Løsningsforslag eksamen S2 høsten 2020

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x)=2e^x+3\ln x \Rightarrow f'(x)=2e^x+3\cdot\frac{1}{x}=\underline{\underline{2e^x+\frac{3}{x}}}$

b)

$$g(x)=x\cdot(2x+5)^4$$

gir

$$\begin{aligned}
g'(x)&=1\cdot(2x+5)^4+x\cdot 4(2x+5)^3\cdot 2\\
&=(2x+5)^4+8x(2x+5)^3\\
&=(2x+5)^3\big((2x+5)+8x\big)\\
&=(2x+5)^3(10x+5)\\
&=\underline{\underline{5(2x+5)^3(2x+1)}}
\end{aligned}$$

Her kan man sikkert "gi seg" og sette to streker under svaret uten å jobbe seg helt frem til det faktoriserte uttrykket. Man vil uansett ha derivert funksjonen, slik oppgaven etterspør.

c)

$$h(x)=\frac{x^2-1}{e^{2x}}$$

gir

$$\begin{aligned}
h'(x)&=\frac{2x\cdot e^{2x}-(x^2-1)\cdot 2e^{2x}}{\left(e^{2x}\right)^2}\\
&=\frac{2\left(x-(x^2-1)\right)}{e^{2x}}\\
&=\frac{2(-x^2+x+1)}{e^{2x}}\\
&=\underline{\underline{\frac{-2(x^2-x-1)}{e^{2x}}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 2

Har $a_1 = -7$ og $d = -3-(-7) = -3+7 = 4$.

Bruker formelen $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ til å finne ut hvor mange ledd det er i rekka.

$$
\begin{aligned}
-7+(n-1)\cdot 4 &= 389 \\
4n-4 &= 389+7 \\
4n &= 396+4 \\
n &= \frac{400}{4} \\
n &= 100
\end{aligned}
$$

Bruker så formelen $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ til å bestemme summen av rekka.

$$S_{100} = \frac{-7+389}{2}\cdot 100 = \frac{382}{2}\cdot 100 = 191\cdot 100 = 19100$$

så

$$-7-3+1+5+\ldots+389 = \underline{\underline{19100}}$$

Oppgave 3

a) $k = \frac{1}{1{,}04}$, så da har vi $-1 < k < 1$, og rekka konvergerer.

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{\frac{3}{1{,}04}}{1-\frac{1}{1{,}04}} = \frac{3}{1{,}04-1} = \frac{3}{0{,}04} = \frac{300}{4} = \underline{\underline{75}}$$

b) Engangsbeløpet vil være summen av nåverdiene til de 20 innbetalingene. Innbetalingene danner ei geometrisk rekke der

$k = \frac{1}{1{,}02}$, $a_1 = \frac{10000}{1{,}02}$ og rekka har 20 ledd.

Da har vi følgende rekke:

$$\underline{\underline{\frac{10000}{1{,}02}+\frac{10000}{1{,}02^2}+\frac{10000}{1{,}02^3}+\ldots+\frac{10000}{1{,}02^{20}}}}$$

Oppgave 4

$P(x) = x^3 - 12x - 16$

a) $P(-2) = (-2)^3 - 12(-2) - 16 = -8 + 24 - 16 = 0$

og

$P(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 - 16 = 8 - 24 - 16 = -32$

Vi ser at $x = -2$, som er nullpunktet til $(x+2)$ også er nullpunkt for P.

Da er $(x+2)$ faktor i *P* og divisjonen vil gå opp. <u>Som skulle begrunnes</u>.

Vi ser at $x = 2$, som er nullpunktet til $(x-2)$ *ikke* er nullpunkt for P.

