Forberedelseshefte til forkurs i matematikk for opptak til lærerutdanningene

Dette dokumentet inneholder repetisjonsoppgaver knyttet til de fire regneartene, brøk, prosent, potenser og funksjoner. Hensikten er at du som skal ta forkurset skal bli tryggere på grunnleggende matematikk ved å jobbe med kjente (og kanskje også noen ukjente) regnestrategier og temaer. Det å jobbe seg gjennom disse oppgavene på forhånd vil gi deg tid til å jobbe med mer utfordrende deler av matematikken en møter i 1P og 2P når du er på forkurset, noe som kan gi en bedre opplevelse av forkurset og eksamen. Vær oppmerksom på at dette oppgaveheftet er ment som forberedelse til forkurset, og at det på ingen måte er en erstatning for undervisningen og oppgavene som inngår i forkurset.

I hver kapitteloverskrift står det hvor mange timer det omtrent kan ta å jobbe med innholdet i kapitlet. Bruk gjerne mer tid enn det som er antydet om du føler behov for det! Det er også bedre å gjøre noen av oppgavene i heftet enn å ikke gjøre noen. **Tips**: Ikke bruk kalkulator! Da forsvinner mye av hensikten med å jobbe med oppgavene.

Noen av ordene i heftet er skrevet i kursiv. Dette er viktige begrep og uttrykk det kan være lurt å bruke litt tid på å forstå. Søk gjerne opp ordene om du er usikker på hva de egentlig betyr.

Om du ønsker å gjøre flere oppgaver enn de du finner i dette heftet finnes det mange på følgende nettsider:

http://www.matematikk.org

http://www.matematikk.net

http://www.ndla.no

Ta kontakt med Øyvind Haugan Lien på oyvind.h.lien@ntnu.no om du finner feil i eller har spørsmål om heftet.

De fire regneartene og regnerekkefølge (ca. 1 time)

Når en skal jobbe med oppgaver som involverer de fire regneartene kan det i noen tilfeller være kjekt å «dele opp» de involverte tallene. Eksempler er å se på tallet 13 som (10 + 3) eller (5 + 8) eller (5 + 5 + 3) eller (15 – 2) eller (20 – 7). Om en skal multiplisere 13 med 5 vil det bli noe enklere å finne svaret om 13 er oppdelt på en hensiktsmessig måte:
$13 \cdot 5 = (10 + 3) \cdot 5 = (10 \cdot 5) + (3 \cdot 5) = 50 + 15 = 65$.

Det å dele opp et tall på denne måten i forbindelse med ei utregning et eksempel på det som kalles en *strategi* i matematikk. Strategier kan være både gode og mindre gode, og hensikten med de tre første kapitlene i dette heftet er at du skal få jobbe med ulike strategier og finne ut hvilke strategier som fungerer best for deg.
Over så en at 13 kunne deles opp på flere måter ved å bruke addisjon og subtraksjon. En kan ofte også dele opp tall ved å bruke multiplikasjon og divisjon. 40 kan ved å bruke multiplikasjon for eksempel skrives som $(10 \cdot 4)$, $(5 \cdot 8)$ eller $(20 \cdot 2)$. I tillegg kan 40 også skrives som for eksempel (30 + 10), (20 + 20), (50 – 10) og $(120 : 3)$. Hvordan en bør dele opp tall for å få den mest forenklede utregninga varierer fra regnestykke til regnestykke.

<u>Oppgave 1</u>

Del opp følgende tall på minst fire forskjellige måter:

a) 16
b) 24
c) 50
d) 7
e) 19
f) 37
g) 82
h) 134

For å kunne bruke strategier som baseres på oppdeling av tall må en vite hvordan en skal regne med *parenteser*, *potenser* og *de fire regneartene*. Spesielt viktig er det å vite hva en skal gjøre i hvilken rekkefølge. Den bestemte rekkefølgen i kalles *regnerekkefølgen*.

Det første en må gjøre i en utregning er å «få bort» parentesene. Deretter skal potenser regnes ut. Deretter multiplikasjon og divisjon. Til sist kommer addisjon og subtraksjon.

Her er et eksempel på hvordan en kan gjøre utregninga i riktig rekkefølge:

<u>Eksempel</u>

$$
\begin{aligned}
20 - 13 + 2^5 \cdot 7 \quad &= 20 - 13 + 2^5 \cdot (5 + 2) \\
&= 20 - 13 + 2^5 \cdot 5 \quad + 2^5 \cdot 2 \\
&= 20 - 13 + 32 \cdot 5 \quad + 32 \cdot 2 \\
&= 20 - 13 + (30 + 2) \cdot 5 + (30 + 2) \cdot 2 \\
&= 20 - 13 + 30 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 30 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \\
&= 20 - 13 + 150 + 10 \quad + 60 \quad + 4 \\
&= 7 + 220 + 4 \\
&= 231
\end{aligned}
$$

Regnerekkefølgen er altså:

1) Regn ut parenteser
2) Regn ut potenser
3) Regn ut ganging og deling
4) Regn ut pluss og minus

Flere populære oppgaver på Facebook og lignende sider omhandler regnerekkefølge. Klarer du å løse dem om du bruker den korrekte regnerekkefølgen? Og hva tror du er grunnen til at mange svarer feil på slike oppgaver?

<u>Oppgave 2</u>

Regn ut ved å følge regnerekkefølgen (og gjerne ved å bruke oppdeling av tallene der det er hensiktsmessig):

a) $3 \cdot ((25 + 5) - 10) + 33 \cdot 4$
b) $(4^2 - 11) \cdot 5 + 88 : 4 - 13 \cdot (-2)$
c) $100 : (14 - 3^2) - (11 - (5 + 3)) \cdot 20 + 3 \cdot (3 + 4)$
d) $2 \cdot (a + b) : \big((-a) + b + 2 \cdot a\big) + 3 \cdot b \cdot a + 5 \cdot a^2$
e) **Can You Solve This?**

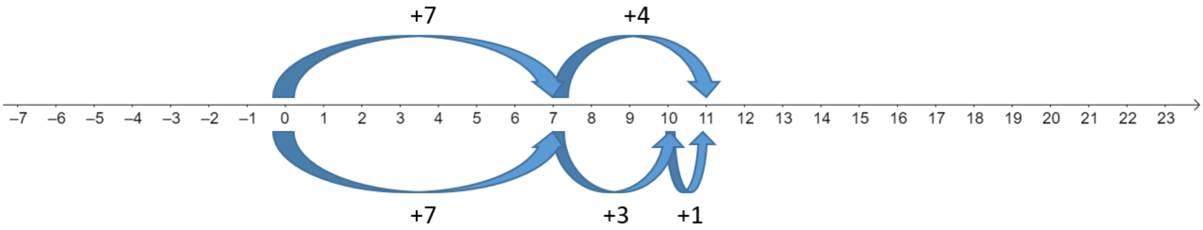
$$\mathbf{9 - 3 \div \frac{1}{3} + 1 =}$$

Addisjon og subtraksjon (ca. 2 timer)

I *addisjon*s- og *subtraksjon*sstykker kan det noen ganger være lurt å se for seg ei *tallinje*, penger, eller lengder (av for eksempel planker eller tau) når en skal finne en god strategi for utregninga. Illustrasjoner med tallinje og penger er det som blir brukt i dette heftet.

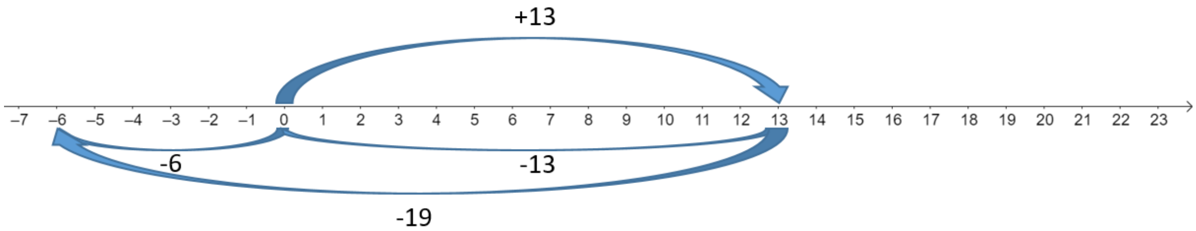
Eksempler

Om en skal regne ut 7 + 4 kan en ved hjelp av tallinja se at det kan være en lur strategi å dele opp 4 i (3 + 1), slik at en får 7 + 3 + 1 = 10 + 1 = 11.



Figur 1: Tallinjerepresentasjon av 7 + 4.

På samme måte kan en se at det at (– 19) kan deles opp i ((– 13) + (– 6)) gjør det enklere å se at 13 – 19 blir (– 6).



Figur 2: Tallinjerepresentasjon av 13 - 19.

Om en i stedet for tallinje bruker penger vil illustrasjonene av noen utvalgte regnestykker se ut som i figur 3 og 4. I figur 3 kan en se at 100-kronersseddelen, 50-kronersseddelen, to 20-kroninger, én 5-kroning og fem 1-kroninger kan slås sammen og «veksles inn» i en 200-kronersseddel. Prosessen i figur 3 kunne om ønskelig vært oppdelt i flere steg, for eksempel ved å gjøre om 5-kroningen og de fem 1-koningene til en 10-kroning før dette slås sammen med 100, 50 og 2 · 20 til en 200-kronesseddel. Da kan det bli enklere å beholde oversikten i utregninga.

143 + 78

Figur 3: Addisjon ved å veksle og sortere mynter og sedler i tre steg.

Prosessen ved subtraksjon som er illustrert i figur 4 fungerer omtrent på samme måte som ved addisjon. Først må pengene veksles og sorteres, slik at en til slutt ser hvor mye som er igjen. I figur 4 ble det 23 kroner igjen til slutt, så da er 62 – 39 = 23. En kan også ende opp med at det kun er røde mynter igjen til slutt, noe som betyr at svaret på regnestykket er et negativt tall.

62 – 39

Figur 4: Subtraksjon ved å veksle og sortere penger i fire steg. Røde penger kan en tenke på som gjeld eller det en skal betale.

I oppgave 3 og 4 kan du gjerne prøve ut flere strategier på hver av deloppgavene. På den måten kan du finne ut hva som er mest effektivt og hva du liker best. Bruk gjerne tallinjerepresentasjon, pengerepresentasjon eller en annen representasjon for å strukturere tankene dine om du føler behov for det.

Tips til de følgende oppgavene: Bruk oppdelingsstrategier! 49 kan for eksempel skrives som (50 – 1). Dette kan representeres som en 50-kronersseddel og en rød 1-kroning om en vil bruke pengerepresentasjonen.

