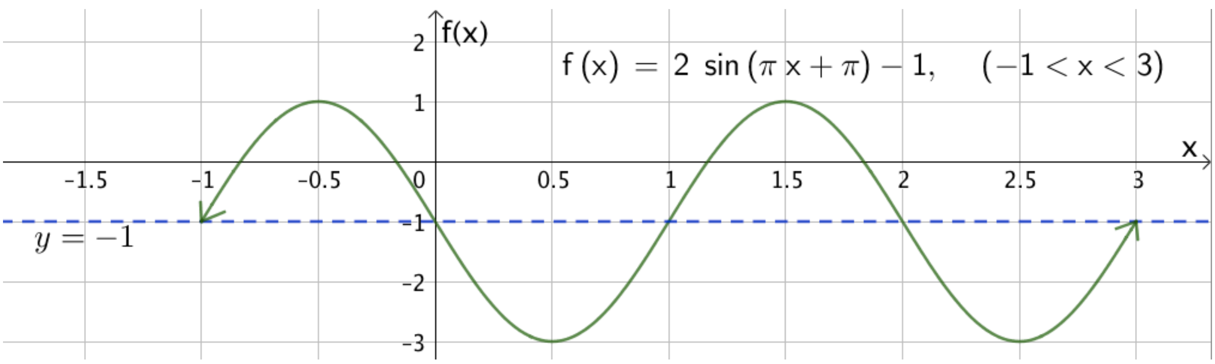
$$x = -\frac{5}{6} + 2k \vee x = -\frac{1}{6} + 2k$$

Ser at vi må ha $0 \le k \le 1$ for når vi skal ha $-1 < x < 3$.

$k = 0$ gir $x = -\frac{5}{6} \vee x = -\frac{1}{6}$ og $k = 1$ gir $x = -\frac{5}{6} + 2 = \frac{7}{6} \vee x = -\frac{1}{6} + 2 = \frac{11}{6}$

Grafen til *f* skjærer *x*-aksen i $\left(-\frac{5}{6}, 0\right), \left(-\frac{1}{6}, 0\right), \left(\frac{7}{6}, 0\right)$ og $\left(\frac{11}{6}, 0\right)$ og *y*-aksen i $\left(0, -1\right)$

c) Tegner likevektslinja $y = -1$, sammen med grafen til *f*, som svinger om denne med en periode på 2 og amplitude 2. Tar også hensyn til forskyvningen.



Oppgave 5

a)

$$\overrightarrow{AB} = [2-(-1), 2-3, 1-2] = \underline{\underline{[3,-1,-1]}}$$

$$\overrightarrow{AC} = [0-(-1), 1-3, 0-2] = \underline{\underline{[1,-2,-2]}}$$

$$og$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= [-1(-2)-(-1)(-2), -(3(-2)-(-1)\cdot 1), 3(-2)-(-1)\cdot 1] \\ &= [2-2, -(-6+1), -6+1] \\ &= [0,5,-5]\end{aligned}$$

Som skulle vises

b)

$$\overrightarrow{AT} = [5-(-1), 3-3, 8-2] = [6,0,6]$$

$$så$$

$$V_{ABCT} = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AT}\right|}{6} = \frac{\left|[0,5,-5]\cdot[6,0,6]\right|}{6} = \frac{\left|0\cdot 6 + 5\cdot 0 + (-5)\cdot 6\right|}{6} = \frac{|-30|}{6} = 5$$

Volumet av pyramiden *ABCT* er 5

c)

