Løsningsforslag eksamen R1 våren 2020

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x)=x^6+3x^5+\ln x \Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{6x^5+15x^4+\frac{1}{x}}}$

b)

$$g(x)=2x^2\cdot e^{2x-1}$$
$$g'(x)=4x\cdot e^{2x-1}+2x^2\cdot 2e^{2x-1}=4x\cdot e^{2x-1}+4x^2\cdot e^{2x-1}=\underline{\underline{4x\left(1+x\right)e^{2x-1}}}$$

c)

$$h(x)=\frac{4x-1}{x+2}$$
$$h'(x)=\frac{4\left(x+2\right)-\left(4x-1\right)\cdot 1}{\left(x+2\right)^2}=\frac{4x+8-4x+1}{\left(x+2\right)^2}=\underline{\underline{\frac{9}{\left(x+2\right)^2}}}$$

Oppgave 2

a) $\ln\left(x^2\right)+\ln x=12$

Siden likningen inneholder leddet $\ln x$, vet vi at vi må ha $x>0$, så det er ikke noe problem å bruke 1.logaritmesetning her.

$$2\ln x+\ln x=12$$
$$3\ln x=12$$
$$\ln x=4$$
$$\underline{\underline{x=e^4}}$$

b)

$$e^{2x}-e^x=6$$
$$e^{2x}-e^x-6=0$$
$$u=e^x$$
$$\textit{gir}$$
$$u^2-u-6=0$$

Her kan man bruke abc-formelen

$$\left(u-3\right)\left(u+2\right)=0$$
$$\textit{så}$$
$$u=3\vee u=-2$$

Siden $e^x > 0$ for alle *x*, må vi velge den positive løsningen.

$e^x = 3$

$\underline{\underline{x = \ln 3}}$

Oppgave 3

a) Prøver å "lage" $\vec{b}$ ved å multiplisere $\vec{a}$ med et tall.
Ser da hva jeg må multiplisere $3\vec{v}$ med for å få $5\vec{v}$.

$\frac{5}{3} \cdot \vec{a} = \frac{10}{3}\vec{u} + 5\vec{v}$.

Ser da at $\frac{5}{3} \cdot \vec{a} = \vec{b}$ når vi setter $t = \frac{10}{3}$.

$\underline{\underline{\vec{a} \parallel \vec{b} \text{ når } t = \frac{10}{3}}}$

b)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\left(2\vec{u} + 3\vec{v}\right) \cdot \left(t \cdot \vec{u} + 5\vec{v}\right) = 0$$

$$2t \cdot \vec{u}^2 + 10 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + 3t \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + 15 \cdot \vec{v}^2 = 0$$

$\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2 = 3^2 = 9$ og $\vec{v}^2 = |\vec{v}|^2 = 2^2 = 4$

Vi har også fått oppgitt at $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$.

$$2t \cdot 9 + 10\left(-2\right) + 3t\left(-2\right) + 15 \cdot 4 = 0$$

$$18t - 20 - 6t + 60 = 0$$

$$12t = 20 - 60$$

$$t = -\frac{40}{12}$$

$$t = -\frac{10}{3}$$

$\underline{\underline{\vec{a} \perp \vec{b} \text{ når } t = -\frac{10}{3}}}$

Oppgave 4

$P(x) = 6x^3 - 5x^2 - 2x + 1$

a) Dersom $P(1) = 0$, vet vi at $\left(x - 1\right)$ er faktor i $P(x)$.

$P(1) = 6 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 6 - 5 - 2 + 1 = 0$, så divisjonen går opp.

b)

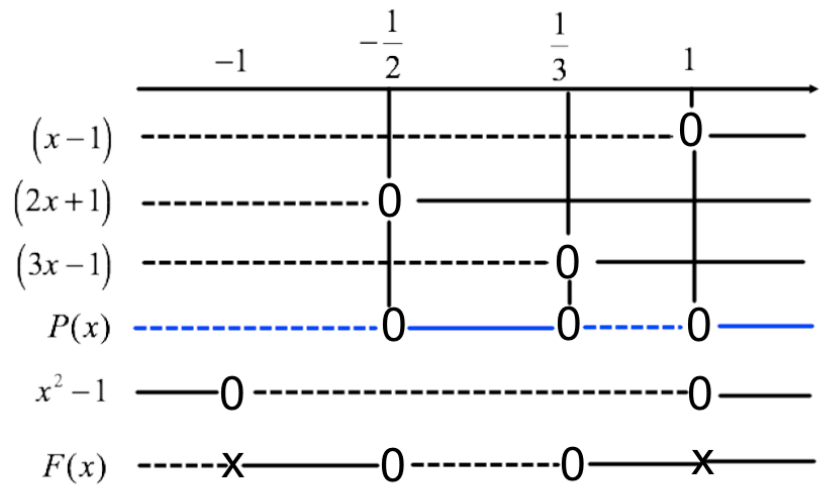
$$6x^3-5x^2-2x+1:(x-1)=6x^2+x-1$$
$$\underline{6x^3-6x^2}$$
$$x^2-2x+1$$
$$\underline{x^2-x}$$
$$-x+1$$
$$\underline{-x+1}$$
$$0$$