Oppgave 3

Regn ut følgende addisjonsstykker på den måten du mener er mest effektiv. Prøv deg gjerne på noen strategier du ikke har brukt før.

a) 47 + 21
b) 129 + 258
c) 999 + 1001
d) 67 + 496
e) (-40) + 80
f) 154 + 154 + 154 + 154
g) 31 + 89
h) 19902 + 8259

Oppgave 4

Regn ut følgende subtraksjonsstykker på den måten du mener er mest effektiv. Prøv deg gjerne på noen strategier du ikke har brukt før.

a) 47 – 21
b) 258 – 129
c) 1002 – 998
d) 496 – 67 – 81
e) (– 40) – 80
f) 9999 – 1482
g) 10000 – 1482
h) 712 – (1283 – 648)

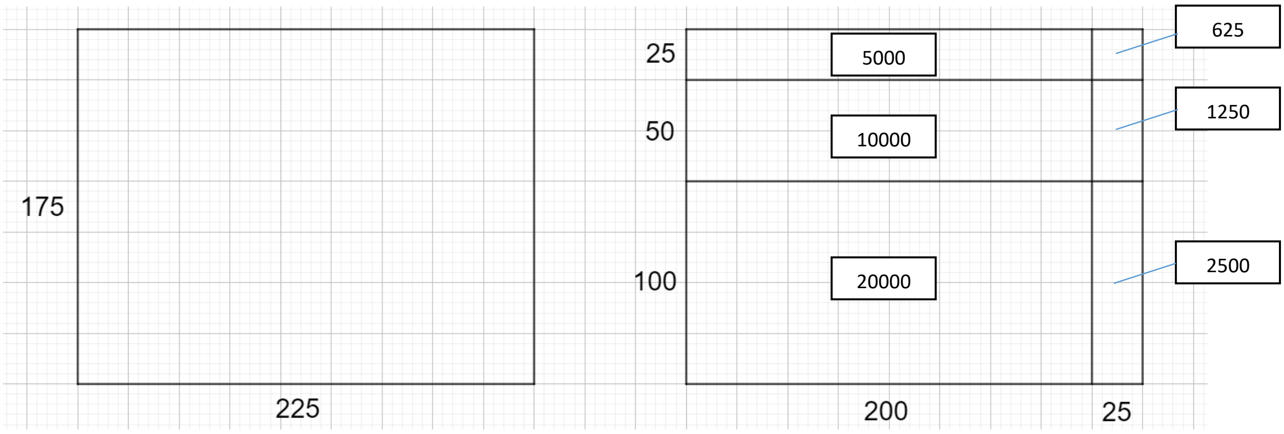
Multiplikasjon og divisjon (ca. 4 timer)

Noen ganger kan det være lurt å se for seg rektanglers areal eller poser med drops når en skal regne ut *multiplikasjon*sstykker. Utregning ved bruk av en *arealmodell* kan se slik ut:

Eksempel

225 · 175

Dette regnestykket kan en tenke på som arealet av et rektangel med ei grunnlinje som er 225 lang og en høyde som er 175 lang. Se venstre del av figur 5.



Figur 5: Arealmodell for multiplikasjon. Arealet i det venstre og det høyre rektangelet er likt, men det er lettere å regne ut hver av de små bitene for deretter å legge de sammen (i figuren til høyre) enn det er å regne ut hele arealet direkte (i figuren til venstre).

Ved å dele opp arealet av rektangelet, for eksempel slik det er gjort i høyre del av figur 5, kan en forenkle utregningen av regnestykket 225 · 175. En vil da få:

$$\begin{aligned} 225 \cdot 175 &= (200 + 25) \cdot (100 + 50 + 25) \\ &= 200 \cdot 100 + 25 \cdot 100 + 200 \cdot 50 + 25 \cdot 50 + 200 \cdot 25 + 25 \cdot 25 \\ &= 20000 + 2500 + 10000 + 1250 + 5000 + 625 \\ \underline{225 \cdot 175} &\underline{= 39375} \end{aligned}$$

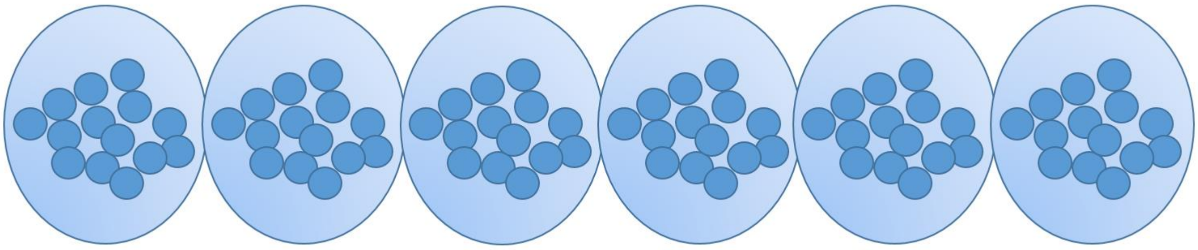
En regner altså ut hver av de små arealene hver for seg og summerer de små arealene etterpå.

En annen måte å illustrere multiplikasjon på er ved å bruke det som kalles en *mengdemodell*. I mengdemodeller bruker en ofte drops eller steiner eller lignende som en sorterer eller *grupperer* ved å bruke poser/esker/bokser.

Eksempel

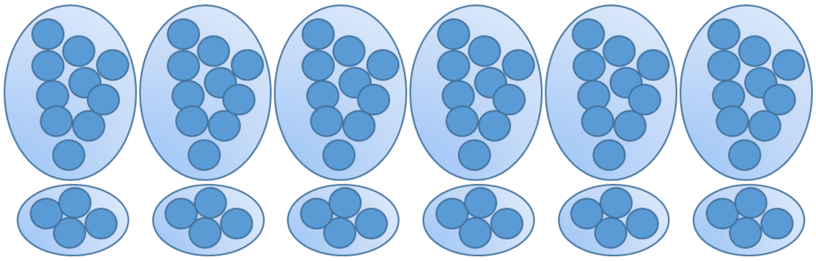
14 · 6

Dette kan en tenke på som at en har 6 poser med 14 drops i hver pose. Se figur 6.



Figur 6: Mengdemodell med drops i poser.

For å forenkle utregninga kan en plassere dropsene i nye poser. En kan lage seg 6 poser med 10 drops i hver, og i tillegg lage seg 6 poser med 4 drops i hver. Se figur 7.



Figur 7: Mengdemodell der dropsene er sortert i poser med ti drops per pose og i poser med fire drops per pose.

Nå kan en regne ut hvor mange drops det er totalt. En vil da få:

$$
\begin{aligned}
14 \cdot 6 &= (10 + 4) \cdot 6 \\
&= 10 \cdot 6 + 4 \cdot 6 \\
&= 60 + 24 \\
\underline{\underline{14 \cdot 6 = 84}}
\end{aligned}
$$

En regner altså ut hvor mange drops det er i tierposene og i firerposene, og summerer dette etterpå. En annen mulighet er å tenke at det er 14 poser med 6 drops i hver pose. Da kunne en i så fall delt inn dropsene i 14 poser med 5 drops per pose og 14 enkle drops. 14 poser med 5 drops per pose er totalt halvparten av $10 \cdot 14 = 140$ drops siden 5 er halvparten av 10, altså 70. I tillegg var det 14 enkle drops, noe som gir 84 drops totalt. Prøv gjerne å lage en illustrasjon av denne tankegangen selv.

Oppgave 5

Regn ut følgende multiplikasjonsstykker på den måten du mener er mest effektiv. Prøv deg gjerne på noen strategier du ikke har brukt før.

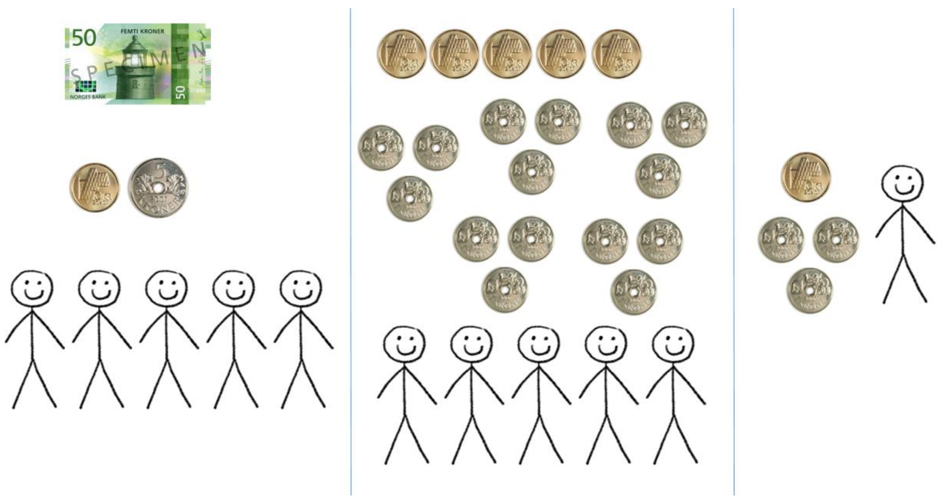
a) $12 \cdot 40$
b) $19 \cdot 8$
c) $70 \cdot 131$
d) $16 \cdot 35$
e) $4 \cdot 21$
f) $62 \cdot 24$
g) $11 \cdot 5 \cdot 12$
h) $43 \cdot 3{,}9$

I *divisjon*sstykker kan en se for seg fordeling av penger eller drops på et visst antall personer eller poser.

Eksempler

65 : 5

Dette kan en tenke på som at 65 kroner skal deles på fem personer. Spørsmålet blir da: Hvor mange kroner får hver person dersom pengene skal fordeles likt?



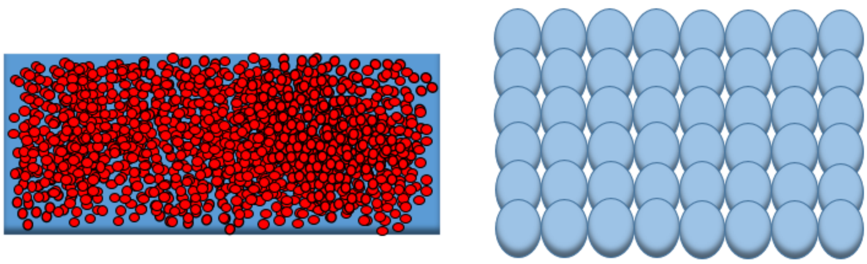
Figur 8: Fordeling av 65 kroner på 5 personer i tre steg.