Da er *ikke* $(x-2)$ faktor i *P* og divisjonen vil *ikke* gå opp. <u>Som skulle begrunnes</u>.

b)

$$\left(x^3 + 0 \cdot x^2 - 12x - 16\right) : (x+2) = x^2 - 2x - 8$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^3 + 2x^2} \\ \quad -2x^2 - 12x - 16 \\ \quad \underline{-2x^2 - 4x} \\ \qquad\quad -8x - 16 \\ \qquad\quad \underline{-8x - 16} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Så $P(x) = (x+2)\left(x^2 - 2x - 8\right) = (x+2)(x-4)(x+2) = (x-4)(x+2)^2$

Da har vi

$$\frac{x^3 - 12x - 16}{4x - 16} = \frac{(x-4)(x+2)^2}{4(x-4)} = \frac{(x+2)^2}{4} = \frac{x^2 + 4x + 4}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}x^2 + x + 1}}$$

Oppgave 5

$f(x) = x^3 - 12x - 16$

a)

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3\left(x^2 - 4\right) = 3(x+2)(x-2)$$

så

$$f'(x) = 0$$

gir

$$x = -2 \vee x = 2$$

Bruker andrederiverttesten for å avgjøre hvilket av de stasjonære punktene som er toppunkt og hvilket som er bunnpunkt.

$f''(x) = 6x$

så

$f''(-2) = -12$ og $f''(2) = 12$

$f''(-2) < 0$, så $(-2, f(-2))$ er toppunkt.

$f''(2) > 0$, så $(2, f(2))$ er bunnpunkt.

Har fra oppgave 4 at $f(-2) = 0$ og $f(2) = -32$.

$\underline{\underline{(-2,0) \text{ er toppunkt på grafen til } f \text{ og } (2,-32) \text{ er bunnpunkt på grafen til } f}}$

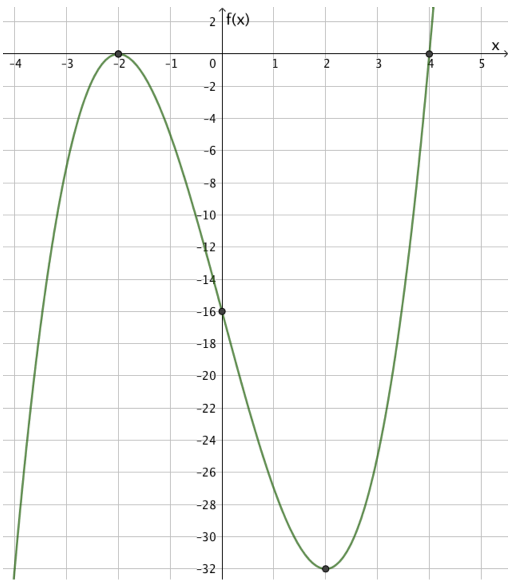
b) Vendepunktet ligger midt mellom topp- og bunnpunktet på grafen til *f*, så <u>koordinatene til vendepunktet er (0,-16)</u>.

Stigningstallet til tangenten er $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 = -12$, og siden vendepunktet er $(0,-16)$, vet vi at -16 er konstantleddet.

Da har vi følgende likning for vendetangenten til grafen til *f*:

$\underline{\underline{y = -12x - 16}}$

c) Har fra oppgave 4 at grafen til *f* har dobbelt nullpunkt $x = -2$ og nullpunkt $x = 4$.
Markerer disse sammen med toppunktet, bunnpunktet og vendepunktet, og tegner en skisse av grafen til *f*.



Oppgave 6

$$K(x) = x^2 + 8x + 100$$

a) Kaller enhetskostnaden for *G*.
Da har vi følgende uttrykk for enhetskostnaden:

$$G(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{x^2 + 8x + 100}{x} = \underline{\underline{x + 8 + \frac{100}{x}}}$$

Grensekostnaden er gitt ved $\underline{\underline{K'(x) = 2x + 8}}$

b)
Vi kan bestemme den laveste enhetskostnaden ved å se på stigningstallet til en tangent som går gjennom origo og tangerer grafen til *K* i et punkt $\left(x, K(x)\right)$.
x-koordinaten til dette tangeringspunktet vil da tilsvare den kostnadsoptimale produksjonsmengden, altså den produksjonsmengden som gir lavest enhetskostnad.