Faktoriserer så $6x^2+x-1$

$$6x^2+x-1=0$$
gir
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{12}=\frac{-1\pm 5}{12}$$
så
$$x_1=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}\text{ og }x_2=\frac{-6}{12}=-\frac{1}{2}$$
slik at
$$P(x)=6(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=(x-1)\cdot 2\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 3\left(x-\frac{1}{3}\right)=(x-1)(2x+1)(3x-1)$$

<u>Som skulle vises</u>

c) Det kan være verdt å merke seg med én gang at $F(x)$ ikke er definert for $x=\pm 1$
Vi tegner fortegnslinjer.



$$F(x)\geq 0\text{ når }x\in\left\langle -1,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{3},1\right\rangle\cup\langle 1,\rightarrow\rangle$$

d)

$$\lim_{x\to 1} F(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(2x+1)(3x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(2x+1)(3x-1)}{x+1} = \frac{3\cdot 2}{2} = 3$$

$$\lim_{x\to -1} F(x) = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(2x+1)(3x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(2x+1)(3x-1)}{x+1}$$

Her vil vi få null i nevner om vi setter inn $x=-1$.

$$\underline{\underline{\lim_{x\to 1} F(x) = 3 \text{ , men } \lim_{x\to -1} F(x) \text{ eksisterer ikke}}}$$

Oppgave 5

a)

$$\binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 8\cdot 7 = 56$$

<u>Per kan legge 56 ulike kombinasjoner av bøker i sekken sin</u>

b) Her har vi en hypergeometrisk sannsynlighetsmodell. Per har 8 bøker totalt, og 3 av dem vil være riktige akkurat denne dagen. Hva er sannsynligheten for at Per har tatt med seg 3 riktige og én feil?

$$P(\text{Riktig bok til alle fagene denne dagen}) = \frac{\binom{3}{3}\binom{5}{1}}{\binom{8}{4}} = \frac{1\cdot 5}{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{5}{2\cdot 7\cdot 5} = \underline{\underline{\frac{1}{14}}}$$

c) Minst to av fagene betyr her 2 av fagene eller alle 3 fagene denne dagen.

$$P(\text{Riktig bok til 2 av fagene denne dagen}) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{\frac{3\cdot 2}{2\cdot 1}\cdot\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}}{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{3\cdot 10}{2\cdot 7\cdot 5} = \frac{3}{7}$$

Har allerede regnet ut sannsynligheten for riktig antall bøker i alle tre fag, så

$$P(\text{Riktig bok til minst 2 av fagene denne dagen}) = \frac{3}{7} + \frac{1}{14} = \frac{6}{14} + \frac{1}{14} = \frac{7}{14} = \underline{\underline{\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%}}$$

Oppgave 6

a) I trapeset er lengdene til de parallelle sidene henholdsvis $3-(-3)=6$ og $x-(-x)=2x$. Høyden er $f(x)$.
Vi kan nå regne ut arealet av trapeset, som i dette tilfellet er gitt ved $F(x)$ for $0<x<3$.

$$F(x)=\frac{6+2x}{2}\cdot f(x)=(3+x)(9-x^2)=27-3x^2+9x-x^3=-x^3-3x^2+9x+27$$

<u>Som skulle vises</u>

b)

$$F'(x)=-3x^2-6x+9$$
$$så$$
$$F'(x)=0$$
$$gir$$
$$-3x^2-6x+9=0$$
$$-3(x^2+2x-3)=0$$
$$-3(x-1)(x+3)=0$$

Siden vi har $0<x<3$, må vi her velge løsningen $x=1$.