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [0,5,-5] = 5[0,1,-1]$, så $\vec{n} = [0,1,-1]$ er en normalvektor for planet som inneholder punktene *A, B* og *C*.
Bruker punktet *C* og får følgende likning for planet:

$$0\left(x-0\right) + 1\left(y-1\right) + (-1)\left(z-0\right) = 0$$

$$y - 1 - z = 0$$

$$\underline{\underline{y - z = 1}}$$

Oppgave 6

a)

$$-1 < k < 1$$

$$-1 < \frac{\ln x}{2} < 1$$

$$-2 < \ln x < 2$$

$$e^{-2} < x < e^{2}$$

$$\underline{\underline{\text{Rekka konvergerer når } e^{-2} < x < e^{2}}}$$

b)

$$\frac{2}{1-\frac{\ln x}{2}}=4$$

$$4\left(1-\frac{\ln x}{2}\right)=2$$

$$4-2\ln x=2$$

$$2\ln x=2$$

$$\ln x=1$$

$$x=e$$

Summen av rekka blir 4 når $x=e$

Oppgave 7

Setter inn koordinatene til punktene i likningen og ser om resultatet samsvarer med stigningstallet til de markerte tangentene.

Punkt A

$2\cdot 2\cdot y'-3\cdot 2=0$ gir $y'=\frac{3}{2}$, som ikke kan stemme da tangenten her har stigningstall 0.

Punkt B

$2(-2)y'-3\cdot 2=0$ gir $y'=-\frac{3}{2}$, som samsvarer godt med tangentretningen.

Punkt C

$2(-2)y'-3(-2)=0$ gir $y'=\frac{3}{2}$, som samsvarer godt med tangentretningen.

Punkt D

$2\cdot 2y'-3(-2)=0$ gir $y'=-\frac{3}{2}$, som samsvarer dårlig med tangentretningen.

De markerte tangentretningene samsvarer med retningen til tangentene til integralkurven i punktene *B* og *C*. De samsvarer *ikke* i punktene *A* og *D*.

Oppgave 8

Kula har sentrum i $S\left(x_0, y_0, z_0\right)$ og må ligge i skjæringspunktet mellom to linjer som står normalt på henholdsvis planet α og planet β. Normalvektorene til planene, som vi kan lese direkte fra likningene, vil være retningsvektor for de to linjene. Vi bruker da normalvektorene og punktene *P* og *Q* til å sette opp parameterfremstillinger for de to

linjene som skjærer hverandre i *S*.
Linja som går gjennom *S* og står normalt på planet α får navnet *l*.

$$l:\begin{cases} x=-3-2s \\ y=7+2s \\ z=-1-s \end{cases}$$

Linja som går gjennom *S* og står normalt på planet β får navnet *m*.

$$m:\begin{cases} x=-4-7t \\ y=5+4t \\ z=-2-4t \end{cases}$$

Kan nå sette opp et likningssett av tre likninger med to ukjente.

$$I. \quad -3-2s=-4-7t$$

$$II. \quad 7+2s=5+4t$$

$$III. \quad -1-s=-2-4t$$

Legger likning *I* til likning *II* og får:

$$4=1-3t$$

$$3t=1-4$$

$$t=\frac{-3}{3}$$

$$t=-1$$

Setter dette inn i likning *III* og får:

$$-1-s=-2-4(-1)$$

$$-1-s=-2+4$$

$$-1-s=2$$

$$s=-1-2$$

$$s=-3$$

Ser at løsningene stemmer for alle tre likningene.

Setter $t=-1$ inn i parameterfremstillingen for linja *m* og får:

$$x=3\wedge y=1\wedge z=2$$

Sentrum i kula er $S\left(3,1,2\right)$

og radius er $\left|\overrightarrow{SP}\right|=\sqrt{\left(-3-3\right)^2+\left(7-1\right)^2+\left(-1-2\right)^2}=\sqrt{36+36+9}=\sqrt{81}=9$

Vi har da følgende likning for kuleflaten: $\underline{\underline{\left(x-3\right)^2+\left(y-1\right)^2+\left(z-2\right)^2=81}}$

Oppgave 9

Vi er gitt påstanden

$$a_n = \frac{n^2 + n + 2}{2} \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}.$$

for en følge gitt ved $a_1 = 2$ og $a_n = a_{n-1} + n$.

