Løsningsforslag eksamen S1 våren 2020

Del 1

Oppgave 1

a)

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 2x + 8 \\
x^2 - 2x - 8 &= 0 \\
(x-4)(x+2) &= 0 \\
&\textit{så} \\
&\underline{\underline{x = -2 \vee x = 4}}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\lg(3x+4) &= 1 \\
10^{\lg(3x+4)} &= 10^1 \\
3x + 4 &= 10 \\
3x &= 10 - 4 \\
x &= \frac{6}{3} \\
&\underline{\underline{x = 2}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 2

a)

$$
\frac{18b^4 \cdot \left(ab^{-1}\right)^3}{\left(3ab^2\right)^3} = \frac{18b^4 \cdot a^3 \cdot b^{-1\cdot 3}}{3^3 \cdot a^3 \cdot b^{2\cdot 3}} = \frac{18b^4 \cdot a^3 \cdot b^{-3}}{27 \cdot a^3 \cdot b^6} = \frac{2}{3} \cdot b^{4-3-6} = \frac{2}{3} \cdot b^{-5} = \underline{\underline{\frac{2}{3b^5}}}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\lg(2a) + \lg(5a) - \lg a - \lg\left(\frac{a}{10^3}\right) &= \lg\left(2a \cdot 5a\right) - \lg a - \left(\lg a - \lg 10^3\right) \\
&= \lg\left(10a^2\right) - \lg a - \lg a + 3 \\
&= \lg 10 + \lg a^2 - 2\lg a + 3 \\
&= 1 + 2\lg a - 2\lg a + 3 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Oppgave 3

Ut fra opplysningene i figuren, kan vi sette opp følgende likningssett:

$$I.\quad y+42+x=2x \Leftrightarrow x-y=42$$

$$II.\qquad x+y=210$$

Legger likning *II* til likning *I* og får:

$$III.\quad 2x=252 \Leftrightarrow x=126$$

Setter dette inn i likning *II:*

$$126+y=210$$

$$y=210-126$$

$$y=84$$

$$\underline{\underline{x=210 \wedge y=84}}$$

Oppgave 4

a)

$$\binom{8}{3}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=8\cdot 7=56$$

<u>Per kan legge 56 ulike kombinasjoner av bøker i sekken sin</u>

b) Her har vi en hypergeometrisk sannsynlighetsmodell. Per har 8 bøker totalt, og 3 av dem vil være riktige akkurat denne dagen. Hva er sannsynligheten for at Per har tatt med seg 3 riktige og én feil?

$$P(\text{Riktig bok til alle fagene denne dagen})=\frac{\binom{3}{3}\binom{5}{1}}{\binom{8}{4}}=\frac{1\cdot 5}{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=\frac{5}{2\cdot 7\cdot 5}=\underline{\underline{\frac{1}{14}}}$$

c) Minst to av fagene betyr her 2 av fagene eller alle 3 fagene denne dagen.

$$P(\text{Riktig bok til 2 av fagene denne dagen})=\frac{\binom{3}{2}\binom{5}{2}}{\binom{8}{4}}=\frac{\frac{3\cdot 2}{2\cdot 1}\cdot\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}}{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=\frac{3\cdot 10}{2\cdot 7\cdot 5}=\frac{3}{7}$$

Har allerede regnet ut sannsynligheten for riktig antall bøker i alle tre fag, så

$$P(\text{Riktig bok til minst 2 av fagene denne dagen})=\frac{3}{7}+\frac{1}{14}=\frac{6}{14}+\frac{1}{14}=\frac{7}{14}=\underline{\underline{\frac{1}{2}=0{,}5=50\%}}$$

Oppgave 5

a)

$$K(x) = 0{,}4x^2 + 400x + 30000$$

$så$

$$K'(x) = 0{,}8x + 400$$

og

$$K'(200) = 0{,}8 \cdot 200 + 400 = 160 + 400 = \underline{\underline{560}}$$

Svaret forteller at grensekostnaden er 560 kroner ved produksjon av 200 enheter. Det betyr at produksjonskostnadene øker med 560 kroner dersom produksjonen øker med én enhet, altså fra 200 til 201 enheter.