Funksjonsuttrykket til $F'(x)$, forteller at grafen til $F'(x)$ er en parabel som vender den hule siden ned. Den vil derfor gå fra negativ til positiv i nullpunktet $x=-3$ og fra positiv til negativ i nullpunktet $x=1$.
Det betyr at $(1,F(1))$ er toppunkt på grafen til F, og at $x=1$ vil gi det største arealet trapeset kan ha.
Her kunne jeg alternativt tegnet fortegnslinjer eller brukt andrederiverttesten for å konstatere at x=1 gir toppunkt.

$$F(1)=-1^3-3\cdot1^2+9\cdot1+27=-1-3+9+27=32$$

<u>Det største arealet trapeset kan ha er 32</u>

Oppgave 7

$\angle BCA$ er en periferivinkel som spenner over samme bue som periferivinkelen $\angle BDA$, så $u=\angle BDA=65°$.

$\angle BSA$ er en sentralvinkel som spenner over samme bue som periferivinkelen $\angle BDA$, så $w=2\cdot\angle BDA=2\cdot u=2\cdot 65°=130°$

$$v=180°-\angle BEC=180°-(180°-35°-65°)=180°-80°=100°$$

$$\underline{\underline{u=65°\wedge v=100°\wedge w=130°}}$$

Oppgave 8

a) Linja ℓ gitt ved likningen $y = 2x + 1$ kan ha følgende parameterfemstilling

$$\ell : \begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \end{cases}$$

D ligger på ℓ, så kan si at vi har $D(t, 2t+1)$, slik at

$\overrightarrow{AD} = [t-(-1), 2t+1-1] = [t+1, 2t]$, <u>som skulle vises</u>

b) Alle sidene i firkanten er like lange, så $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CD}|$, noe jeg bruker videre.

$\overrightarrow{CD} = [t-7, 2t+1-5] = [t-7, 2t-4]$

Da har vi:

$$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CD}|$$

$$|\overrightarrow{AD}|^2 = |\overrightarrow{CD}|^2$$

$$(t+1)^2 + (2t)^2 = (t-7)^2 + (2t-4)^2$$

$$t^2 + 2t + 1 + 4t^2 = t^2 - 14t + 49 + 4t^2 - 16t + 16$$

$$5t^2 + 2t + 1 = 5t^2 - 30t + 65$$

$$2t + 30t = 65 - 1$$

$$32t = 64$$

$$t = 2$$

Setter vi inn $t = 2$ for punktet *D*, får vi $D(2, 5)$.

Posisjonsvektoren til punktet *B* er gitt ved

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{CD} = [2-7, 5-5] = [-5, 0]$

så

$\overrightarrow{OB} = [-1, 1] - [-5, 0] = [-1-(-5), 1-0] = [4, 1]$

<u>Koordinatene til punktet *B* er (4,1) og koordinatene til punktet *D* er (2,5)</u>

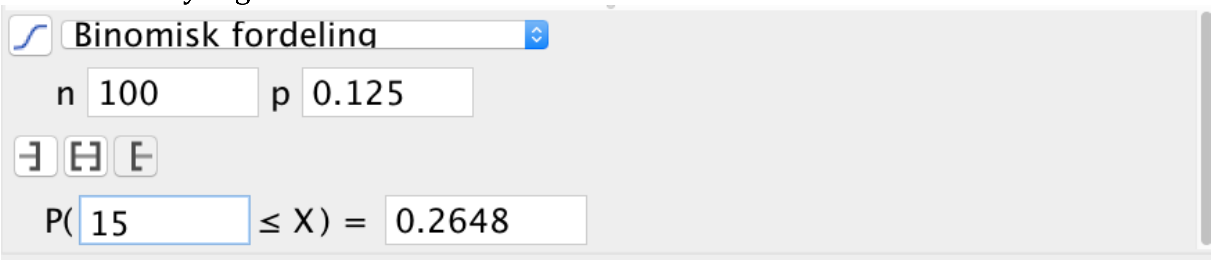
Del 2

Oppgave 1

a) I et binomisk forsøk er alle delforsøkene uavhengige av hverandre. Det betyr at man må ta utgangspunkt i at dersom en EL-bil passerer, vil ikke dette ha noe betydning for om den neste som passerer også er en EL-bil.