Første trinn er å sjekke om påstanden er sann for $n = 1$:

$$a_1 = \frac{1^2 + 1 + 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Påstanden er altså sann for $n = 1$.

I det andre trinnet, som vi kaller induksjonstrinnet, antar vi at det finnes et naturlig tall *k* slik at påstanden er sann for $n = k$, og viser at den da også må være sann for $n = k + 1$.

Antagelse: $a_k = \dfrac{k^2 + k + 2}{2}$

Dersom påstanden stemmer for $n = k + 1$, vet vi at vi skal ende opp med følgende formel:

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)^2 + (k+1) + 2}{2}$$

Det kan være lurt å notere seg dette før man setter i gang.

$n = k + 1$ gir:

$$a_{k+1} = a_{(k+1)-1} + (k+1)$$

$$a_{k+1} = a_k + (k+1)$$

$$a_{k+1} = \frac{k^2 + k + 2}{2} + (k+1)$$

$$a_{k+1} = \frac{k^2 + k + 2}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$

$$a_{k+1} = \frac{k^2 + k + 2 + 2k + 2}{2}$$

$$a_{k+1} = \frac{k^2 + 2k + 1 + k + 3}{2}$$

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)^2 + (k+1) + 2}{2}$$

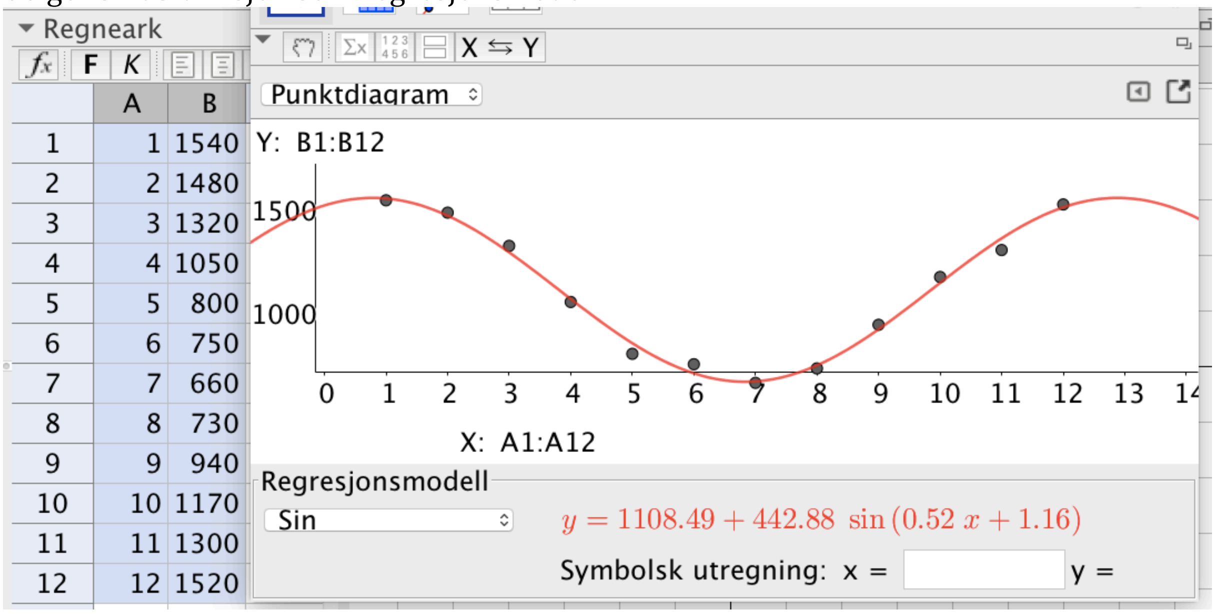
Har vist at påstanden er sann for $n = k + 1$, under forutsetning av at den er sann for $n = k$, der *k* er et naturlig tall.