b) $K(x) = 0{,}4x^2 + 400x + 30000$ og $I(x) = -0{,}6x^2 + 800x$

Da har vi:

$$O(x) = I(x) - K(x) = -0{,}6x^2 + 800x - \left(0{,}4x^2 + 400x + 30000\right) = -x^2 + 400x - 30000$$

Bestemmer toppunktet på grafen til *O*.

$$O'(x) = -2x + 400$$

$så$

$$O'(x) = 0$$

gir

$$-2x + 400 = 0$$

$$x = 200$$

Ser av funksjonsuttrykket til *O* at grafen er en parabel som vender hul side ned, så trenger ikke tegne fortegnslinje for å avgjøre at $\left(200, O(200)\right)$ er *toppunktet* på grafen til *O*.

$$O(200) = -200^2 + 400 \cdot 200 - 30000 = -40000 + 80000 - 30000 = 10000.$$

<u>Overskuddet blir størst ved produksjon og salg av 200 enheter per dag. Da vil det daglige overskuddet være på 10 000 kroner.</u>

c) Bestemmer dekningspunktene ved å løse likningen $K(x) = I(x)$

$$0{,}4x^2 + 400x + 30000 = -0{,}6x^2 + 800x$$

$$x^2 - 400x + 30000 = 0$$

gir

$$x = \frac{400 \pm \sqrt{160000 - 120000}}{2} = \frac{400 \pm \sqrt{40000}}{2} = \frac{400 \pm 200}{2} = 200 \pm 100$$

$så$

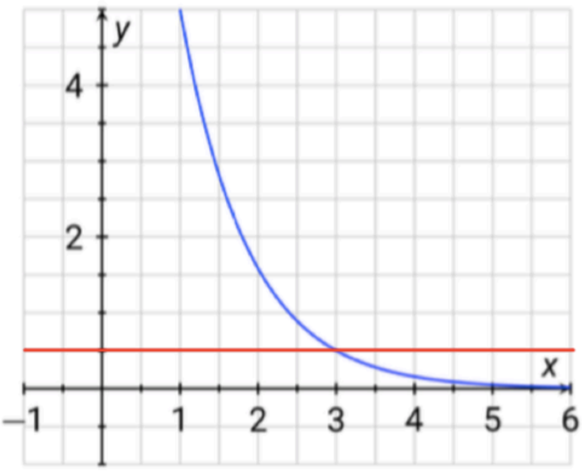
$$x = 100 \vee x = 300$$

Siden grafen til *O* er en parabel som vender hul side ned, vet vi at overskuddet er positivt mellom dekningspunktene.

<u>Overskuddet er positivt ved produksjon og salg av mellom 100 og 300 enheter</u>

Oppgave 6

a) Tegner av grafen fra figuren som er gitt i oppgaveteksten, tegner inn linja $y = 0{,}5$ og finner skjæringspunktet mellom dem.

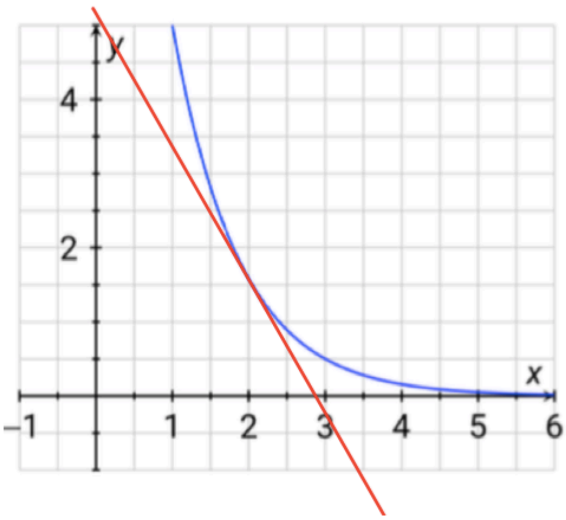


$$\underline{\underline{\text{Likningen } g(x) = 0{,}5 \text{ har løsningen } x = 3}}$$

b)

$$\begin{aligned} 0{,}5 \cdot 10^{1{,}5-0{,}5x} &= 5 \quad | \cdot 2 \\ 10^{1{,}5-0{,}5x} &= 10 \\ 1{,}5 - 0{,}5x &= 1 \\ 0{,}5x &= 1{,}5 - 1 \\ 0{,}5x &= 0{,}5 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 1}} \end{aligned}$$

c)



Tegner, så godt jeg klarer, en tangent i punktet $(2, g(2))$ og velger to punkter den går gjennom, slik at jeg kan bestemme stigningstallet. Det er vanskelig å lese av nøyaktig, så vil uansett komme frem til en tilnærmet verdi.