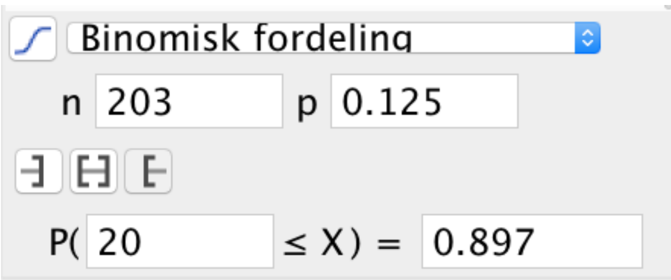
Man må også ta utgangspunkt i at det er en gitt sannsynlighet for at en tilfeldig bil som passerer er EL-bil. Maria må altså ta utgangspunkt i at det er 12,5 % sannsynlighet for at en tilfeldig bil som passerer henne er EL-bil, med bakgrunn i teksten hun leste på forhånd.

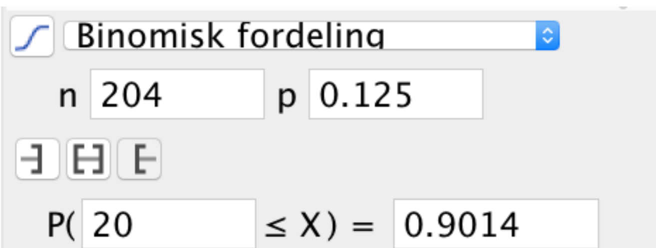
b) Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.



<u>Det er omtrent 26,5 % sannsynlig at minst 15 av første 100 bilene er EL-bil</u>

c) Lar $X \geq 20$ og justerer n til jeg ser at $P(20 \leq X)$ passerer 0,9.
(p forblir 0,125)





Vi ser at sannsynligheten passerer 90 % når antallet biler går fra 203 til 204.

<u>Maria må føre statistikk over *minst* 204 biler for at det skal være mer enn 90 % sannsynlig at minst 20 av dem er EL-biler.</u>

Oppgave 2

a) Starter med å bestemme stigningstallet til linja gjennom punktene $\left(-1, p(-1)\right)$ og $\left(3, p(3)\right)$.

$$\frac{p(3)-p(-1)}{3-(-1)} = \frac{3^2+3\cdot 3-1-\left((-1)^2+3(-1)-1\right)}{4} = \frac{9+9-1-(1-3-1)}{4} = \frac{17-(-3)}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

Stigningstallet til tangenten i punktet $\left(1,3\right)$ er gitt ved $p'(1)$.

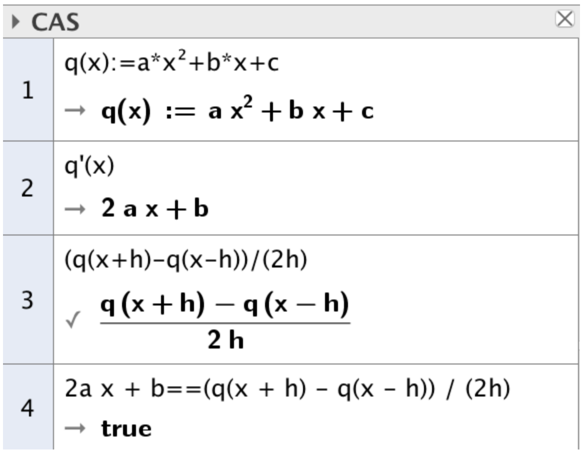
$$p'(x) = 2x+3$$

så

$$p'(1) = 2\cdot 1+3 = 5$$

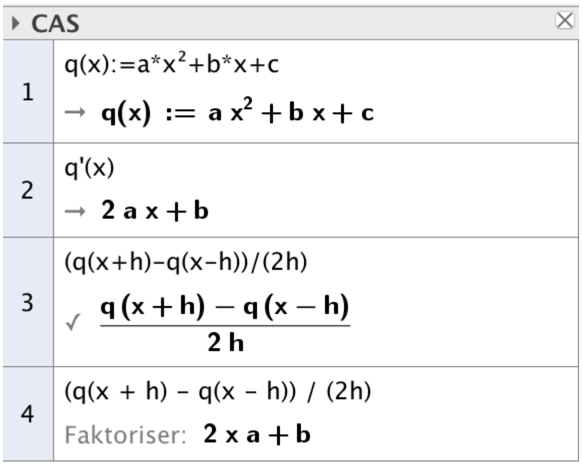
Siden linja gjennom $\left(-1, p(-1)\right)$ og $\left(3, p(3)\right)$ har samme stigningstall som tangenten i punktet $\left(1,3\right)$, er linja og tangenten parallelle. <u>Som skulle vises</u>

b)