For å fordele pengene på en enkel måte kan en begynne med å dele opp femtilappen i fem deler, altså fem tikroninger. Deretter kan en se på de resterende 15 kronene. Tieren og femmeren må veksles inn i enkroninger, og disse kan sorteres i grupper på tre. En får altså fem grupper med tre enkroninger. Nå kan en enkelt fordele pengene på personene, og hver person får en av fem tikroninger og en av fem grupper med tre enkroninger. Totalt blir dette 10 + (3 · 1) = 13 kroner per person. Om en skal skrive denne utregningen med tall, blir det slik:

$$\begin{aligned} 65 : 5 &= (50 + 15) : 5 \\ &= 50 : 5 + 15 : 5 \\ &= 10 + 3 \\ \underline{\underline{65 : 5 = 13}} \end{aligned}$$

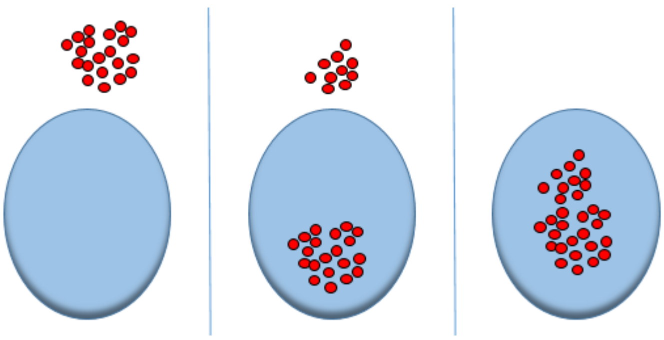
1440 : 48

Dette kan en tenke på som at en har en stor boks med 1440 drops (se figuren under) som skal fordeles på 48 poser. Spørsmålet er hvor mange drops en får i hver pose.



Figur 9: Fordeling av 1440 drops på 48 poser.

En kan begynne med å fordele 20 drops i hver pose (se figuren under), fordi en kan se at det i alle fall vil være nok til dette siden 20 · 48 = 2 · 10 · 48 = 2 · 480 = 960. Deretter kan en ta 1440 – 960, og finne ut at det er 480 drops igjen i boksen. 480 : 48 = 10, og en kan dermed putte 10 drops i hver av de 48 posene. I hver pose ligger det nå 20 + 10 = 30 drops.



Figur 10: Illustrasjon av at en først legger 20 drops i hver pose, og deretter 10 ekstra drops i hver pose.

Utregningen kan skrives på flere måter med tall. To mulige måter er vist på neste side.

$$1440 : 48 = (960 + 480) : 48$$
$$= 960 : 48 + 480 : 48$$
$$= 20 + 10$$
$$\underline{\underline{1440 : 48 = 30}}$$

$$\begin{array}{r} 1440 : 48 = 20 + 10 = 30 \\ \underline{-\ 960} \\ 480 \\ \underline{-\ 480} \\ 0 \end{array}$$

Om en i stedet har fått vite at en har 1440 drops som skal fordeles i poser slik at hver pose har 30 drops, blir spørsmålet hvor mange poser en kan få til. Da kan en tenke at en fyller én og én pose med 30 drops, og teller hvor mange ganger en trekker 30 fra 1440 før en kommer til 0. Prøv gjerne dette selv, og prøv også gjerne å for eksempel fylle 10 og 10 poser. Lag gjerne illustrasjoner av denne løsningsstrategien selv.

OBS!

Det er kun tallet foran divisjonstegnet som kan «deles opp» for å forenkle utregninga. Om en deler opp tallet bak divisjonstegnet vil utregninga ofte bli feil. Prøv gjerne å regne ut et divisjonsstykke der du deler opp tallet bak divisjonstegnet. Du vil mest sannsynlig få feil svar.

Oppgave 6

Regn ut følgende divisjonsstykker på den måten du mener er mest effektiv. Prøv deg gjerne på noen strategier du ikke har brukt før.

a) 132 : 11
b) 85 : 5
c) 40 : 2,5
d) 246 : 4
e) 1797 : 3
f) 678 : 113
g) 96 : 4
h) 64,6 : 3,8

(Tips til h-oppgaven finner du i fasitsidene)

Merknad til de fire regneartene

Det er også mulig å bruke «standardmetoder» for å regne ut addisjons-, subtraksjons-, multiplikasjons- og divisjonsstykker. Om du er mest komfortabel med disse metodene, kan du bruke dem. Nedenfor finner du lenker til nettsider og videoer som forklarer hvordan «standardmetodene» utføres.

https://matematikk.net/side/Multiplikasjon_og_divisjon

https://www.youtube.com/watch?v=h8Zz0vYVSnQ

https://www.youtube.com/watch?v=wYgWAzQt5ds

Brøk (ca. 5 timer)

Brøk brukes i flere ulike sammenhenger i 1P og 2P, blant annet i forbindelse med blandingsforhold, likninger og funksjoner, formler og utregninger.

Brøk som forhold

Når en jobber med *brøk som forhold* forteller brøken deg hva sammenhengen mellom to størrelser er. Det kan for eksempel være forholdet mellom vann og konsentrert saft i ei saftblanding, eller forholdet mellom avstander på et kart eller ei tegning og avstander i virkeligheten.

Eksempel

Forholdet mellom saftkonsentrat og vann i ei saftblanding er $\frac{1}{9}$ (skrives ofte som 1 : 9). Du vil lage 1 L saft. Hvor mye vann trenger du?

Siden en har 1 del saftkonsentrat per 9 deler vann er det totalt 1 del + 9 deler = 10 deler i den ferdige blandinga. 1 av 10 deler er saftkonsentrat og 9 av 10 deler er vann. 9 av 10 deler kan også skrives som $\frac{9}{10}$ slik at den totale mengden vann kan regnes ut ved å løse den følgende likninga:

$$\frac{9}{10} = \frac{x}{1\ \mathrm{L}}$$

$$x = \frac{9}{10} \cdot 1\ \mathrm{L} = 0{,}9\ \mathrm{L} = 9\ \mathrm{dL}$$

Det er altså 9 dL vann i 1 L saftblanding når blandingsforholdet mellom saftkonsentrat og vann er 1 : 9.

Oppgave 7

a) I ferdigblandet «Fun Light» er forholdet mellom ren saft og vann 1 : 9.
Hvor mange liter saftkonsentrat går med dersom 150 personer på en skoleavslutning skal få 0,2 L ferdigblandet «Fun Light» hver?

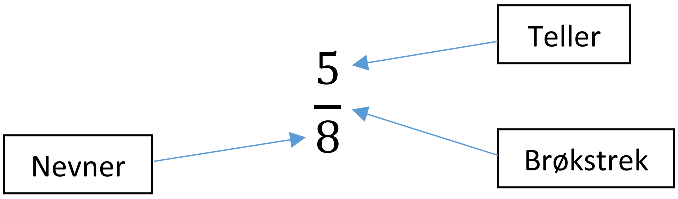
b) Lars skal vaske husveggene før han skal male huset, og skal bruke ei husvask-blanding. Blandingsforholdet mellom konsentrert Jotun Husvask og vann er 1 : 20.
Hvor mye Jotun Husvask må Lars ha på 5 L vann?

c) Lise har 6,3 L ferdigblanda husvask med forholdet 1 : 20 mellom Husvask og vann.
Hun ønsker i stedet å ha et forhold på 1: 15. Hvor mye Husvask må hun tilsette blandingen for å få dette forholdet?

d) Ei hustegning har målestokk 1 : 50. På tegninga er ei dør plassert 6 mm feil. Hvor stor vil denne feilen bli i virkeligheten når huset bygges?

Omgjøring mellom brøk, desimaltall og prosent

Et *brøk*symbol består av *teller*, *nevner* og *brøkstrek* (se figuren under), der nevneren forteller hvor mange like deler det er i *helheten*, og telleren forteller hvor mange av disse delene som er interessante i den aktuelle situasjonen.



I brøken over er det altså fem av åtte deler som er interessante. Noe det er viktig å være klar over er at alle disse åtte delene er like store. Det går an å tenke at en har en pose med åtte like drops, og at det er fem av disse dropsene som er interessante akkurat nå, eller at en har ei kake som er delt i åtte like store stykker, og at det er fem av disse stykkene det skal skje noe med.

Det går også an å tenke på den samme brøken som at en har fem av noe som skal deles på åtte av noe, for eksempel fem pizzaer som skal deles på åtte personer. Da vil personene få 5/8 (eller litt mer enn en halv) pizza hver. I dette tilfellet betyr telleren og nevneren noe annet enn i de to første eksemplene. Tenk over hva som er forskjellen.

Brøken representerer et tall, og kan derfor gjøres om til *desimaltall* og *prosent*. Om en vil gjøre om 5/8 til desimaltall regner en ut 5 : 8. Det blir 0,625. For å gjøre om til prosent kan en enten multiplisere desimaltallet med 100 % eller utvide brøken slik at nevneren er 100.

<u>Eksempel</u>

For å gjøre om brøken $\frac{7}{25}$ til prosent kan en gjøre om til desimaltall og multiplisere desimaltallet med 100. Slik ser utregninga ut:

$$\frac{7}{25} = 7 : 25 = 0{,}28$$

$$0{,}28 \cdot 100\ \% = 28\ \%$$

En kan også finne prosentformen av $\frac{7}{25}$ ved å utvide brøken slik at nevneren blir 100. Utregninga blir da slik:

$$\frac{7}{25} = \frac{7 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{28}{100} = 28\ \%$$

Her kan vi observere at prosenttegnet betyr «delt på hundre» eller «hundredeler» siden $\frac{28}{100}$ er lik 28 %.

Oppgave 8

Gjør om følgende tall slik at du har tallet både på desimaltallsform, brøkform og prosentform. Tegn også alle tallene inn på ei tallinje.

a) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{14}{25}$

c) $\frac{14}{7}$

d) $0{,}55$

e) 24 %

f) 0,825

g) 

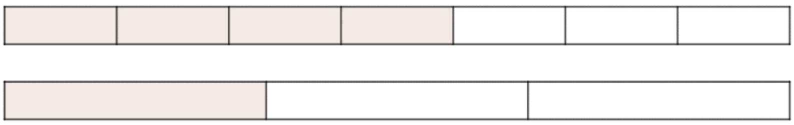
h) $\frac{8}{11}$

Addisjon og subtraksjon med brøk

For å addere og subtrahere brøker er en avhengig av å bruke *fellesnevner*. Fellesnevneren til to brøker kan en bestandig finne ved å multiplisere tellerne i de to brøkene. Deretter må en utvide hver av brøkene slik at nevnerne blir lik fellesnevneren.

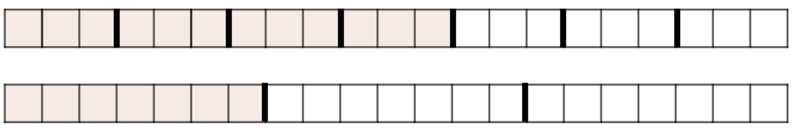
Eksempel

Regn ut $\frac{4}{7}+\frac{1}{3}$.



Ved å studere illustrasjonen over kan en se at $\frac{1}{3}$ er litt større enn $\frac{2}{7}$. Ved å bruke denne informasjonen kan en se at svaret bør bli litt mindre enn 1 siden $\frac{4}{7}+$ «litt mer enn $\frac{2}{7}$» = «litt mer enn $\frac{6}{7}$». I og med at $\frac{1}{3}$ ikke er like mye som $\frac{3}{7}$ vil svaret være mindre enn 1 (som er det samme som $\frac{7}{7}$).