Velger punktene $\left(1\ ,\ 3{,}3\right)$ og $\left(2{,}8\ ,\ 0\right)$, som gir stigningstall $\dfrac{-3{,}3}{1{,}8} \approx -1{,}8$.

$\underline{\underline{g'(2) \approx -1{,}8}}$

Oppgave 7

a) Området "gjerdes inne" av linjene $x = 0$, $y = 0$, $y = -0{,}5x + 7$ og $y = -4x + 28$.
Det er ikke mulig å lese av konstantleddet til den sistnevnte linja, men vi kan "telle tilbake" fra punktet (7,0) og se at linja går gjennom (6,4), (5,8), (4,12) osv. helt til (0,28).

Det fargelagte området er avgrenset av følgende ulikheter:
$\underline{\underline{y + 0{,}5x \le 7 \wedge y + 4x \le 28 \wedge y \ge 0 \wedge x \ge 0}}$

b) Regner ut verdien av S for hjørnepunktene, bortsett fra origo.

$$S(0,7) = 0 + 5 \cdot 7 = 35$$

$$S(6,4) = 6 + 5 \cdot 4 = 26$$

$$S(7,0) = 7 + 5 \cdot 0 = 7$$

Under forutsetning av at $\left(x, y\right)$ ligger i det fargelagte området, kan vi si:
<u>Den største verdien størrelsen *S* kan ha er 35</u>

c) $T(x, y) = x + a \cdot y$
T skal ha sin største verdi i punktet (6,4), som betyr at $T(6,4) = 6 + 4a$ må være større enn både $T(0,7)$ og $T(7,0)$.

$$T(6,4) > T(7,0)$$

$$6 + 4a > 7 + a \cdot 0$$

$$4a > 7 - 6$$

$$a > \frac{1}{4}$$

og

$$T(6,4) > T(0,7)$$

$$6 + 4a > 0 + 7a$$

$$3a < 6$$

$$a < 2$$

Vi må ha $\underline{\underline{\frac{1}{4} < a < 2}}$

Oppgave 8

$f(x) = ax^2 + bx - 5$ og $f'(x) = 2ax + b$

Vi vet at $f(2) = 3$ og at $f'(2) = 0$. Dette gjør at vi kan sette opp et likningssett av to likninger med to ukjente.

$I. \quad 4a + 2b - 5 = 3$

$II. \qquad 4a + b = 0 \Rightarrow 4a = -b$

II innsatt i *I* gir:

$$-b + 2b - 5 = 3$$
$$b = 3 + 5$$
$$b = 8$$

Setter $b = 8$ inn i *II*:

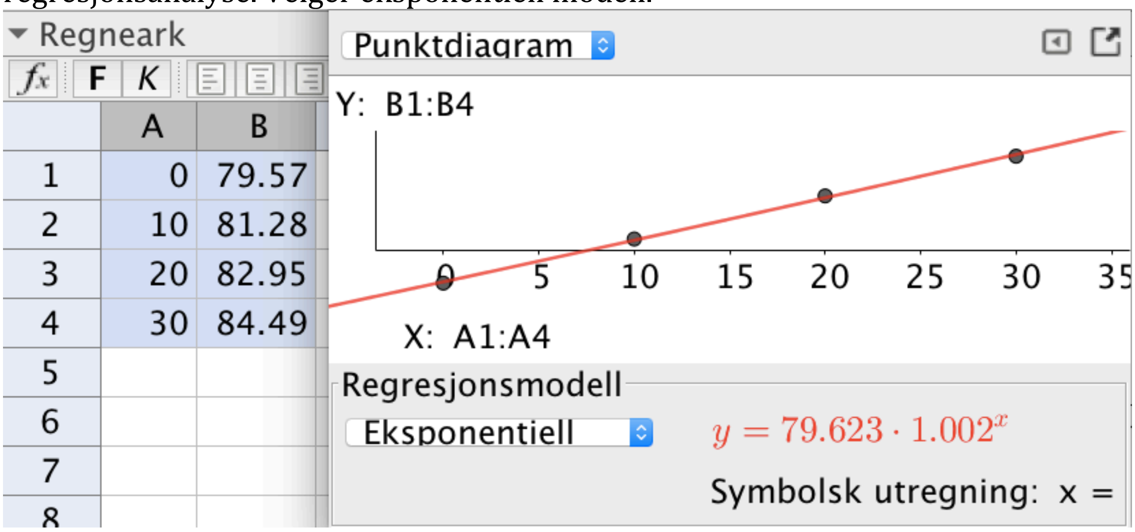
$$4a = -8$$
$$a = -2$$

$$\underline{\underline{f(x) = -2x^2 + 8x - 5}}$$

Del 2

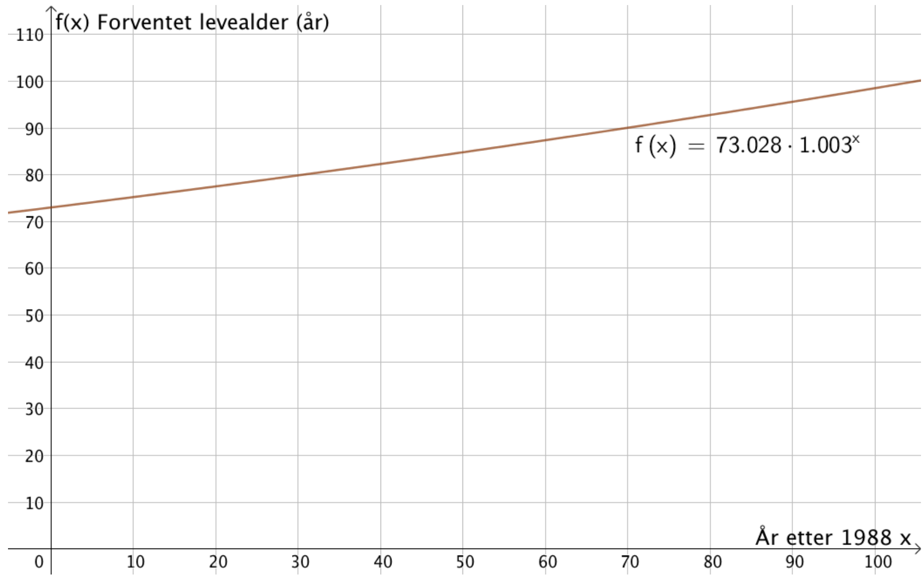
Oppgave 1

a) 1988 svarer til $x = 0$, 1998 til $x = 10$ osv…
Legger de oppgitte dataene inn i regnearket i GeoGebra og gjennomfører regresjonsanalyse. Velger eksponentiell modell.



En eksponentiell modell for forventet levealder for kvinner i Norge født *x* år etter 1988 er $\underline{\underline{g(x) = 79{,}623 \cdot 1{,}002^x}}$

b)



c)

CAS

1
f(x):=73.028*1.003^x
$\approx \ f(x) := 73.028 \, e^{0.003x}$

2
f=85
Løs: $\left\{ x = \frac{625000000000000}{187219311237} \ln\left(\frac{21250}{18257}\right) \right\}$

3
{x = 625000000000000 / 187219311237 ln(21250 / 18257)}
$\approx \ \{x = 50.679\}$

Menn med forventet levealder på 85 år, vil bli født 50,7 år etter 1988, altså i 2038

d) Lar $x = 0$ svare til år 2015, slik at modellen gir oss forventet levealder for japanske menn født x år etter 2015.