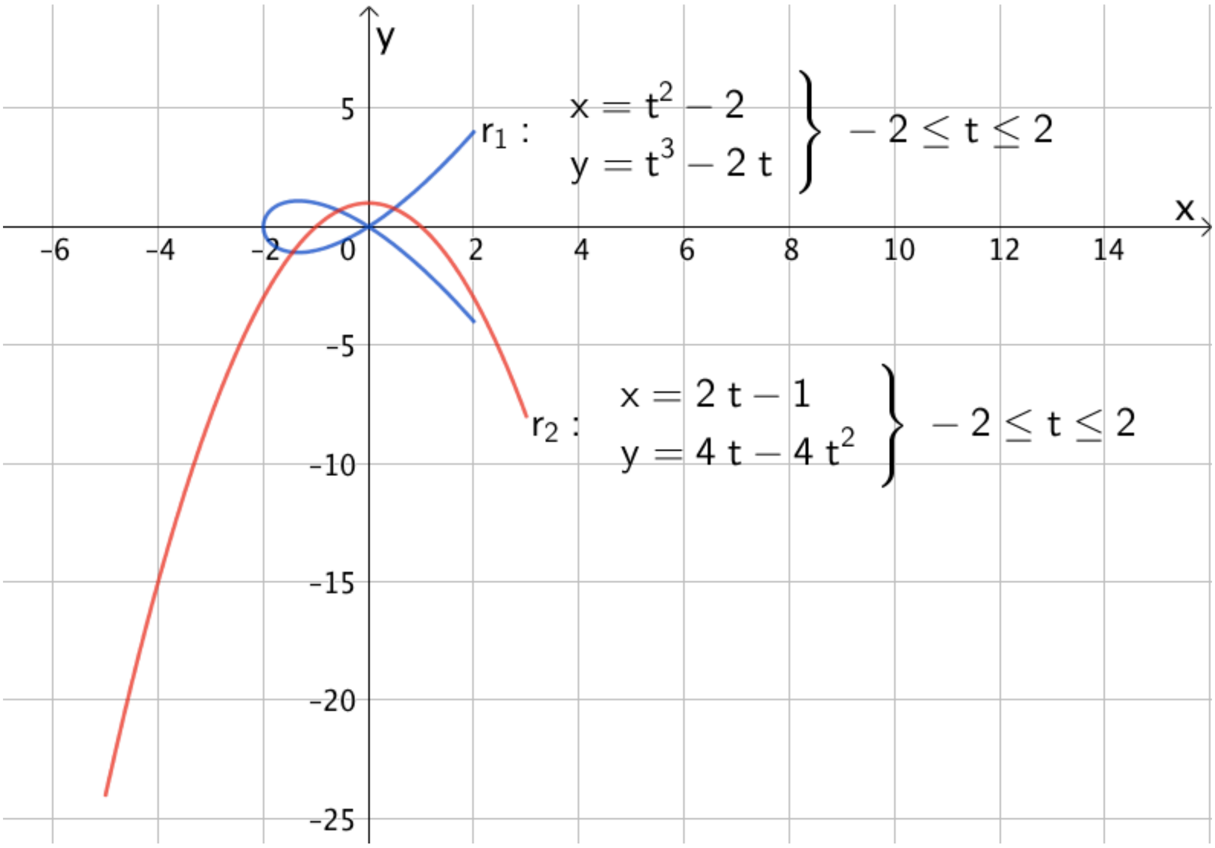
, <u>Som skulle vises</u>

Eventuelt

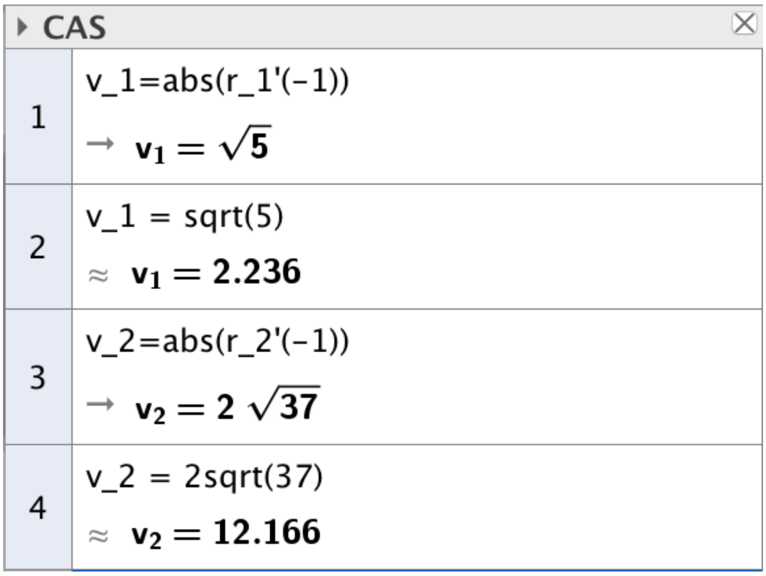


Oppgave 3

a) Bruker kommandoen
" Kurve(<Uttrykk>, <Uttrykk>, <Parametervariabel>, <Start>, <Slutt>)"
i GeoGebra og tegner grafene til $\vec{r}_1(t)$ og $\vec{r}_2(t)$.



b)



<u>Banefarten til partiklene er henholdsvis ca.2,2 m/s og ca. 12,2 m/s når *t* =-1</u>

c) Definerer fartsvektorene til de to partiklene. Når forholdet mellom *y*- og *x*-koordinatene er likt for begge fartsvektorene, har partiklene samme fartsretning.

CAS

1	v_1(t):=Vektor(r_1'(t)) $\rightarrow \; v_1(t) := \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 2 \end{pmatrix}$
2	v_2(t):=Vektor(r_2'(t)) $\rightarrow \; v_2(t) := \begin{pmatrix} 2 \\ -8t + 4 \end{pmatrix}$
3	(-8t+4)/2=(3t²-2)/(2t) $\rightarrow \; -4t + 2 = \frac{3t^2 - 2}{2t}$
4	-4 t + 2 = (3t² - 2) / (2t) Løs: $\left\{ t = \frac{-\sqrt{26} + 2}{11}, t = \frac{\sqrt{26} + 2}{11} \right\}$
5	{t = (-sqrt(26) + 2) / 11, t = (sqrt(26) + 2) / 11} $\approx \; \{t = -0.28, t = 0.65\}$

<u>De to partiklene har samme fartsretning ved tidspunktene *t* = -0,28 og *t* = 0,65</u>

d) Definerer avstanden mellom partiklene og finner ut når denne er minst.

CAS

1	d(t):=abs(r_2(t)-r_1(t)) $\rightarrow \; d(t) := \sqrt{(-t^2 + 2t + 1)^2 + (-t^3 - 4t^2 + 6t)^2}$
2	d'(t)=0 Løs: $\{t = -4.53, t = -3.93, t = -0.05, t = 0.67, t = 1.17\}$