For å regne ut det nøyaktige svaret kan en bruke fellesnevner. I dette tilfellet blir den minste fellesnevneren $7 \cdot 3 = 21$. Det blir 21 fordi vi må dele opp hver sjudelsbit i tre og hver tredelsbit i sju for at alle bitene skal bli like store. Illustrasjonen under viser hvordan brøkene vil se ut med en nevner på 21.



Om en studerer illustrasjonene kan en se at hver sjudel blir delt i tre deler, at hver tredel blir delt i sju deler, og at hver del nå er like stor. Dette er viktig fordi det ikke gir mening å skulle addere (plusse sammen) deler som ikke er like store. Hva skulle i så fall tallsvaret en da får bety? Den minste delen? Den største? En blanding av de to størrelsene? Det ville omtrent blitt som å addere biler og epler. Hva skulle en kalt summen av bilene og eplene?

Ved å telle de fargelagte delene på illustrasjonen med fellesnevner kan en se at $\frac{4}{7}+\frac{1}{3}=\frac{19}{21}$ fordi 19 deler har farge og én helhet tilsvarer 21 deler.

Om en skal skrive utregningen med matematiske symboler kan det gjøres på denne måten:

$$\begin{aligned}\frac{4}{7}+\frac{1}{3} &= \frac{4\cdot 3}{7\cdot 3}+\frac{1\cdot 7}{3\cdot 7}\\ &= \frac{12}{21}+\frac{7}{21}\\ &= \frac{19}{21}\end{aligned}$$

<u>Oppgave 9</u>

Gjør overslag, tegn figurer, og regn ut ved å bruke fellesnevner.

a) $\frac{3}{8}+\frac{2}{4}$

b) $\frac{1}{5}+\frac{1}{4}$

c) $\frac{2}{3}+\frac{6}{7}$

d) $\frac{8}{3}+\frac{1}{4}$

e) $\frac{7}{12}-\frac{2}{5}$

f) $\frac{11}{6}-\frac{13}{13}$

g) Lag en oppgave med brøkaddisjon du mener er utfordrende, og løs oppgaven.

h) Lag en oppgave med brøksubtraksjon du mener er utfordrende, og løs oppgaven.

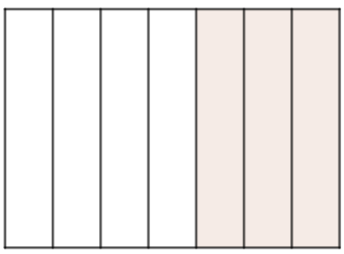
Multiplikasjon med brøk

Multiplikasjon med brøk utføres ved å multiplisere teller med teller og nevner med nevner. Om en har et heltall som skal multipliseres med en brøk, så multipliserer en heltallet med telleren, og lar nevneren stå i fred.

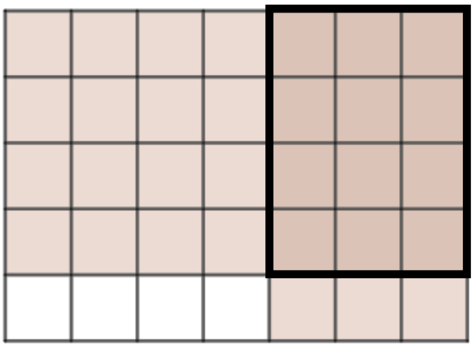
<u>Eksempel</u>

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3\cdot 4}{7\cdot 5}=\frac{12}{35}$$

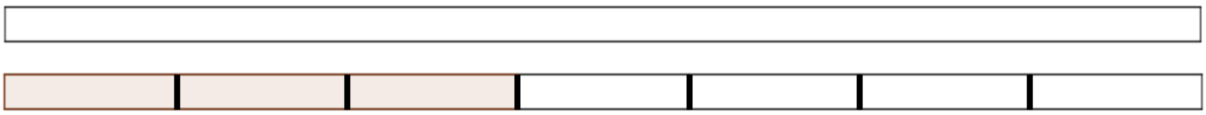
Dette regnestykket kan illustreres ved å se på et rektangel. Først kan en dele inn rektangelet i sju like deler vertikalt, og markere tre av de sju delene.



Deretter kan en dele inn det samme rektangelet i fem like deler horisontalt, og markere fire av disse fem delene. I og med at en er interessert i å finne ut hva $\frac{4}{5}$ av $\frac{3}{7}$ er, så kan en nå se på hva som er markert både i forbindelse med sju- og femdelene. Det er 12 ruter siden tre deler ble markert vertikalt i forbindelse med sjudelene og fire horisontalt i forbindelse med femdelene. Totalt har en $5 \cdot 7 = 35$ ruter, og svaret på oppgaven er dermed $\frac{12}{35}$ siden tolv av trettifem ruter i figuren er markert.

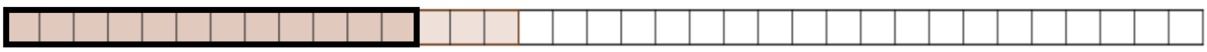


En kan også illustrere regnestykket ved å bruke en stav med lengde 1. Først ønsker en å finne $\frac{3}{7}$ av lengden av staven, noe som er $\frac{3}{7} \cdot 1 = \frac{3 \cdot 1}{7} = \frac{3}{7}$. En har da delt staven i sju like store deler.



Deretter ønsker en å finne ut hvor mye $\frac{4}{5}$ av $\frac{3}{7}$ av staven er. For å finne ut det kan en dele opp de tre sjudelene i fem like store deler og markere fire av de fem delene.

Om en ønsker å finne ut hvor mye av den originale staven som nå er markert kan en dele hver av sjudelene i fem, noe som gir $7 \cdot 5 = 35$ deler totalt på staven. Det er tre trettifemdeler i hver av de fire femdelene som ble markert, noe som gir $3 \cdot 4 = 12$ trettifemdeler totalt.



<u>Oppgave 10</u>

Regn ut og forkort brøkene.

a) $\frac{6}{4} \cdot \frac{5}{3}$

b) $\frac{12}{7} \cdot \frac{9}{4}$

c) $\frac{13}{8} \cdot \frac{9}{13}$

d) $\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{11}$

e) $\frac{103}{100} \cdot 700$

f) Lag en oppgave med brøkmultiplikasjon du mener er utfordrende, og løs oppgaven.

Divisjon med brøk

Om en skal dele en brøk på en annen brøk kan en i stedet «snu» den siste brøken og multiplisere brøkene.

<u>Eksempel</u>

$$\frac{21}{13} : \frac{3}{5} = \frac{21}{13} \cdot \frac{5}{3} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 5}{13 \cdot 3} = \frac{\cancel{3} \cdot 7 \cdot 5}{13 \cdot \cancel{3}} = \frac{35}{13}$$

Dette vil en bestandig kunne gjøre, og det kan vises på følgende måte ved å bruke forkorting og utviding av brøker. I linja under kan *a*, *b*, *c* og *d* byttes ut med hvilke som helst tall som ikke er 0.

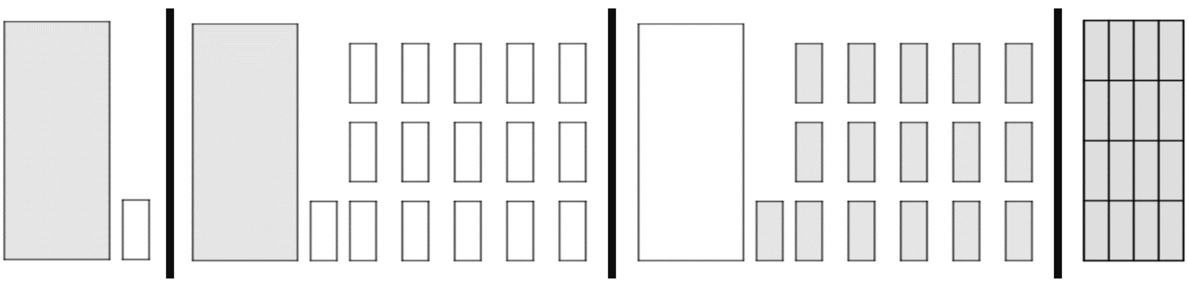
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot d}{\frac{c}{\cancel{d}} \cdot \cancel{d}} = \frac{\frac{a \cdot d}{b}}{c} = \frac{\frac{a \cdot d}{\cancel{b}} \cdot \cancel{b}}{c \cdot b} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Om en setter inn tall i stedet for bokstaver i $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ får en altså samme svar som hvis en setter inn de samme tallene for de samme bokstavene i $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

En måte å tenke på divisjon med brøk er følgende måte:

Om du har regnestykket $12 : 6$, så kan du tenke at du har 12 liter saft som skal fordeles på flasker som tar 6 liter hver. Hvor mange flasker trenger du? Det blir $12 : 6 = 2$ flasker fordi $12 = 2 \cdot 6$.

Tenk deg nå at du har 12 liter saft som skal fordeles på flasker som tar $\frac{3}{4}$ liter hver. Hvor mange flasker trenger du nå? Jo, $12 : \frac{3}{4} = 16$ flasker fordi $12 = 16 \cdot \frac{3}{4}$. Det betyr at 16 flasker som har plass til $\frac{3}{4}$ liter hver altså totalt har plass til 12 liter. Dermed kan en tenke at «noe» delt på en brøk betyr «hvor mange flasker som hver rommer «brøken» antall liter trenger en for å få plass til dette «noe»».
Figur 11 viser en illustrasjon av eksempelet med fordelingstankegangen av divisjon med brøk. 12 liter saft skal fordeles på flasker som hver rommer $\frac{3}{4}$ liter, og svaret blir at en må ha 16 flasker for å få plass til all safta.



Figur 11: Til venstre i figuren er det en tank med 12 liter saft (det grå rektangelet) og ei flaske som rommer 3/4 liter (det hvite rektangelet). I de tre andre figurene er det illustrert den samme 12-literstanken og 16 flasker på 3/4 liter.

Om vi nå tenker på det første eksempelet på forrige side med denne fordelingstankegangen blir spørsmålet «Hvor mange flasker som hver har plass til $\frac{3}{5}$ liter trenger en for å få plass til $\frac{21}{13}$ liter?» Jo, du må nesten ha tre hele flasker, nemlig $\frac{35}{13} = 2\frac{9}{13}$ flasker.