CAS

1
h(x):=RegEksp({(0,84),(80,89)})
$\rightarrow \ h(x) := 84 \cdot 1.00072^x$

2
h=100
Løs: $\left\{ x = \frac{\ln(3) - 2\ln(5) + \ln(7)}{\ln(18503) + 2\ln(3) + \ln(5) - \ln(833237)} \right\}$

3
{x = (ln(3) - 2ln(5) + ln(7)) / (ln(18503) + 2ln(3) + ln(5) - ln(833237))}
$\approx \ \{x = 241.23788\}$

I følge modellen, vil japanske menn med forventet levealder 100 år bli født i 2256

Oppgave 2

a) Det gir ikke mening å produsere et negativt antall flatskjermer, så må ha $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

Informasjonen om avdeling 1 gir følgende ulikhet:

$$6x + 10y \leq 7800 \Leftrightarrow 3x + 5y \leq 3900$$

Informasjonen om avdeling 2 gir følgende ulikhet:

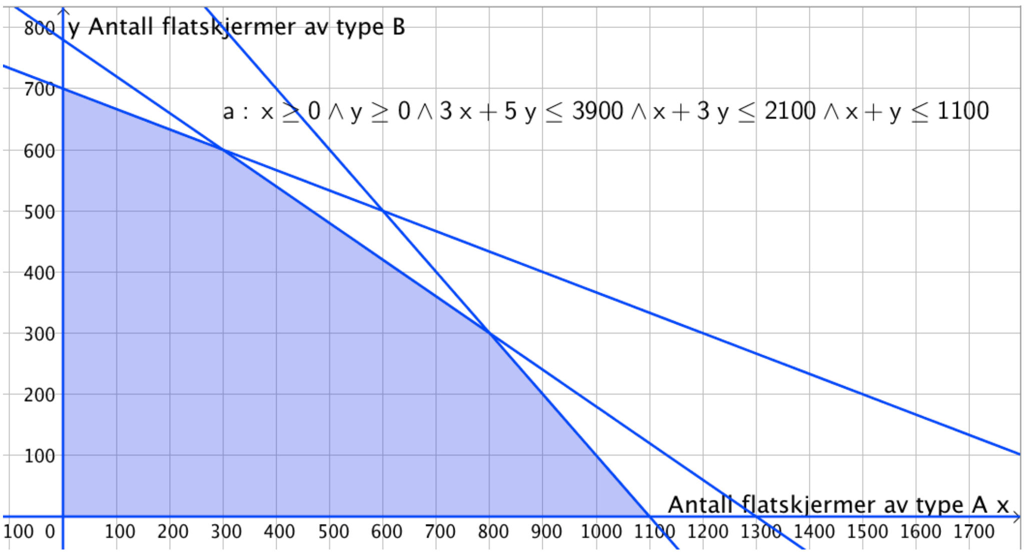
$$6x + 10y \leq 7800 \Leftrightarrow 3x + 5y \leq 3900$$

Informasjonen om avdeling 3 gir følgende ulikhet:

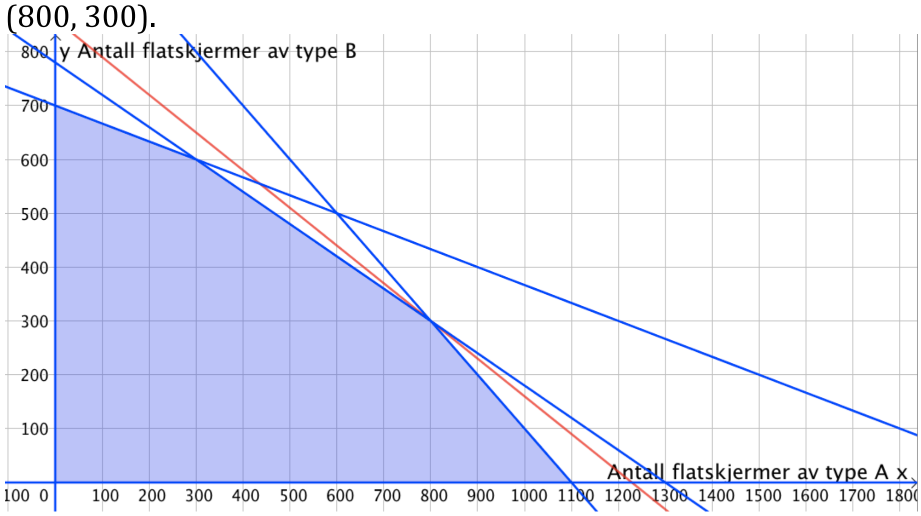
$$4x + 4y \leq 4400 \Leftrightarrow x + y \leq 1100$$

Vi har da forklart at x og y må tilfredsstille det oppgitte settet av ulikheter.