3	Tre av løsningene over er innenfor det aktuelle tidsrommet
4	d(-0.05) $\approx \; 0.95$
5	d(0.67) $\approx \; 2.7$
6	d(1.17) $\approx \; 1.97$

<u>Den minste avstanden mellom partiklene, innenfor de 4 sekundene, er 0,95 cm.</u>

Oppgave 4

a) ΔADC er rettvinklet og deler en vinkel med ΔABC, så ΔADC og ΔABC er formlike.

ΔBDC er rettvinklet og deler en vinkel med ΔBDC, så ΔADC og ΔABC er formlike.

Speilingene som er beskrevet i oppgaveteksten forteller oss at
- ΔAEB er kongruent med ΔABC
- ΔCBF er kongruent med ΔBDC, som igjen er formlik med ΔABC
- ΔACG er kongruent med ΔADC, som igjen er formlik med ΔABC

Siden alle trekantene *AEB, CBF* og *ACG* er formlike med ΔABC, må de også være formlike med hverandre. Som skulle grunngis.

b) Her er *k* forholdet mellom høyden og grunnlinja i trekantene. Siden de tre trekantene *AEB, CBF* og *ACG* er formlike, skal dette forholdet være likt for alle disse.

Vi kan da si at $k = \frac{h_1}{c} = \frac{h_2}{a} = \frac{h_3}{b}$.

Dette gir $h_2 = k \cdot a$ og $h_3 = k \cdot b$, som skulle grunngis.

c) Ut fra figuren og opplysningene vi har fått oppgitt, har vi at

$$A_{\Delta CBF} + A_{\Delta ACG} = A_{\Delta AEB}$$

$$\frac{a \cdot h_2}{2} + \frac{b \cdot h_3}{2} = \frac{c \cdot h_1}{2}$$

$$a \cdot k \cdot a + b \cdot k \cdot b = c \cdot k \cdot c$$

$$k \cdot a^2 + k \cdot b^2 = k \cdot c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Vi har dermed bevist Pythagoras´ setning