Oppgave 11

Beregn omtrent hva svaret blir og regn deretter ut det nøyaktige svaret. Sammenlikn det omtrentlige svaret og det nøyaktige svaret.

a) $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$

b) $\frac{4}{3} : \frac{8}{7}$

c) $\frac{3}{8} : \frac{2}{7}$

d) $\frac{9}{2} : \frac{5}{11}$

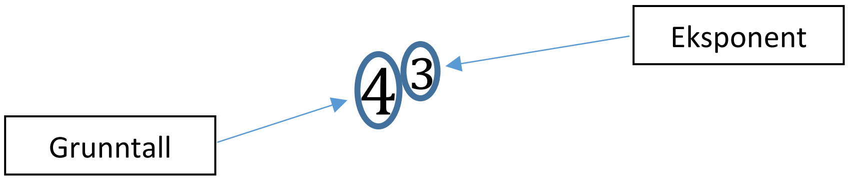
e) $\frac{5}{13} : \frac{4}{3}$

f) Lag en oppgave med brøkdivisjon du mener er utfordrende, og løs oppgaven.

Potenser og standardform (ca. 1 time)

En *potens* består av et *grunntall* og en *eksponent*. Potensen kan tolkes som at grunntallet skal multipliseres med seg selv like mange ganger som eksponentens tallverdi.

Eksempel



Potensen 4^3 betyr at grunntallet 4 skal multipliseres med seg selv 3 ganger. Med andre ord er det slik at $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$.

Det finnes noen regler for hva en kan gjøre når en jobber med potenser.

1) Om en skal multiplisere to potenser **med samme grunntall** kan en i stedet addere eksponentene. Eksempel: $5^3 \cdot 5^7 = 5^{3+7} = 5^{10}$
2) Om en har en potens opphøyd i en eksponent kan en i stedet multiplisere eksponentene. Eksempel: $(4^3)^5 = 4^{3 \cdot 5} = 4^{15}$
3) Om en har en brøk opphøyd i en eksponent kan en i stedet opphøye både teller og nevner i eksponenten. Eksempel: $\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3^5}{4^5}$
4) Om en har noe opphøyd i 0 er hele potensen lik 1. Eksempel: $3^0 = 1$
5) Om en har et grunntall opphøyd i 1 er dette lik grunntallet selv. Eksempel: $3^1 = 3$

Oppgave 12

Regn ut.

a) $3^2 + 2^3$
b) $7^4 \cdot 7^{-2}$
c) $5^3 - 5^2$
d) $3^6 : 3^7$
e) 4^{2^3}
f) $(4^2)^3$
g) $3^0 + 4^2 \cdot 10^1$
h) $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot 131^0 \cdot 3^2 + (4+3)^2$

Tall på standardform

Standardform er en måte å skrive tall på. Denne måten er meget praktisk om en skal skrive veldig store eller veldig små tall. Et tall skrevet på standardform består av to deler.

Den første delen er et desimaltall med nøyaktig ett siffer foran kommaet. Sifferet foran kommaet må derfor være større eller lik 1 og mindre eller lik 9. Desimalene etter kommaet kan være hva som helst.

Den andre delen består av en *potens med grunntall 10*.

De to delene multipliseres for å gi tallet på standardform.

Eksempel

Hvordan kan en skrive tallene 3782 og 0,0693 på standardform?

Vi ser på 3782 først. I utregninga under er det brukt at $\frac{1000}{1000}$ er det samme som 1, og at dersom en multipliserer 1 med et tall, så blir svaret det samme tallet.

$$3782 = 3782 \cdot \frac{1000}{1000} = \frac{3782}{1000} \cdot 1000 = 3{,}782 \cdot 1000 = 3{,}782 \cdot 10^3$$

Tallet 3782 skrives altså som $3{,}782 \cdot 10^3$ på standardform.

For å finne standardformen av tallet 0,0693 multipliserer vi med $\frac{100}{100}$ i stedet for med $\frac{1000}{1000}$ Dette kan vi gjøre fordi $\frac{100}{100}$ også er lik 1. (Hvorfor tror du det er lurt å bruke $\frac{100}{100}$ i stedet for $\frac{1000}{1000}$?)

$$0{,}0693 = 0{,}0693 \cdot \frac{100}{100} = 0{,}0693 \cdot 100 \cdot \frac{1}{100} = 6{,}93 \cdot \frac{1}{100} = 6{,}93 \cdot 10^{-2}$$

Tallet 0,0693 skrives altså som $6{,}39 \cdot 10^{-2}$ på standardform. Merk at eksponenten er negativ når tallet har en verdi som er mellom 0 og 1.

For å få skrevet et tall på standardform ønsker vi altså å få denne andre delen av tallet på standardform til å bli 10 opphøyd i noe. Eksponenten til tierpotensen blir positiv om tallet skrevet som desimaltall er større enn 1 og negativ om tallet er mellom 0 og 1.

Oppgave 13

Gjør om tallene til standardform.

a) 98113
b) 7302381
c) 0,000003
d) 0,92813
e) $7 \cdot 101$
f) 0,4 · 0,05
g) 570 + 412
h) 3,2 – 3,19739

Funksjoner (ca. 4 timer)

En *funksjon* kan sees på som en slags regel som beskriver en *sammenheng* mellom ting i matematikk. Et eksempel på en funksjon en møter i dagliglivet er i kassasystemet i butikken. Her skannes en vare, og så får en vite prisen på varen. Funksjonen i kassasystemet gir deg altså sammenhengen mellom en vare og prisen på varen. Et annet eksempel på en funksjon er beskrivelsen av sammenhengen mellom hvor mange kg appelsiner en kjøper i butikken og hvor mye en skal betale for disse.

Lineære og proporsjonale funksjoner

En *lineær funksjon* kan skrives som $\boldsymbol{y = a \cdot x + b}$. Slike funksjoner beskriver sammenhengen mellom x og y.Eksempelvis kan x og y være «antall kg appelsiner en vil kjøpe» og «antall kroner en må betale», eller «antall km en kjører med en leiebil» og «antall kroner en må betale for leie av bilen». a og b er tall som beskriver denne sammenhengen mellom x og y.

En *proporsjonal funksjon* er en lineær funksjon der $b = 0$. Proporsjonale funksjoner kan skrives som $\boldsymbol{y = a \cdot x}$.

Eksempel 1

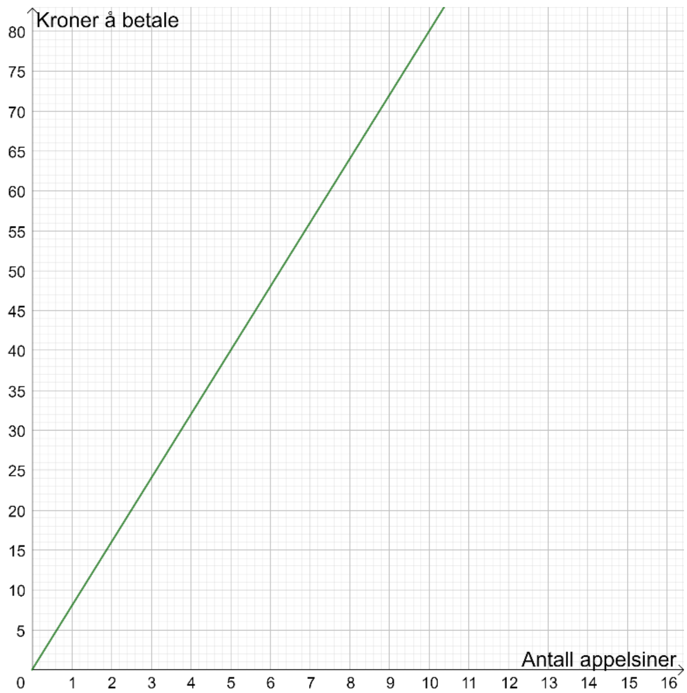
Du skal kjøpe appelsiner. Det er tilbud på butikken, og appelsinene koster 8 kr per kg. Hvordan ser den lineære funksjonen som beskriver denne sammenhengen ut?

For hver kg du kjøper øker prisen med 8 kr, altså må antall kg du kjøper multipliseres med 8 kr per kg. Om du kjøper 0 kg trenger du ikke å betale noen ting, noe som gjør at det er en proporsjonal sammenheng mellom det du skal betale og det antallet kg du kjøper.

Funksjonsuttrykket ser slik ut:

$y = 8 \cdot x$

y er i dette tilfellet antall kroner du må betale om du kjøper x kg appelsiner. Figur 12 viser denne situasjonen som en graf.



Figur 12: Graf som viser sammenhengen mellom antall kg appelsiner en kjøper og antall kroner en må betale.

<u>Eksempel 2</u>

Et leiebilfirma tar seg betalt på følgende måte: For én dags leie koster det 350 kr uansett hvor mye en bruker bilen i løpet av dagen. I tillegg koster det 2 kr for hver kilometer en kjører. Om du ønsker å finne sammenhengen mellom antall kjørte kilometer og antall kroner du må betale for én dags leie av en bil, så er det en lineær funksjon som beskriver dette. Men hvilke tall skal stå hvor?
Det koster 2 kr per km, altså må «2 kr/km» multipliseres med «antall km». 350 kr må du uansett betale, så dette skal ikke multipliseres med noe. Funksjonsuttrykket ser slik ut:

$$y = 2 \cdot x + 350$$

y er i dette tilfellet antall kroner en skal betale, og x er antall kjørte km.

Fra eksemplene over kan vi finne noen likhetstrekk for lineære funksjoner. a (altså det tallet som multipliseres med x) er så mye y endrer seg hver gang x endres med 1. I eksempel 1 er x antall kg appelsiner, og prisen y endrer seg med 8 kr for hvert ekstra kg appelsiner du tar med deg. I eksempel 2 endrer prisen y seg med 2 kr for hver km du kjører.

a kalles for *stigningstallet*, og forteller altså hvor mye y endrer seg for hver x. a kan være både positiv, negativ og 0.

I eksempel 2 måtte vi i tillegg til stigningstallet ha med disse 350 kronene. De skulle betales uansett hvor langt en kjørte i løpet av dagen, og er derfor en konstant utgift en har. Dette tallet kalles for *konstantleddet*, og er tallet b i det lineære funksjonsuttrykket $y = a \cdot x + b$.

Bokstavene i funksjonsuttrykk

I både lineære og proporsjonale funksjoner er det slik at a og b bestemmes ut fra situasjonen funksjonen beskriver, mens x og y varierer. Ved å sette inn forskjellige tall for x i funksjonen kan en finne ut for eksempel hva prisen for forskjellige antall kilo appelsiner er.

Ulike måter å skrive funksjoner på

Funksjoner kan uttrykkes på følgende fire måter:

- Som en *tabell*
- Som et *funksjonsuttrykk*
- Som *tekst*
- Som en *graf*

I matematikk er det viktig å kunne gå mellom de forskjellige uttrykksformene, og det følgende eksempelet viser overganger mellom disse fire for en lineær funksjon.

Eksempel

Du skal ringe en opplysningstjeneste, og lurer på hvor mye en samtale koster basert på hvor lenge du prater med opplysningstjenesten. På nettsiden til tjenesten står det at oppstartsavgiften er på 21 kr, og at det i tillegg koster 28 kr per minutt samtalen varer.