En tangent som går gjennom origo og tangerer grafen til *K*, vil ha stigningstall $\frac{K(x)}{x}$, som er det samme som $G(x)$.
Samtidig vet vi også at alle tangenter til grafen til *K* har stigningstall $K'(x)$.
Vi kan altså finne den kostnadsoptimale produksjonsmengden ved å løse likningen $K'(x) = G(x)$.

$$K'(x) = G(x)$$

$$2x + 8 = x + 8 + \frac{100}{x}$$

$$x = \frac{100}{x}$$

$$x^2 = 100$$

Er kun interessert i den positive løsningen

$$x = \sqrt{100} = 10$$

$$G(10) = 10 + 8 + \frac{100}{10} = 18 + 10 = 28$$

<u>Den minste enhetskostnaden er 28 kr per enhet.</u>
<u>Da er produksjonsmengden 10 enheter</u>

Her kunne vi selvfølgelig også ha satt den deriverte av G lik null og brukt løsningen til å bestemme bunnpunktet på grafen til G.

Oppgave 7

a)

$$E(X) = 6\cdot 0{,}1 + 7\cdot 0{,}1 + 8\cdot 0{,}6 + 9\cdot 0{,}1 + 10\cdot 0{,}1$$
$$= 0{,}6 + 0{,}7 + 4{,}8 + 0{,}9 + 1$$
$$= \underline{\underline{8}}$$

$$SD(S) = \sqrt{Var(S)} = \sqrt{n\cdot Var(X)} = \sqrt{7\cdot 1}$$

$$SD(X) = \sqrt{Var(X)}$$
$$= \sqrt{(6-8)^2\cdot 0{,}1 + (7-8)^2\cdot 0{,}1 + (8-8)^2\cdot 0{,}6 + (9-8)^2\cdot 0{,}1 + (10-8)^2\cdot 0{,}1}$$
$$= \sqrt{(-2)^2\cdot 0{,}1 + (-1)^2\cdot 0{,}1 + 0^2\cdot 0{,}6 + 1^2\cdot 0{,}1 + 2^2\cdot 0{,}1}$$
$$= \sqrt{0{,}4 + 0{,}1 + 0 + 0{,}1 + 0{,}4}$$
$$= \sqrt{1}$$
$$= 1$$

<u>Som skulle vises</u>

$E(x) = 8$ forteller oss at vi kan forvente at det er 8 tomatfrø i en tilfeldig valgt pose fra gartneriet.

b) *S* er summen av *X* antall tomatfrø i 49 frøposer. Når vi gjennomfører et stort antall forsøk, sier sentralgrensesetningen av *S* er tilnærmet normalfordelt.

$$E(S) = n\cdot E(X) = 49\cdot 8 = 392$$

og

$$SD(S) = \sqrt{Var(S)} = \sqrt{n\cdot Var(X)} = \sqrt{49\cdot 1} = 7$$

<u>Som skulle vises</u>.

c)

$$P(S > 400) = 1 - P\left(z \le \frac{400-392}{7}\right) = 1 - P(z \le 1{,}14) = 1 - 0{,}8729 = 0{,}1271$$

<u>Sannsynligheten for at Eline får nok frø til alle pottene sine er omtrent 12,7 %</u>

Oppgave 8

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 2x\right)$$

a) Her må vi ha:

$$x^2 - 2x > 0$$
$$x(x-2) > 0$$

Grafen til $x^2 - 2x$ er en parabel som vender hul side opp ("smilemunn"), og nullpunktene er $x = 0$ og $x = 2$.

