Del 1

Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = \sin(2x) + \pi$

b) $g(x) = x \cdot \cos^2 x$

Oppgave 2 (6 poeng)

Bestem integralene

a) $\int \left(\cos x + \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x$

b) $\int x \cdot e^{2x} \, \mathrm{d}x$

c) $\int \frac{2x-2}{x^2-2x-3} \, \mathrm{d}x$

Oppgave 3 (4 poeng)

Løs likningene

a) $\cos(2x) = \frac{1}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$

b) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$, $x \in [0, 2\pi]$

Oppgave 4 (6 poeng)

Et plan α er gitt ved likningen

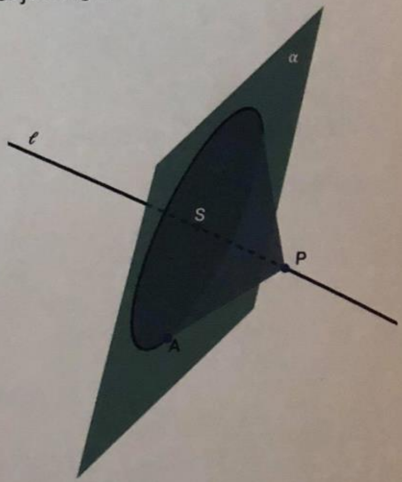
$$\alpha: \quad 2x-3y+z=13$$

a) Begrunn at punktet $A(4,-2,-1)$ ligger i planet α, og at punktet $P(1,2,3)$ ikke ligger i planet α.

En linje ℓ står vinkelrett på planet α og går gjennom punktet P.

b) Bestem en parameterframstilling for linjen ℓ, og finn skjæringspunktet S mellom linjen og planet α.

I planet α har vi en sirkel med sentrum i punktet S og radius SA. Denne sirkelen er grunnflaten i en kjegle. Toppunktet i kjeglen er P. Se figuren.



c) Regn ut volumet av kjeglen.

Oppgave 5 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=a\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}x-b\right)+2\ , \text{ der } a>0 \text{ og } b\in[0,2\pi\rangle.$$

Grafen til f har et toppunkt i $(3,5)$.

a) Bestem a og b.

b) Tegn en skisse som viser to perioder av grafen til f.

Oppgave 6 (4 poeng)

En differensiallikning er gitt ved

$$y'' - 2y' + y = 0$$

a) Vis at $y = A \cdot e^x + B \cdot x \cdot e^x$ er den generelle løsningen av differensiallikningen.

b) Bestem A og B når du får vite at $y(0) = 3$ og $y'(0) = 5$.

Oppgave 7 (5 poeng)

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$S(x) = 1 + \frac{3}{2}\cos x + \frac{9}{4}\cos^2 x + \cdots$$

a) Avgjør om rekken konvergerer for $x = \frac{\pi}{6}$, og for $x = \frac{\pi}{3}$.

b) Bestem summen av rekken i det eller de tilfellene i oppgave a) der rekken konvergerer.

c) For hvilke verdier av r har likningen $S(x) = r$ løsning?

Oppgave 8 (3 poeng)

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n): \quad \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Husk å skrive forklarende kommentarer til beviset ditt.

Del 2

Oppgave 1 (6 poeng)

En bedrift slipper årlig ut 5000 kg av en gass. De får pålegg fra myndighetene om at de i løpet av 10 år må halvere de årlige utslippene. Bedriften vurderer to modeller for hvordan de kan gjennomføre dette.

Modell 1
De reduserer forbruket med et fast antall kg hvert år, slik at de det første året slipper ut 5000 kg, mens de det tiende året slipper ut 2500 kg.

Modell 2
De reduserer forbruket med en fast årlig prosent, slik at de det første året slipper ut 5000 kg, mens de det tiende året slipper ut 2500 kg.

a) Hvor mye slipper bedriften til sammen ut i løpet av disse 10 årene dersom de velger modell 1?

b) Hvor mye slipper bedriften til sammen ut i løpet av disse 10 årene dersom de velger modell 2?

En annen bedrift slipper også årlig ut 5000 kg av denne gassen. De får beskjed av myndighetene om at de må redusere utslippet. Fra og med i år og så lenge bedriften eksisterer, får de ikke slippe ut mer enn til sammen 50 000 kg.