Har dermed bevist, ved induksjon at påstanden er sann for alle naturlige tall *n*.

Del 2

Oppgave 1

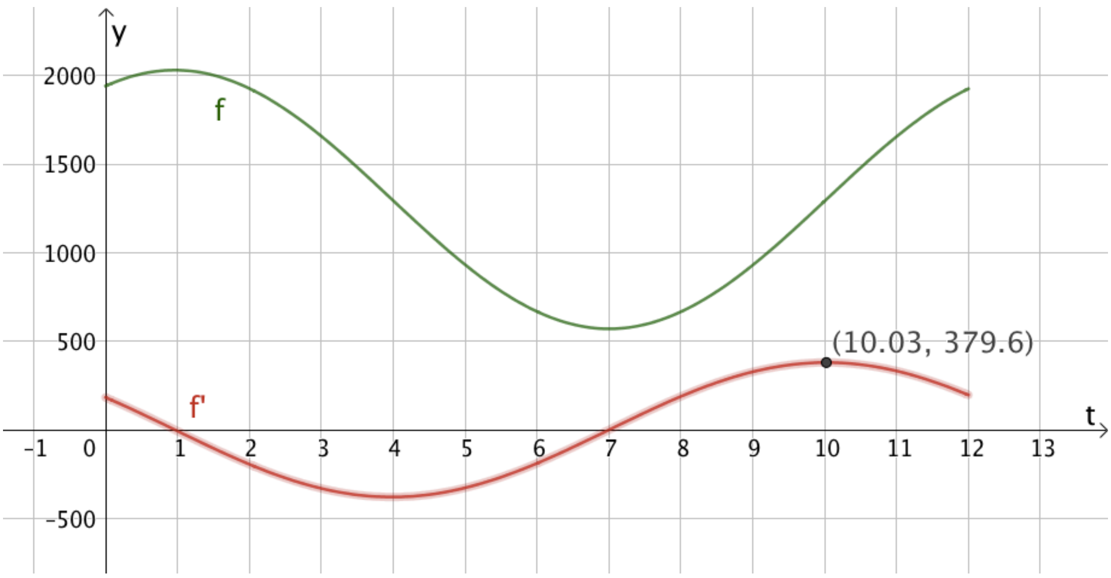
a) Legger inn verdiene i regnearket i GeoGebra og gjennomfører regresjonsanalyse. Velger sinusfunksjon som regresjonsmodell.



En trigonometrisk funksjon som passer godt med informasjonen i tabellen, er

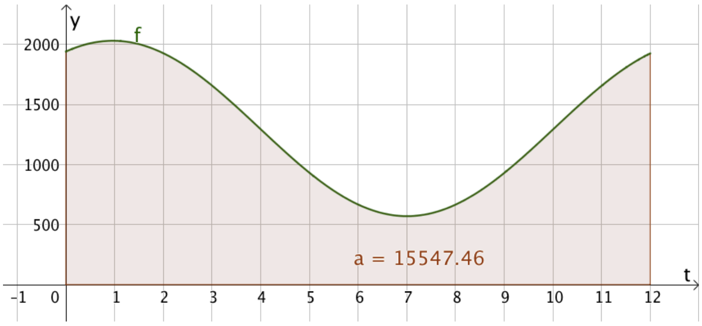
$$\underline{\underline{E(t) = 442{,}88\sin\left(0{,}52t + 1{,}16\right) + 1108{,}49}}$$

b) Tegner grafen til *f* sammen med grafen til den deriverte av *f* i samme koordinatsystem i GeoGebra.
Bruker kommandoen *" Ekstremalpunkt(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)"* og bestemmer toppunktet på grafen til den deriverte. (Se bildet under)



<u>I følge modellen *f*, økte energiforbruket per måned i 2019 raskest i oktober</u>