Da vet jeg at $x^2 - 2x > 0$ når $x \in \langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 2, \rightarrow\rangle$.

$$D_f = \underline{\underline{\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 2, \rightarrow\rangle}}$$

b)

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 2x} \cdot \left(2x - 2\right) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x}$$

$$og$$

$$f'(x) = 0$$

$$gir$$

$$2x - 2 = 0$$

$$x = 1, \text{ som er utenfor definisjonsområdet}$$

$$f''(x) = \frac{2\left(x^2 - 2x\right) - \left(2x - 2\right) \cdot \left(2x - 2\right)}{\left(x^2 - 2x\right)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - \left(2x - 2\right)^2}{\left(x^2 - 2x\right)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - \left(4x^2 - 8x + 4\right)}{\left(x^2 - 2x\right)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 + 4x - 4}{\left(x^2 - 2x\right)^2}$$

$$= \frac{-2\left(x^2 - 2x + 2\right)}{\left(x^2 - 2x\right)^2}$$

$$og$$

$$f''(x) = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$gir$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

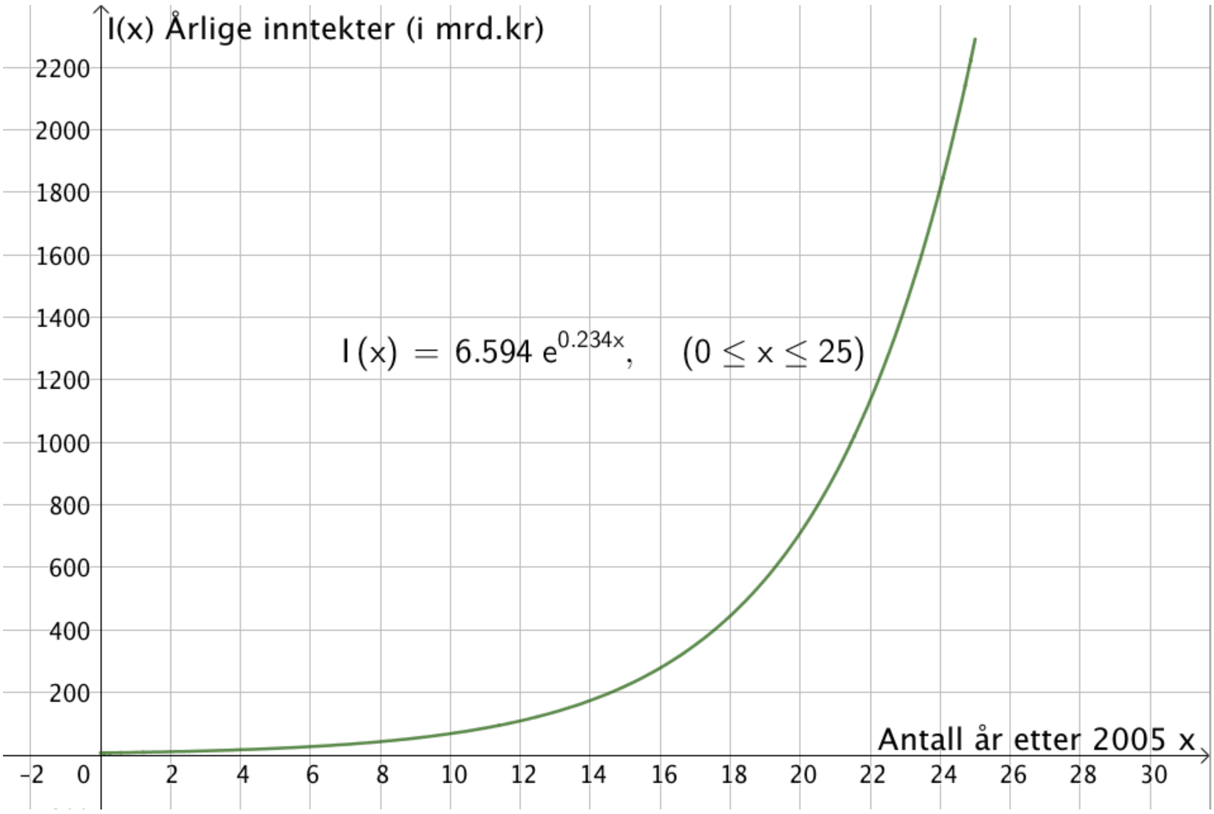
Siden likningen $f''(x) = 0$ ikke har reelle løsninger, har heller ikke $f''(x)$ noen nullpunkter.