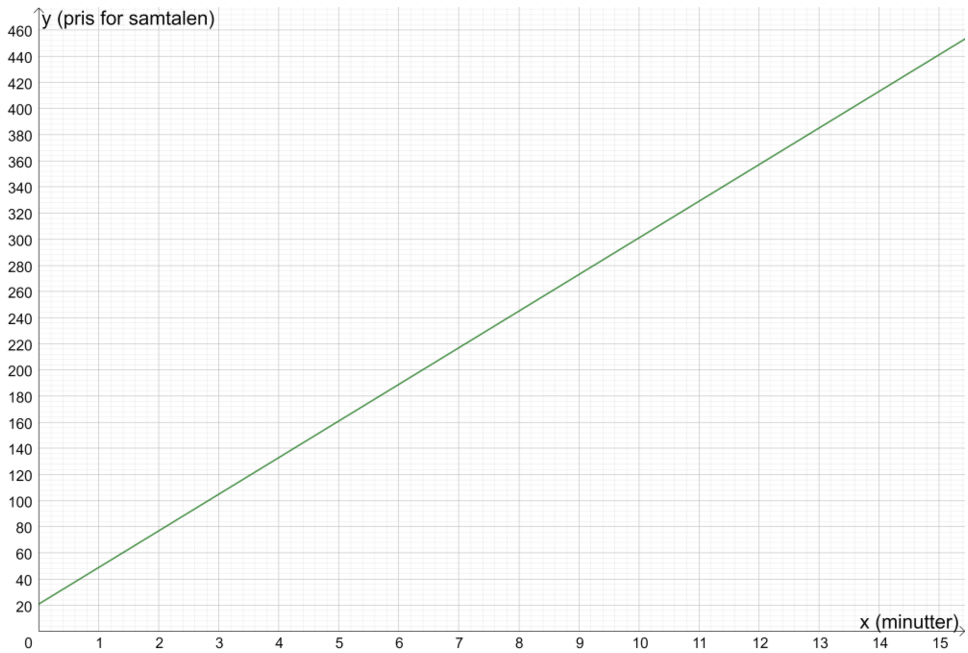
Opplysningene som var oppgitt i teksten over kan skrives som et funksjonsuttrykk der y er totalprisen for en samtale og x er antall minutter samtalen varer. Prisen per minutt er 28 kr, og dette må multipliseres med antall minutter. Stigningstallet a er dermed 28. Oppstartsavgiften på 21 kr må også betales, men er uavhengig av antall minutter. Dette er dermed konstantleddet b. Funksjonsuttrykket ser slik ut:

$$y = 28 \cdot x + 21$$

Om vi har lyst til å vite hvor mye det vil koste å prate i for eksempel ett, to, fem og ti minutter, kan vi sette opp en tabell. For å fylle ut y-verdiene i tabellen bytter vi ut x i funksjonsuttrykket med hvert av tallene i øverste rad, og regner ut. Tabellen ser slik ut:

x (antall minutter)	1	2	5	10
y (totalpris på samtalen)	$28 \cdot 1 + 21 = 49$	$28 \cdot 2 + 21 = 77$	$28 \cdot 5 + 21 = 161$	$28 \cdot 10 + 21 = 301$

Tabellen gir altså sammenhengen mellom noen utvalgte verdier av x og y. Disse kan en deretter legge inn i et koordinatsystem slik at en får tegna en graf. Grafen til denne funksjonen ser slik ut:



Legg merke til hvor grafen skjærer y-aksen. Det er i $y = 21$. y-verdien i skjæringspunktet mellom grafen og y-aksen forteller hva konstantleddet b i funksjonen er. Dette gir også mening om en ser grafen, funksjonsuttrykket, tabellen og teksten i sammenheng, blant annet fordi y-aksen ligger i $x = 0$. Om en bytter ut x med 0 i funksjonsuttrykket får en $y = 28 \cdot 0 + 21$, noe som er lik 21. Om en følger mønsteret nedover til $x = 0$ i tabellen, vil en også komme til at $y = 21$. Og ut fra teksten gir dette også mening. Det vil koste 21 kr å ringe opplysningstjenesten om du legger på umiddelbart etter du har fått svar fordi oppstarts-avgiften er 21 kr.

<u>Oppgave 14</u>

Finn funksjonsuttrykket og tegn grafen til funksjonen. Sett navn på aksene.

a) Temperaturen i stekeovnen er $60°$C, og den øker med $12°$C hvert minutt.
b) Temperaturen i stekeovnen er nå $230°$C, og den avtar med $7°$C hvert minutt.
c)

x	-1	0	1
y	6	2	-2

d)

x	2	3	5
y	2	5	11

e) Prisen for hver bil er 227000 kr.
f) En bil bruker 0,7 L bensin på 10 km kjøring.

Omvendt proporsjonale funksjoner

Funksjonsuttrykket til en *omvendt proporsjonal funksjon* ser slik ut: $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$, der k er et tall som beskriver sammenhengen mellom x og y. Slike funksjoner dukker for eksempel opp i situasjoner der et pengebeløp skal fordeles på et visst antall personer. Da er x antall personer og y antall kroner per person. Desto flere personer beløpet skal deles på, desto mindre penger blir det på hver av personene.

Kvadratiske funksjoner / andregradsfunksjoner

Funksjonsuttrykket til en *kvadratisk funksjon* ser slik ut: $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, der a, b og c er tall som beskriver sammenhengen mellom x og y. Tallet c er også i kvadratiske funksjoner y-verdien til skjæringspunktet mellom grafen og y-aksen. Om a er positiv «smiler» grafen og om a er negativ er grafen «sur».

<u>Oppgave 15</u>

Finn et funksjonsuttrykk som passer til situasjonen, og tegn grafen. Sett navn på aksene.

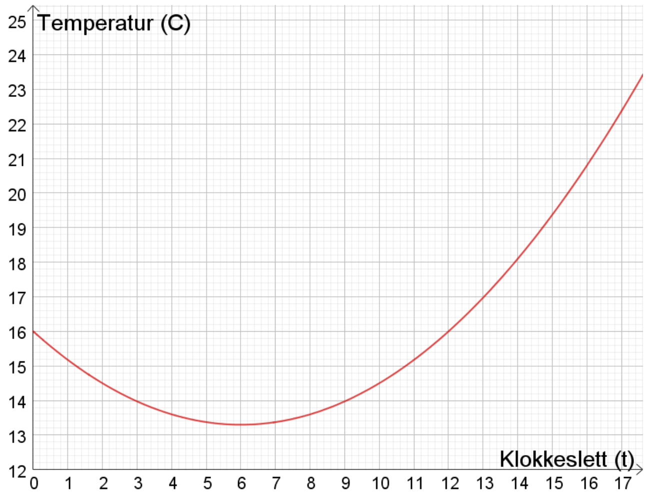
a) En vennegjeng har kjøpt inn mat til en hyttetur. Totalt kostet maten 3000 kr. Hvor mye må hver person betale?
b) For hvilke x-verdier fungerer funksjonen?
c) For hvilke x-verdier er funksjonen realistisk med tanke på situasjonen den beskriver?

d) Ludvig har kjøpt sesongkort på Lerkendal for 2019-sesongen. Det kostet 1600 kr. Hvor mye koster billetten per kamp?

e) Hvor mange kamper må Ludvig være på Lerkendal for at det skal lønne seg å ha sesongkort når en enkeltbillett koster 155 kr?

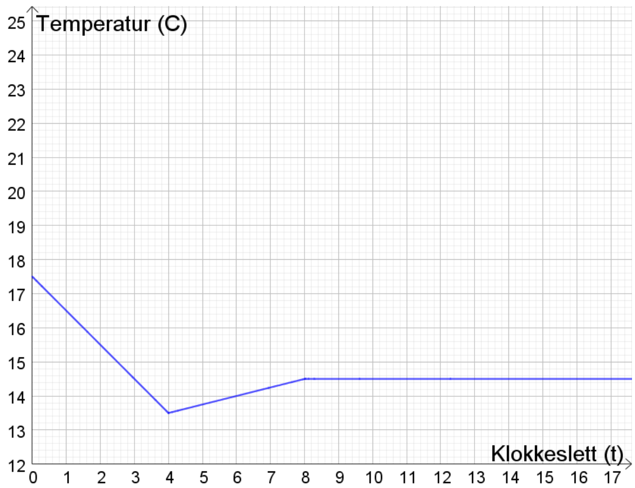
Temperaturen i Trondheim fulgte følgende kurver noen dager i mai.

f)



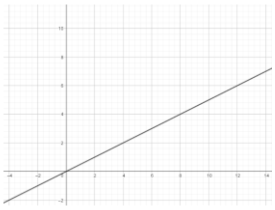
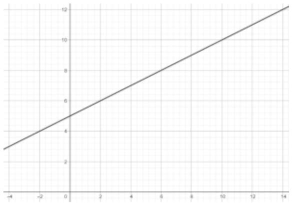
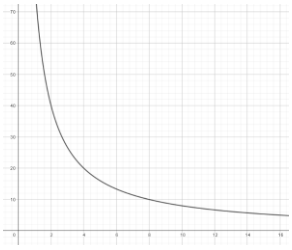
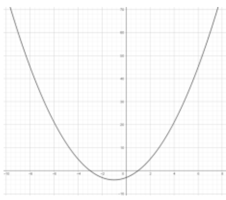
i. Hvordan kan været ha vært denne dagen?
ii. Hva er temperaturen klokka 13?
iii. Når er temperaturen 15 grader?
iv. Hvor stor var temperaturendringen mellom klokka 6 og 16 denne dagen?
v. Hva var den gjennomsnittlige temperaturendringen per time mellom klokka 6 og 16 denne dagen?

g)



i. Hvordan kan været ha vært denne dagen?
ii. Hva er temperaturen klokka 13?
iii. Når er temperaturen 15 grader?
iv. Hvor stor var temperaturendringen mellom klokka 6 og 16 denne dagen?
v. Hva var den gjennomsnittlige temperaturendringen per time mellom klokka 6 og 16 denne dagen?

Følgende tabell gir en oversikt over noen kjennetegn ved de omtalte funksjonstypene.