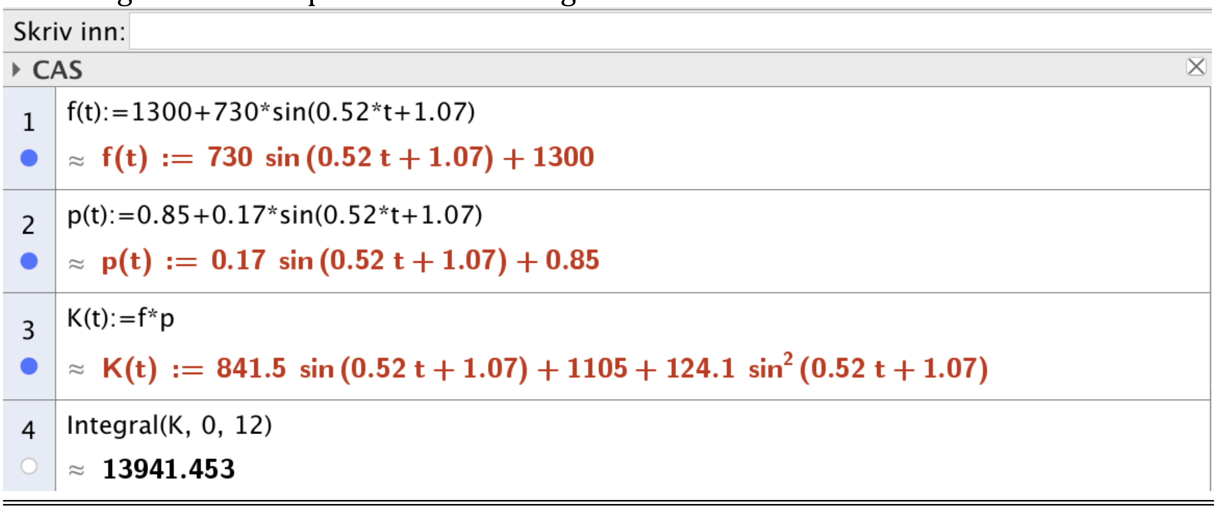
c) Bruker kommandoen *" Integral(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)"*.



$$\int_0^{12} f(t)\,dt = \underline{\underline{15547{,}46}}$$

Svaret forteller at det samlede energiforbruket for boligen, i følge modellen *f*, var 15547,46 kWh i 2019

d) Når $f(t)$ gir oss energiforbruket i kWh per måned, og $p(t)$ gir oss gjennomsnittlig pris i kroner per kWh for hver måned, vil $K(t) = f(t)\cdot p(t)$ gi oss energikostnadene per måned for boligen.



Om vi legger modellene *f* og *p* til grunn, kan vi si at den årlige energikostnaden til boligen er 13 941,45 kroner.

Oppgave 2

a) Når to størrelser er proporsjonale, vil forholdet mellom dem være konstant.
Vi får oppgitt at farten massen avtar med $\left(M'(t)\right)$ er proporsjonal med massen som til enhver tid er igjen av stoffet $\left(M(t)\right)$.

Dette gir $\dfrac{M'}{M} = k \Leftrightarrow M' = k\cdot M$, der *k* er proporsjonalitetskonstanten.
Siden massen avtar, har vi $M' < 0$, som betyr at $k\cdot M < 0$.
Den massen som til enhver tid er igjen av stoffet kan ikke være negativ, så vi må ha $k < 0$ for at $k\cdot M < 0$.

b) Når jeg jobber med differensiallikningen i CAS, erstatter jeg M' med y' og M med y. (Jeg vil også få løsninger der *t* erstattes med *x*).