b)



c) Tegner ei nivålinje ved å skrive inn $7000x + 10000y = 0$ i GeoGebra. Parallellforskyver linja slik at den går gjennom hjørnepunktene til det skraverte området. Nivålinja skjærer y-aksen høyest oppe når den går gjennom punktet (800, 300).



$$7000 \cdot 800 + 10000 \cdot 300 = 5600000 + 3000000 = 8600000$$

<u>Fortjenesten blir størst ved produksjon av 800 flatskjermer av type A og 300 flatskjermer av type B. Da blir fortjenesten på 8,6 millioner kroner.</u>

d) Bruker informasjonen i tabellen og regner ut hvor mye tid hver avdeling bruker ved den produksjonen som er optimal for fortjeneste.
$6 \cdot 800 + 10 \cdot 300 = 4800 + 3000 = 7800$, så avdeling 1 bruker hele sin kapasitet.
$2 \cdot 800 + 6 \cdot 300 = 1600 + 1800 = 3400$, så avdeling 2 har ledig kapasitet.
$4 \cdot 800 + 4 \cdot 300 = 3200 + 1200 = 4400$, så avdeling 3 har ikke ledig kapasitet, men utnytter kapasiteten sin fullt ut.

$$4200 - 3400 = 800$$

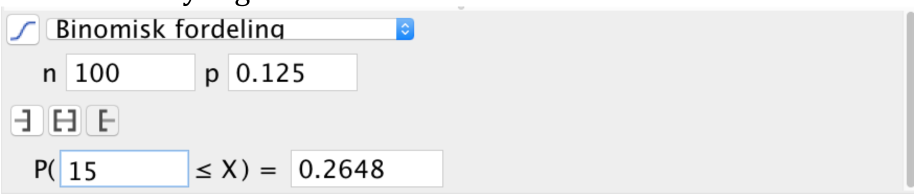
Avdeling 2 har 800 timer ledig kapasitet

Oppgave 3

a) I et binomisk forsøk er alle delforsøkene uavhengige av hverandre. Det betyr at man må ta utgangspunkt i at dersom en EL-bil passerer, vil ikke dette ha noe betydning for om den neste som passerer også er en EL-bil.

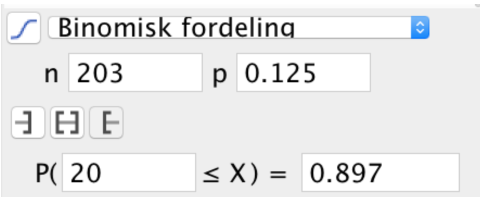
Man må også ta utgangspunkt i at det er en gitt sannsynlighet for at en tilfeldig bil som passerer er EL-bil. Maria må altså ta utgangspunkt i at det er 12,5 % sannsynlighet for at en tilfeldig bil som passerer henne er EL-bil, med bakgrunn i teksten hun leste på forhånd.

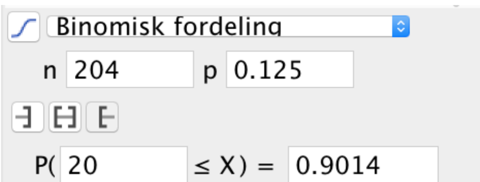
b) Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.



Det er omtrent 26,5 % sannsynlig at minst 15 av første 100 bilene er EL-bil

c) Lar $X \geq 20$ og justerer *n* til jeg ser at $P(20 \leq X)$ passerer 0,9.
(*p* forblir 0,125)





Vi ser at sannsynligheten passerer 90 % når antallet biler går fra 203 til 204.

Maria må føre statistikk over *minst* 204 biler for at det skal være mer enn 90 % sannsynlig at minst 20 av dem er EL-biler.

Oppgave 4

Lar x representere arealet til Andorra og y representere arealet til Liechtenstein. Bruker informasjonen i oppgaveteksten til å sette opp et likningssett av to ukjente, som jeg løser i CAS.
NB! Det at et land er 60 % mindre enn Andorra, betyr at det aktuelle landets areal utgjør 40 % av Andorra sitt areal.

CAS

1	x+y=628 → $x + y = 628$
2	0.4x=1.17y → $\frac{2}{5}x = \frac{117}{100}y$
3	{$1, $2} Løs: $\{\{x = 468, y = 160\}\}$

<u>Arealet til Andorra er 468 kvadratkilometer</u>