<table>
<tr><th></th><th>Funksjonsuttrykk</th><th>Graf</th><th>Tabell</th></tr>
<tr><td>Proporsjonale funksjoner</td><td>$y = a \cdot x$</td><td>
Grafen til funksjonen er ei rett linje som går gjennom origo.</td><td>Eksempel: $y = 7x$
<table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>y</td><td>-7</td><td>0</td><td>7</td><td>14</td><td>28</td></tr></table>
En kan se at når x øker med én, så øker y med $a = 7$.</td></tr>
<tr><td>Lineære funksjoner</td><td>$y = a \cdot x + b$</td><td>
Grafen til funksjonen er ei rett linje som ikke nødvendigvis går gjennom origo.</td><td>Eksempel: $y = 4x + 3$
<table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>y</td><td>-1</td><td>3</td><td>7</td><td>11</td><td>19</td></tr></table>
En kan se at når x øker med én, så øker y med $a = 4$.</td></tr>
<tr><td>Omvendt proporsjonale funksjoner</td><td>$y = \frac{k}{x}$</td><td>
Grafen til funksjonen er ikke ei rett linje. Grafen krysser ikke noen av aksene i koordinatsystemet.</td><td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>-</td><td>k</td><td>$\frac{k}{2}$</td></tr></table>
<table><tr><td>x</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>$\frac{k}{3}$</td><td>$\frac{k}{4}$</td><td>$\frac{k}{5}$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Kvadratiske funksjoner</td><td>$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$</td><td>
Grafen til funksjonen er ikke ei rett linje, men et «smil» eller en «sur munn».</td><td>Eksempel:
$y = 3x^2 - x + 2$
<table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td><td>12</td></tr></table></td></tr>
</table>

Fasit

Oppgave 1

a) For eksempel $10 + 6 = 10 + 5 + 1 = 20 - 4 = 5 + 5 + 5 + 1 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4 = \cdots$
b) For eksempel $20 + 4 = 10 + 10 + 4 = 25 - 1 = 4 \cdot 6 = 8 \cdot 3 = 12 \cdot 2 = \cdots$
c) For eksempel $20 + 30 = 40 + 10 = 100 : 2 = 2 \cdot 25 = 5 \cdot 10 = 20 + 20 + 10 = \cdots$
d) For eksempel $5 + 2 = 5 + 1 + 1 = 2 + 2 + 2 + 1 = 10 - 3 = 6 + 1 = 4 + 3 = \cdots$
e) For eksempel $20 - 1 = 15 + 4 = 10 + 9 = 5 + 5 + 5 + 4 = 9 + 9 + 1 = \cdots$
f) For eksempel $40 - 3 = 35 + 2 = 20 + 17 = 30 + 7 = 50 - 13 = 2 \cdot 18 + 1 = \cdots$
g) For eksempel $80 + 2 = 50 + 32 = 100 - 18 = 41 \cdot 2 = 90 - 8 = \cdots$
h) For eksempel $100 + 30 + 4 = 150 - 16 = 67 \cdot 2 = (70 - 3) \cdot 2 = \cdots$

Oppgave 2

a) $3 \cdot \big((25 + 5) - 10\big) + 33 \cdot 4 = 3 \cdot (30 - 10) + 132 = 3 \cdot 20 + 132 = 60 + 132$
$= 182$
b) $(4^2 - 11) \cdot 5 + 88 : 4 - 13 \cdot (-2) = (16 - 11) \cdot 5 + 22 - (-26)$
$= 5 \cdot 5 + 22 + 26 = 25 + 22 + 26 = 73$
c) $100 : (14 - 3^2) - \big(11 - (5 + 3)\big) \cdot 20 + 3 \cdot (3 + 4)$
$= 100 : (14 - 9) - (11 - 8) \cdot 20 + 3 \cdot 7 = 100 : 5 - 3 \cdot 20 + 21 = 20 - 60 + 21$
$= -19$
d) $2(a + b) : \big((-a) + b + 2a\big) + 3ba + 5a^2 = 2(a + b) : (2a - a + b) + 3ba + 5a^2$
$= 2(a + b) : (a + b) + 3ba + 5a^2 = 2 + 3ba + 5a^2 = 2 + 3ab + 5a^2$
e) $9 - 3 : \frac{1}{3} + 1 = 9 - 9 + 1 = 0 + 1 = 1$

Oppgave 6

h) Hint: Multipliser begge tallene med 10 før du utfører divisjonsstykket. Tenk over hvorfor det er lov å gjøre dette og hvorfor det gjør utregningen av divisjonsstykket lettere.

Oppgave 7

a) Forholdet mellom saftkonsentrat og vann er $1:9$. Det betyr at det totalt er $1 + 9 = 10$ deler i ferdigblandet saft, der 1 av delene er saftkonsentrat og 9 av delene er vann. Vi skal totalt ha $150 \text{ pers.} \cdot 0{,}2 \text{ L/pers.} = 30 \text{ L}$ ferdigblandet saft, og behøver da $\frac{1}{1+9} \cdot 30 \text{ L} = \frac{30 \text{ L}}{10} = 3 \text{ L}$ saftkonsentrat.
b) Forholdet mellom husvask og vann er $1:20$. Det betyr at det totalt er $1 + 20 = 21$ deler i ferdigblanda husvask, der 1 av delene er husvaskkonsentrat og 20 av delene er vann. Lars har 5 L vann og lurer på hvor mye husvaskkonsentrat han behøver. Vi kan sette opp følgende likning og løse den med tanke på h (som står for antall liter husvaskkonsentrat):

$$\frac{h}{5 \text{ L}} = \frac{1}{20}$$

$$\frac{h}{5 \text{ L}} \cdot 5 \text{ L} = \frac{1}{20} \cdot 5 \text{ L}$$

$$h = \frac{5\text{ L}}{20} = 0{,}25\text{ L}$$

Lars må ha $0{,}25\text{ L}$ husvaskkonsentrat i blanding med 5 L vann.

c) Lise har $6{,}3\text{ L}$ ferdigblanda husvask, noe som tilsvarer 21 deler. 1 del er dermed $\frac{6{,}3\text{ L}}{21} = 0{,}3\text{ L}$. Mengde husvaskkonsentrat i blandinga er dermed også $0{,}3\text{ L}$ siden det er én del husvaskkonsentrat og 20 deler vann i blandinga. 20 deler vann tilsvarer $20 \cdot 0{,}3\text{ L} = 6{,}0\text{ L}$ vann.
For å finne ut hvor mye vann Lise må tilsette kan en sette opp følgende likning og løse den med tanke på h (som står for antall liter husvask som må tilsettes bøtta):

$$\frac{0{,}3\text{ L} + h}{6\text{ L}} = \frac{1}{15}$$
$$\frac{0{,}3\text{ L} + h}{6\text{ L}} \cdot 6\text{ L} = \frac{1}{15} \cdot 6\text{ L}$$
$$0{,}3\text{ L} + h - 0{,}3\text{ L} = \frac{6}{15}\text{L} - 0{,}3\text{ L}$$
$$h = 0{,}4\text{ L} - 0{,}3\text{ L}$$
$$h = 0{,}1\text{ L}$$

d) Forholdet mellom tegninga og virkeligheten er $1:50$, så 1 mm på tegninga er $50\text{ mm} = 5\text{ cm}$ i virkeligheten. Om døra er plassert 6 mm feil på tegninga kan vi finne ut hvor mye dette er i virkeligheten ved å løse følgende likning med tanke på l (som står for avstanden i virkeligheten):

$$\frac{1}{50} = \frac{6\text{ mm}}{l}$$
$$\frac{1}{50} \cdot l = \frac{6\text{ mm}}{l} \cdot l$$
$$\frac{1}{50} \cdot l \cdot 50 = 6\text{ mm} \cdot 50$$
$$l = 300\text{ mm} = 30\text{ cm}$$

6 mm feil på tegninga tilsvarer 30 cm feil i virkeligheten.

Oppgave 8

a) $\frac{3}{5} = \frac{3\cdot 20}{5\cdot 20} = \frac{60}{100} = 60\% = 0{,}6$
b) $\frac{14}{25} = \frac{14\cdot 4}{25\cdot 4} = \frac{56}{100} = 56\% = 0{,}56$
c) $\frac{14}{7} = \frac{2\cdot 7}{7} = \frac{2\cdot 100}{1\cdot 100} = \frac{200}{100} = 200\% = 2$
d) $0{,}55 = 55\% = \frac{55}{100} = \frac{5\cdot 11}{5\cdot 20} = \frac{11}{20}$
e) $24\% = 0{,}24 = \frac{24}{100} = \frac{4\cdot 6}{4\cdot 25} = \frac{6}{25}$
f) $0{,}825 = 82{,}5\% = \frac{82{,}5}{100} = \frac{825}{1000} = \frac{5\cdot 165}{5\cdot 200} = \frac{165}{200} = \frac{5\cdot 33}{5\cdot 40} = \frac{33}{40}$
g) $\frac{4}{7} \approx 0{,}571 = \frac{57{,}1}{100} = 57{,}1\%$
h) $\frac{8}{11} \approx 0{,}727 = \frac{72{,}7}{100} = 72{,}7\%$

Oppgave 9

a) Overslag: "Litt mindre enn 0,5" + 0,5 = "Litt mindre enn 1"
Utregning: $\frac{3}{8}+\frac{2}{4}=\frac{3}{8}+\frac{2\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{3}{8}+\frac{4}{8}=\frac{3+4}{8}=\frac{7}{8}$ (fellesnevner er 8)

b) Overslag: "Litt mindre enn 0,25" + 0,25 = "Litt mindre enn 0,5"
Utregning: $\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 4}{5\cdot 4}+\frac{1\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{4}{20}+\frac{5}{20}=\frac{4+5}{20}=\frac{9}{20}$ (FN er 20)

c) Overslag: "Litt mindre enn 0,75" + "Litt mer enn 0,75" = "Omtrent 1,5"
Utregning: $\frac{2}{3}+\frac{6}{7}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 7}+\frac{6\cdot 3}{7\cdot 3}=\frac{14}{21}+\frac{18}{21}=\frac{32}{21}$ (FN er 21)

d) Overslag: "Nesten 3" + 0,25 = "Omtrent 3"
Utregning: $\frac{8}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8\cdot 4}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{32}{12}+\frac{3}{12}=\frac{32+3}{12}=\frac{35}{12}$ (FN er 12)

e) Overslag: "Litt mer enn 0,5" − "Litt mindre enn 0,5" = "Litt over 0"
Utregning: $\frac{7}{12}-\frac{2}{5}=\frac{7\cdot 5}{12\cdot 5}-\frac{2\cdot 12}{5\cdot 12}=\frac{35}{60}-\frac{24}{60}=\frac{35-24}{60}=\frac{11}{60}$ (FN er 60)

f) Overslag: "Litt mindre enn 2" − 1 = "Litt mindre enn 1"
Utregning: $\frac{11}{6}-\frac{13}{13}=\frac{11}{6}-1=\frac{11}{6}-\frac{6}{6}=\frac{11-6}{6}=\frac{5}{6}$ (FN er 6)