CAS	
1	LøsODE(y'=k*y, (0,100)) $\rightarrow\ y = 100\,e^{kx}$
2	100* *e* ^(k*6)=97 Løs: $\left\{k = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{97}{100}\right)\right\}$
3	{k = 1 / 6 ln(97 / 100)} $\approx\ \{k = -0.0051\}$

I linje 1 løser jeg differensiallikningen med initialbetingelsen $y(0)=100$.
I linje 2 løser jeg likningen $y(6)=97$, mens linje 3 viser en numerisk avrunding av løsningen.

$$\underline{\underline{M(t)=100e^{-0{,}0051t}}}$$

c) Når jeg løser nå løser likningen $M(t)=2$ i CAS, bruker jeg den ikke-avrundede verdien av *k.*

2	100* *e* ^(k*6)=97 Løs: $\left\{k = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{97}{100}\right)\right\}$
3	M(t):=100*e*^(HøyreSide($2) t) $\rightarrow\ M(t) := \left\{100\,e^{\frac{1}{6}t\ln\left(\frac{97}{100}\right)}\right\}$
4	Løs(M=2) $\rightarrow\ \left\{t = \frac{6\ln(25)+3\ln(4)}{\ln(25)+\ln(4)-\ln(97)}\right\}$
5	{t = (6ln(25) + 3ln(4)) / (ln(25) + ln(4) – ln(97))} $\approx\ \{t = 770.609\}$

<u>Det tar omtrent 771 timer før massen av det radioaktive stoffet er redusert til 2 mg.</u>

Dersom jeg bruker den avrundede verdien av k, altså -0,0051, blir svaret 767 timer, som relativt sett ikke er at veldig stort avvik.

d) Når massen minker med mindre enn 0,2 mg per time, har vi $M' > -0{,}2$.

2	100* e ^(k*6)=97 Løs: $\left\{k = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{97}{100}\right)\right\}$
3	M(t):=100e^(HøyreSide($2) t) $\rightarrow$ $M(t) := \left\{100\, e^{\frac{1}{6} t \ln\left(\frac{97}{100}\right)}\right\}$
4	k:=HøyreSide($2) $\rightarrow$ $k := \left\{\frac{1}{6}\ln\left(\frac{97}{100}\right)\right\}$
5	M'(t):=M*k $\rightarrow$ $M'(t) := \left\{\frac{50}{3}\ln\left(\frac{97}{100}\right) e^{-\frac{51}{10000}t}\right\}$
6	50 / 3 ln(97 / 100) e^((-51) / 10000 t)>-0.2 Løs: $\left\{t > -\frac{10000}{51}\ln\left(-\frac{3}{250\ln\left(\frac{97}{100}\right)}\right)\right\}$
7	{t > (-10000) / 51 ln((-3) / (250ln(97 / 100)))} $\approx$ $\{t > 182.6435\}$

<u>Det vil gå omtrent 183 timer før stoffet ikke lenger vurderes som helseskadelig</u>

Oppgave 3

a) Lengden på papiret til hver runde rundt rullen danner en aritmetisk rekke, der $a_1 = 5{,}00\pi$ og den faste differansen er $0{,}03\pi$.

CAS

1	Regner ut lengden av papiret i runde nummer 50:
2	5.00*pi+(50-1)*0.03*pi $\rightarrow$ $\frac{647}{100}\pi$
3	Bestemmer så summen av de 50 første leddene i rekka:
4	((5.00*pi+647 / 100 π)/2)*50 $\checkmark$ $\frac{5\pi + \frac{647}{100}\pi}{2} \cdot 50$
5	(5π + 647 / 100 π) / 2 (50) $\approx$ 900.852

<u>Det vil være omtrent 9,01 meter papir på rullen når det er 50 runder igjen</u>

b) Slik oppgaveteksten er formulert, ser vi at det er *indre* diameter til hvert papirlag (hver runde) som brukes for å regne ut lengden til papiret (omkretsen) for hver runde.
Diameteren D er *ytre* diameter til hele rullen (inkludert sylinderen i midten). Når D er 20,00 cm, vil *indre* diameter til det ytterste papirlaget være 19,97 cm, slik at lengden av papiret på denne runden er $19{,}97 \cdot \pi$ cm.