Verken den deriverte eller den andrederiverte av *f* har nullpunkter innenfor definisjonsområdet til *f*, så da kan heller ikke *f* ha ekstremalpunkter eller vendepunkter.
Som skulle vises

Del 2

Oppgave 1

a)



b)

CAS

1. I(x):=6.594* e ^(0.234x)

$\approx \; I(x) := 6.594\, e^{0.234x}$

2. I'(x)=160

Løs: $\left\{ x = \frac{500}{117} \ln\left(\frac{40000000}{385749}\right) \right\}$

3. {x = 500 / 117 ln(40000000 / 385749)}

$\approx \; \{x = 19.835\}$

<u>Inntektene vil for første gang øke med mer enn 160 mrd. kroner pr. år i 2025</u>

c)

CAS	
1	I(x):=6.594* e ^(0.234x) $\approx$ $I(x) := 6.594\, e^{0.234x}$
2	Integral(I, 0, 15) $\rightarrow \dfrac{1099\, e^{\frac{351}{100}} - 1099}{39}$
3	(1099e^(351 / 100) - 1099) / 39 $\approx$ 914.376

$$\int_0^{15} I(x)\,dx = \underline{\underline{914{,}376}}$$

Det betyr at Netflix hadde en samlet inntekt på 914,376 milliarder kroner i perioden 2005-2020.

Oppgave 2

a)

CAS	
1	q(p):=1400* e ^(-0.024p) $\rightarrow$ $q(p) := 1400\, e^{-\frac{3}{125}p}$
2	q=500 Løs: $\left\{p = -\dfrac{125}{3} \ln\left(\dfrac{5}{14}\right)\right\}$
3	{p = (-125) / 3 ln(5 / 14)} $\approx$ $\{p = 42.901\}$

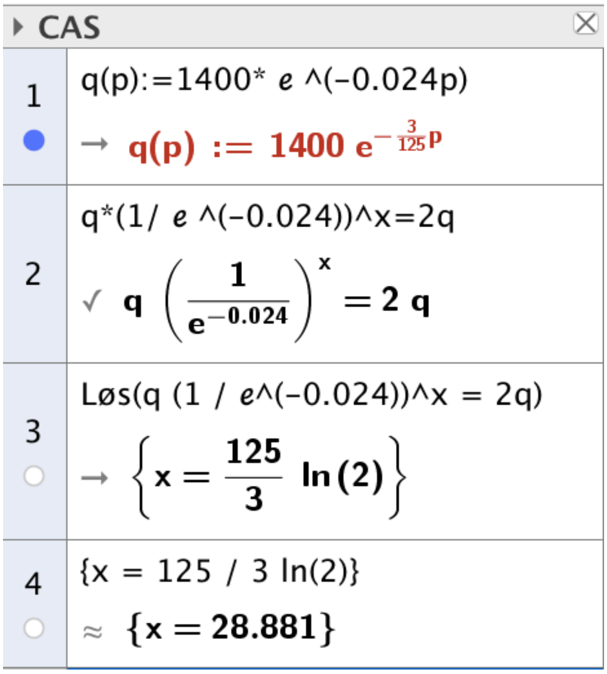
<u>Prisen er 42,90 kr per enhet når etterspørselen er 500 enheter per uke</u>

b) $q(p) = 1400 \cdot e^{-0{,}024p} = 1400 \cdot \left(e^{-0{,}024}\right)^p \approx 1400 \cdot 0{,}976^p$

0,976 er vekstfaktor ved nedgang på 2,4 %, så etterspørselen vil minke med 2,4 % hver gang prisen øker med én enhet, uavhengig av hva prisen per enhet er i utgangspunktet.