Oppgave 10

a) $\frac{6}{4}\cdot\frac{5}{3}=\frac{6\cdot 5}{4\cdot 3}=\frac{2\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 3}=\frac{5}{2}$

b) $\frac{12}{7}\cdot\frac{9}{4}=\frac{12\cdot 9}{7\cdot 4}=\frac{4\cdot 3\cdot 9}{7\cdot 4}=\frac{3\cdot 9}{7}=\frac{27}{7}$

c) $\frac{13}{8}\cdot\frac{9}{13}=\frac{13\cdot 9}{8\cdot 13}=\frac{9}{8}$

d) $\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{11}=\frac{1\cdot 5\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 11}=\frac{15}{352}$

e) $\frac{103}{100}\cdot 700=\frac{103\cdot 700}{100}=\frac{103\cdot 7\cdot 100}{100}=103\cdot 7=721$

Oppgave 11

a) $\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{1}=\frac{2\cdot 3}{3\cdot 1}=\frac{2}{1}=2$ (Det er plass til nøyaktig 2 stykk $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$)

b) $\frac{4}{3}:\frac{8}{7}=\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{8}=\frac{4\cdot 7}{3\cdot 8}=\frac{4\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 4}=\frac{7}{3\cdot 2}=\frac{7}{6}$ (Det er plass til litt mer enn 1 stykk $\frac{8}{7}$ i $\frac{4}{3}$)

c) $\frac{3}{8}:\frac{2}{7}=\frac{3}{8}\cdot\frac{7}{2}=\frac{3\cdot 7}{8\cdot 2}=\frac{21}{16}$ (Det er plass til litt mer enn 1 stykk $\frac{2}{7}$ i $\frac{3}{8}$)

d) $\frac{9}{2}:\frac{5}{11}=\frac{9}{2}\cdot\frac{11}{5}=\frac{9\cdot 11}{2\cdot 5}=\frac{99}{10}$ (Det er plass til omtrent 10 stykk $\frac{5}{11}$ i $\frac{9}{2}$)

e) $\frac{5}{13}:\frac{4}{3}=\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 3}{13\cdot 4}=\frac{15}{52}$ (Det er plass til omtrent $\frac{1}{4}$ stykk $\frac{4}{3}$ i $\frac{5}{13}$)

Oppgave 12

a) $3^2+2^3=3\cdot 3+2\cdot 2\cdot 2=9+8=17$

b) $7^4\cdot 7^{-2}=7^{4+(-2)}=7^2=49$

c) $5^3-5^2=125-25=100$

d) $3^6:3^7=3^{6-7}=3^{-1}=\frac{1}{3^1}=\frac{1}{3}$

e) $4^{2^3}=4^8=65536$

f) Alternativ 1: $(4^2)^3=16^3=4096$. Alternativ 2: $(4^2)^3=4^{2\cdot 3}=4^6=4096$

g) $3^0+4^2\cdot 10^1=1+16\cdot 10=1+160=161$

h) $\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot 131^0\cdot 3^2+(4+3)^2=\frac{1^3}{6^3}\cdot 1\cdot 9+7^2=\frac{1\cdot 9}{216}+49=\frac{1}{24}+49=\frac{1177}{24}$

Oppgave 13

a) $98113 = 98113 \cdot \frac{10000}{10000} = \frac{98113}{10000} \cdot 10^4 = 9{,}8113 \cdot 10^4$
b) $7302381 = 7302381 \cdot \frac{1000000}{1000000} = \frac{7302381}{1000000} \cdot 10^6 = 7{,}302381 \cdot 10^6$
c) $0{,}000003 = 0{,}000003 \cdot \frac{1000000}{1000000} = 0{,}000003 \cdot 1000000 \cdot 10^{-6} = 3 \cdot 10^{-6}$
d) $0{,}92813 = 0{,}92813 \cdot \frac{10}{10} = 0{,}92813 \cdot 10 \cdot 10^{-1} = 9{,}2813 \cdot 10^{-1}$
e) $7 \cdot 101 = 707 = 707 \cdot \frac{100}{100} = \frac{707}{100} \cdot 10^2 = 7{,}07 \cdot 10^2$
f) $0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}02 = 0{,}02 \cdot \frac{100}{100} = 0{,}02 \cdot 100 \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-2}$
g) $570 + 412 = 982 = 982 \cdot \frac{100}{100} = \frac{982}{100} \cdot 10^2 = 9{,}82 \cdot 10^2$
h) $3{,}2 - 3{,}19739 = 0{,}00261 = 0{,}00261 \cdot \frac{1000}{1000} = 0{,}00261 \cdot 1000 \cdot 10^{-3} = 2{,}61 \cdot 10^{-3}$

Oppgave 14

a) $y = 12x + 60$ (x er antall minutter, y er temperaturen i ovnen)
b) $y = -7x + 230$ (x er antall minutter, y er temperaturen i ovnen)
c) $y = -4x + 2$
d) $y = 3x - 4$
e) $y = 220000x$ (x er antall biler, y er totalpris for bilene)
f) Her er det to muligheter:
$y = 0{,}7x$ (x er antall mil, y er antall liter bensin brukt)
$y = 0{,}07x$ (x er antall km, y er antall liter bensin brukt)

Oppgave 15

a) $y = \frac{3000}{x}$ (x er antall personer, y er antall kroner per person)
b) x kan ikke være 0. Alle andre x-verdier er tillatte verdier.
c) Det gir ikke mening å snakke om et negativt antall personer, så x må være positiv. I tillegg gir det heller ikke mening å snakke om en halv person, en tredjedels person, og så videre, så x må også være et helt tall. x må altså være positive heltall.
d) $y = \frac{1600}{x}$ (x er antall kamper, y er prisen per kamp)
e) En må finne en x slik at prisen per kamp, altså y, blir mindre enn 155. Vi har da følgende ulikhet som må løses:

$$155 > y$$

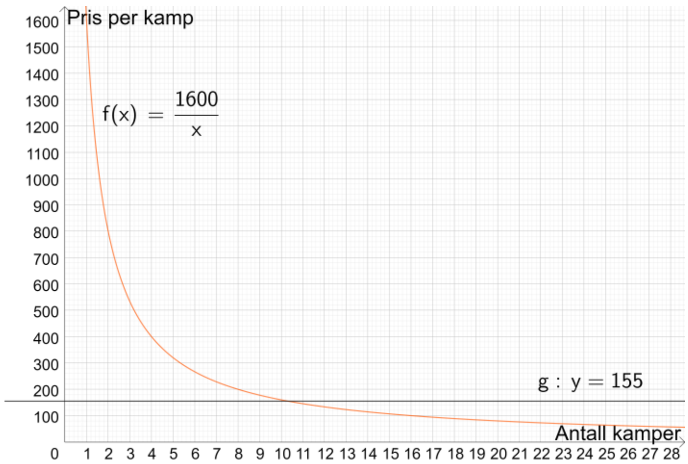
$$155 > \frac{1600}{x}$$

$$155 \cdot x > \frac{1600}{x} \cdot x$$

$$\frac{155 \cdot x}{155} > \frac{1600}{155}$$

$$x > 10{,}323$$

Ludvig må altså gå på minst 11 kamper for at det skal lønne seg å kjøpe sesongkort. Dette kan også leses av grafisk ved å se at $x = 11$ er den første heltalls-x-en som gir en y som er mindre enn 155.



f) Vi kaller funksjonen som beskriver temperaturen for $T_f(x)$, der x er klokkeslettet.
   i. Det kan ha vært fint vær siden temperaturen øker en god del utover dagen.
   ii. En kan lese av grafen at $T_f(13) = 17$.
   iii. Det er 15 grader litt etter klokka 01, og også litt før klokka 11. Dette kan leses av grafen ved å se på x-verdiene til skjæringspunktene mellom $T_f(x)$ og linja $y = 15$. Det er to skjæringspunkter, og x-verdiene til skjæringspunktene er 1,24 og 10,76.
   iv. Vi vil vite forskjellen på temperaturen klokka 16 og klokka 6, altså $T_f(16) - T_f(6) = 20{,}8 - 13{,}3 = 7{,}5$. Temperaturen har steget 7,5 grader fra klokka 6 til klokka 16.
   v. Totalt har temperaturen steget 7,5 grader på 10 timer. Gjennomsnittlig har temperaturen steget med $\frac{T_f(16)-T_f(6)}{16-6} = \frac{7{,}5}{10} = 0{,}75$ grader hver time.

g) Vi kaller funksjonen som beskriver temperaturen for $T_g(x)$, der x er klokkeslettet.
   i. Det kan ha vært dårlig vær siden temperaturen ikke øker utover dagen.
   ii. En kan lese av grafen at $T_g(13) = 14{,}5$.
   iii. Det er 15 grader klokka halv 3. Dette kan leses av grafen ved å se på x-verdiene til skjæringspunktene mellom $T_f(x)$ og linja $y = 15$. Det er kun ett skjæringspunkt, og x-verdien til skjæringspunktet er 2,5.
   iv. Vi vil vite forskjellen på temperaturen klokka 16 og klokka 6, altså $T_g(16) - T_g(6) = 14{,}5 - 14 = 0{,}5$. Temperaturen har steget 0,5 grader fra klokka 6 til klokka 16.
   v. Totalt har temperaturen steget 0,5 grader på 10 timer. Gjennomsnittlig har temperaturen steget med $\frac{T_g(16)-T_g(6)}{16-6} = \frac{0{,}5}{10} = 0{,}05$ grader hver time, altså nesten ingenting.

Heng opp denne sida en plass der du ser den ofte! Innholdet på sida er det en enorm fordel å kunne godt.
Tips: Ta for deg en av gangefølgene hver dag, for eksempel en dag med åttegangen, og neste dag med tregangen. Gjør dette til du er trygg på gangetabellen.

Tiervenner

0 + 10 = 10	3 + 7 = 10
1 + 9 = 10	4 + 6 = 10
2 + 8 = 10	5 + 5 = 10

Addisjon med tallene 1 til 9

1 + 1 = 2	2 + 2 = 4	3 + 3 = 6	4 + 4 = 8	5 + 5 = 10	6 + 6 = 12
1 + 2 = 3	2 + 3 = 5	3 + 4 = 7	4 + 5 = 9	5 + 6 = 11	6 + 7 = 13
1 + 3 = 4	2 + 4 = 6	3 + 5 = 8	4 + 6 = 10	5 + 7 = 12	6 + 8 = 14
1 + 4 = 5	2 + 5 = 7	3 + 6 = 9	4 + 7 = 11	5 + 8 = 13	6 + 9 = 15
1 + 5 = 6	2 + 6 = 8	3 + 7 = 10	4 + 8 = 12	5 + 9 = 14	
1 + 6 = 7	2 + 7 = 9	3 + 8 = 11	4 + 9 = 13		
1 + 7 = 8	2 + 8 = 10	3 + 9 = 12			7 + 7 = 14
1 + 8 = 9	2 + 9 = 11			8 + 8 = 16	7 + 8 = 15
1 + 9 = 10			9 + 9 = 18	8 + 9 = 17	7 + 9 = 16

Gangetabellen med tallene fra 1 til 10

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100