Regner ut hvor mange runder papir det er på rullen når D er 20,00 cm.

CAS

1	5.00*pi+(n−1)*0.03*pi=19.97*pi Løs: $\{n = 500\}$

Nå kan jeg regne ut hvor mye papir som er igjen på rullen når D er 20,00 cm.

CAS

1	(5.00*pi+19.97*pi)/2*500 $\rightarrow \frac{12485}{2}\pi$
2	12485 / 2 π ≈ 19611.392

<u>Når D er 20,00cm er det omtrent 196,1 meter papir igjen på rullen</u>

c) Regner ut hvor mange runder papir det er igjen på rullen når det er 500 meter papir igjen.

CAS

1	a_n:=5.00*pi+(n−1)*0.03*pi $\rightarrow a_n := \frac{3}{100}\pi (n-1) + 5\pi$
2	(5.00*pi+a_n)/2*n=50000 $\rightarrow \frac{3}{200} n^2 \pi + \frac{997}{200} n \pi = 50000$
3	3 / 200 n² π + 997 / 200 n π = 50000 Løs: $\left\{n = \frac{-\sqrt{994009\pi^2 + 120000000\pi} - 997\pi}{6\pi}, n = \frac{\sqrt{994009\pi^2 + 120000000\pi} - 997\pi}{6\pi}\right\}$
4	{n = (−sqrt(994009π² + 120000000π) − 997π) / (6π), n = (sqrt(994009π² + 120000000π) − 997π) / (6π)} $\approx \{n = -1209.548, n = 877.215\}$

Det er altså omtrent 877 runder igjen på rullen når det er 500 meter papir igjen på rullen.

CAS

1	5.00+(877−1)*0.03 ≈ 31.28

Den *indre* diameteren til det ytterste papirlaget er omtrent 31,28 cm.
Da vil den *ytre* diameteren til det ytterste papirlaget være omtrent
$31,28cm + 0,03cm = 31,31cm$.

<u>*D* er omtrent 31,31cm når det er 500 meter papir igjen på rullen</u>

Oppgave 4

Starter med å definere punktene og bestemme likningen til planet α og en parameterfremstilling for linja ℓ.

CAS	
1	A:=(-1,-1,2) → $A := (-1, -1, 2)$
2	B:=(3,4,-1) → $B := (3, 4, -1)$
3	C:=(5,3,1) → $C := (5, 3, 1)$
4	α:=Plan(A, B, C) → $\alpha := x - 2y - 2z = -3$
5	D:=(6,6,4) → $D := (6, 6, 4)$
6	l:=Linje(A, B) → $\ell : X = (-1, -1, 2) + \lambda\ (4, 5, -3)$

Bruker parameterfremstillingen for linja ℓ til å definere *S* slik at dette punktet ligger på linja. Finner deretter et uttrykk for avstanden mellom *S* og planet α, som jeg setter lik 8.
Siden CAS har brukt lambda som parametervariabel i parameterfremstillingen til linja, bruker jeg også denne videre. Det er ikke noe problem å bruke en annen, som f.eks. t, når en definerer S og regner videre, dersom man synes det er enklere.

7	S(λ):=(6λ-1,7λ-1,2λ+2) → $S(\lambda) := (6\lambda - 1, 7\lambda - 1, 2\lambda + 2)$
8	d(λ):=Avstand(S, α) → $d(\lambda) := 4\ \lvert\lambda\rvert$
9	Løs(d=8, λ) → $\{\lambda = -2, \lambda = 2\}$

Setter løsningene inn i uttrykket for *S* og får ut de mulige koordinatene til sentrum i kuleflata.

$$\underline{\underline{\text{Koordinatene til } S \text{ er enten} \left(-13,-15,-2\right) \text{ eller } \left(11,13,6\right)}}$$