<u>Påstanden til Maria stemmer med modellen q.</u>

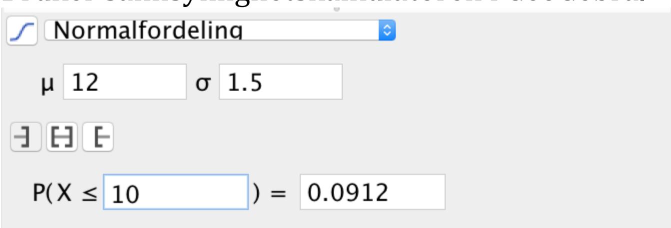
c) For å finne etterspørselen etter en prisreduksjon på én krone, kan vi multiplisere $q(p)$ med faktoren $\dfrac{1}{e^{-0{,}024}}$. Regner ut hvor mange ganger dette må skje, før $q(p)$ er doblet.



<u>Prisen må reduseres med 28,88 kr per enhet for at etterspørselen skal dobles</u>

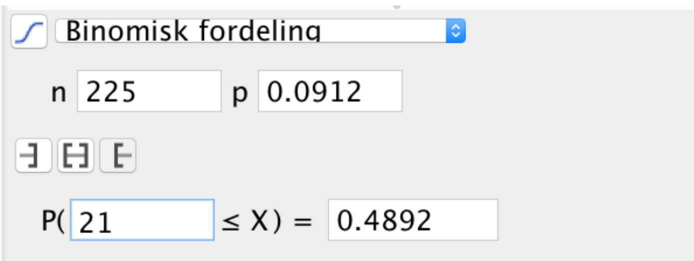
Oppgave 3

a) Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.



<u>Som skulle vises</u>

b)



$$P(Y \geq 21) = \underline{\underline{0{,}4892}}$$

c) Hypotesetesten tar utgangspunkt i at produsenten sier at levetiden til en tilfeldig temperaturføler av den bestemte typen er normalfordelt.