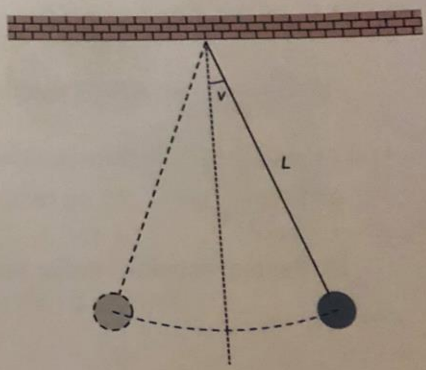
Bedriften bestemmer seg for at de hvert år fremover vil redusere utslippet med en fast prosent p.

c) Bestem den laveste verdien for p som gjør at de overholder myndighetenes krav.

Oppgave 2 (7 poeng)

En kule er festet til taket med en tynn tråd. Kulen trekkes ut til siden og slippes. Vi får da en planpendel.

I en planpendel vil vinkelutslaget v radianer være en funksjon av tiden t. Her er t antall sekunder etter at kulen slippes. Dersom vinkelutslaget er lite, kan vi bestemme $v(t)$ ved hjelp av differensiallikningen



$$v'' = -\frac{g}{L} \cdot v$$

Her er $g = 9{,}81$ tyngdeakselerasjonen (målt i m/s^2) og L lengden av pendelen (målt i meter).

Arne har en planpendel der $L = 0{,}20$ m. Han drar kulen til den ene siden slik at $v = 0{,}15$, og slipper. Kulen er i ro idet den blir sluppet.

a) Forklar at beskrivelsen gir oss følgende betingelser:

$$v(0) = 0{,}15$$
$$v'(0) = 0$$

b) Bestem et uttrykk for $v(t)$.

Tiden det tar fra kulen slippes, til den er tilbake i samme posisjon, kalles pendelens svingetid.

c) Bestem svingetiden til denne planpendelen.

En sekundpendel er en planpendel som har en svingetid på 2,0 sekunder.

d) Bestem lengden L til sekundpendelen.

Oppgave 3 (4 poeng)

Et plan α er gitt ved likningen

$$\alpha: \ 2x - 3y + 7z = 5$$

En kuleflate har sentrum i $S(8, 5, 0)$ og tangerer planet α.

a) Bestem radiusen til kuleflaten.

Et plan β går gjennom punktene $A(1, 2, -5)$, $B(5, -2, 1)$ og $C(t, 1, 4)$. En kuleflate har sentrum i $T(7, 6, -3)$ og radius $r = 2$.

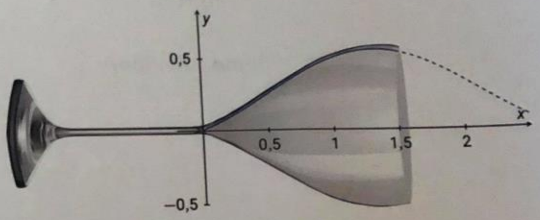
b) Bestem eksakte verdier for t slik at planet β tangerer kuleflaten.

Oppgave 4 (7 poeng)

Innsideflaten av en type stettglass framkommer når funksjonen f gitt ved

$$f(x) = -0{,}3 \cdot \sin(1{,}9x - 4{,}1) + 0{,}25 \quad , \quad x \in [0,\ 1{,}5]$$

roteres 360° grader om x-aksen. Her er x målt i dm.

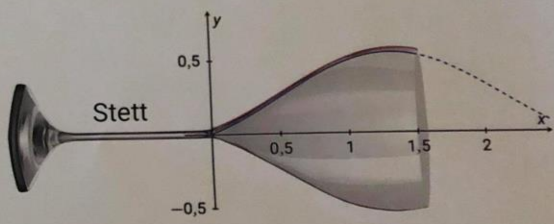


a) Hvor mye vann er det plass til i glasset om det fylles helt opp?

Stettglasset er laget av 3 mm tykt glass. Dersom funksjonen g gitt ved

$$g(x) = f(x) + 0{,}03$$

roteres 360° om x – aksen, får vi en tilnærming av ytterflaten til glasset.



b) Bestem volumet til materialet som stettglasset (uten stett) er laget av.

c) Bruk svaret i b) til å bestemme en tilnærmet verdi for overflatearealet til utsiden av stettglasset (uten stett).

I en matematikkbok finner vi denne setningen:

> Anta at en funksjon f er kontinuerlig og deriverbar i et intervall $[a, b]$, og $f(x) \geq 0$ for alle $x \in [a, b]$. Overflatearealet til omdreiingslegemet vi får når vi roterer grafen til f om x-aksen mellom $x = a$ og $x = b$, er da gitt ved formelen
>
> $$O = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

d) Bruk setningen til å bestemme overflatearealet av utsiden av stettglasset (uten stett).