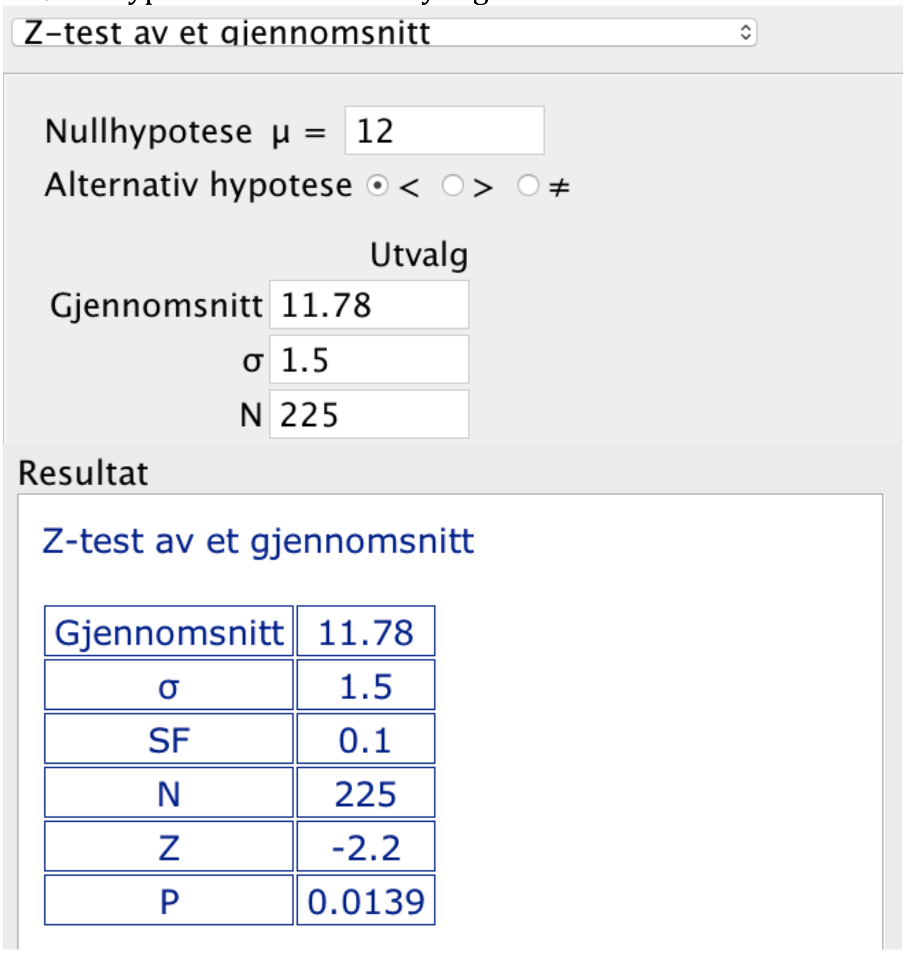
Nullhypotese

$$H_0 : \mu = 12 \text{ år}$$

Alternativ hypotese

$$H_A : \mu < 12 \text{ år}$$

d) Utfører hypotesetesten i sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.



Vi får en *P*-verdi som er lavere enn signifikansnivået på 5 %, noe som gir grunnlag for å forkaste nullhypotesen.

Det er altså grunnlag for å mistenke at levetiden til temperaturfølerne av denne typen er lavere enn produsenten oppgir.

Oppgave 4

a) Antall milligram virkestoff i kroppen til Marit like etter hun har tatt den daglige tabletten sin, er gitt ved rekka:

$$20+20\cdot 0,75+20\cdot 0,75^2+\cdots$$

Vi har altså summen av ei uendelig geometrisk rekke der $a_1=20$ og $k=0,75$.

$$S=\frac{20}{1-0,75}=\frac{20}{0,25}=80$$

Det betyr at mengden virkestoff vil nærme seg, men aldri nå helt opp til, 80mg.

Marit har i underkant av 80 mg av virkestoffet i kroppen like etter at hun har tatt den daglige tabletten. Som skulle vises

b) Her må vi se hva a_1 må være for at summen skal bli 60 istedenfor 80.

$$\frac{a_1}{1-0,75}=60$$
$$a_1=60\cdot 0,25$$
$$a_1=15$$

<u>Det kan være 15 mg virkestoff i hver tablett for at Marit skal unngå å få mer enn 60 mg av virkestoffet i kroppen.</u>

c) Regner ut hvor mye virkestoff kroppen bryter ned per time.

CAS

1 x^66=0.5

Løs: $\left\{x=-\sqrt[66]{\frac{1}{2}}, x=\sqrt[66]{\frac{1}{2}}\right\}$

2 {x = -nrot(1 / 2,66), x = nrot(1 / 2,66)}

$\approx \{x=-0.9896, x=0.9896\}$

Bruker den positive løsningen og finner ut hvor mye virkestoff kroppen bryter ned per døgn.

3 HøyreSide($2,2)^{24}

$\approx$ **0.7772**

Kroppen bryter ned 22,28 % av virkestoffet per døgn. Verdien i rad 3 på bildet over er vekstfaktoren ved denne nedgangen i mengden virkestoff i kroppen.

Vi har da en uendelig geometrisk rekke der $a_1=10$ og $k=0,7772$

4 Sum(10*0.7772^(n-1), n, 1, inf)

$\checkmark \sum_{n=1}^{\infty} 10\cdot 0.777^{n-1}$

5 Sum(10 (0.7772^(n - 1)),n,1,∞)

$\approx$ **44.883**

<u>Brukeren vil ha i underkant av 45 mg virkestoff i kroppen like etter at han har tatt den daglige tabletten sin.</u>